Formelsammlung

Ver. 6.1

Inhaltsangabe

Notizen

X = Prüfungsaufgabe von 2008 oder 2009 enthalten

Notizen

Notizen

Grössen Umrechnen

Längeneinheiten

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung
1nm	Nanometer	1nm = 0,001mym = 10^-9 m
1mym	Mikrometer	1mym = 0,001 mm
1mm	Millimeter	1mm = 0,001m
1cm	Zentimeter	1cm = 10mm
1dm	Dezimeter	1dm = 10cm = 100mm
1m	Meter	1m = 10dm = 100cm = 1000mm
1km	Kilometer	1km = 1000m

Flächeneinheiten

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung
$1mm^2$	Quadratmillimeter	-
$1cm^2$	Quadratzentimeter	$1cm^2 = 100mm^2$
$1dm^2$	Quadratdezimeter	$1dm^2 = 100cm^2 = 10000mm^2$
$1m^2$	Quadratmeter	$1m^2 = 100dm^2 = 10000cm^2$
1a	Ar	$1a = 100m^2$
1ha	Hektar	1ha = 100a
$1km^2$	Quadratkilometer	$1km^2 = 1000m \cdot 1000m$

Volumeneinheiten

Einheit	Bezeichnung	Umrechnung
$1mm^3$	Kubikmillimeter	--
$1cm^3$ / ml	Kubikzentimeter = Mililiter	$1cm^3 = 1000\ mm^3$
$1dm^3$ / l	Kubikdezimeter = Liter	$1dm^3 = 1000\ cm^3$
1 l	Liter	$1l = 1dm^3$
$1m^3$	Kubikmeter	$1m^3 = 1000\ dm^3$

Grössen Umrechnen

Zeiteinheiten

Einheit	**Bezeichnung**	**Umrechnung**
1ms	Millisekunde	
1s	Sekunde	1s = 1000ms
1min	Minute	1min = 60 s
1h	Stunde	1 h = 60 min
1d	Tag	1 d = 24 h
1w	Woche	1 w = 7 d
1m	Monat	1 m = 30 d
1a	Jahr	1 a = 12m = 360d

Gewichtseinheiten

Einheit	**Bezeichnung**	**Umrechnung**
1 ng	Nanogramm	1000^-12 g
1 myg	Mikrogramm	1 myg = 1000 ng = 10^-9kg
1 mg	Milligramm	1 mg = 1000 myg = 10^-6kg
1 g	Gramm	1 g = 1000mg = 10^-3kg
1 kg	Kilogramm	1kg = 1000g
1 t	Tonne	1 t = 1000kg

Trigeometrie Prüfung 2009

Aufgabe 2

In einem Dreieck verhalten sich der kleinste und der grösste Winkel wie 2 : 3. Der dritte Winkel ist das arithmetische Mittel der beiden anderen. Berechnen Sie die Dreieckswinkel.

Arithmetisch Mittel $x \leftrightarrow y$

〃 Durchschnitt

$\alpha \quad \beta$

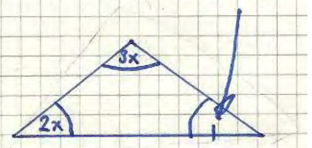
$2 : 3$

3 Winkel = arithmetisches Mittel

$2x + 3x + \frac{5}{2}x = 180°$

$\frac{10}{2}x + \frac{5}{2}x = \frac{15}{2}x = 180° \quad |: 7{,}5°$

$x = 24°$



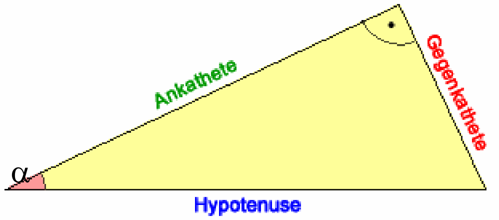
$\frac{5}{2}x \leftarrow \frac{2x + 3x}{2}$

kleinste $= 2x = 48°$

mittel $= 2{,}5x = 60°$

grösste $= 3x = 72°$

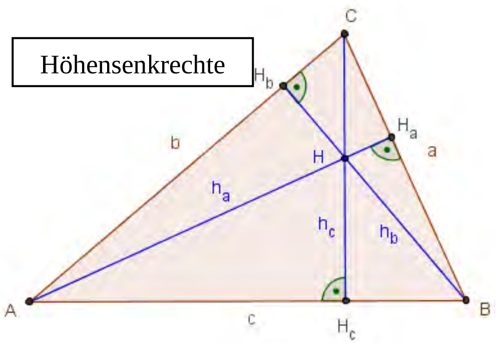
Trigonometrie



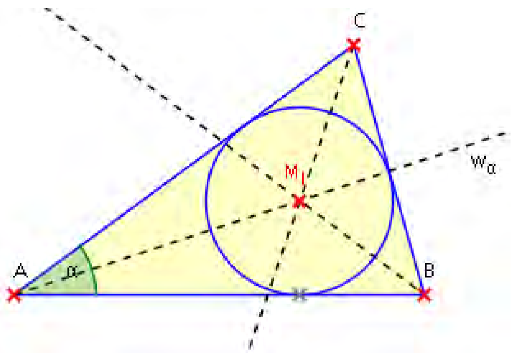
G	A	G	A
H	H	A	G
S	C	T	C
I	O	A	O
N	S	N	T

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

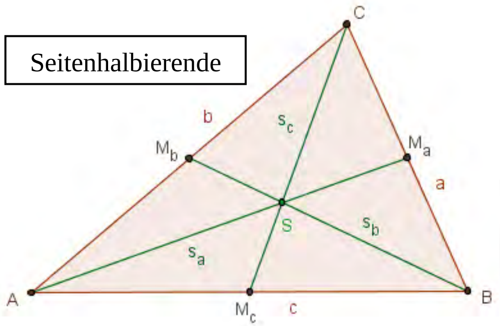
Höhensenkrechte



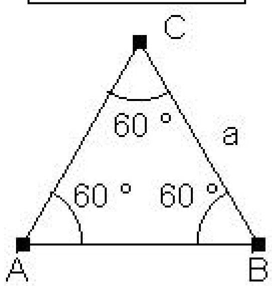
Winkelhalbierende



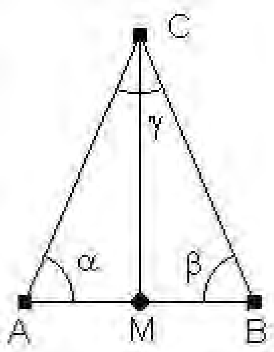
Seitenhalbierende



gleichseitig

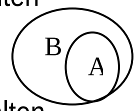


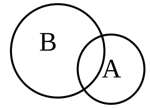
gleichschenkelig



Mengenlehre

|	= natürliche Zahlen	{ 1,2,3,... } nur Positiv
$\vert_0$	= natürliche Zahlen	{ 0,1,2,3,... }
∧	= ganze Zahlen	{ ...,-2,-1,0,1,2,...}
∠	= rationale Zahlen	{ Brüche x/y }
∇	= reelle Zahlen	(alle Zahlen auf Zahlenachse)
∅	= Grundmenge	
℘	= Definitionsmenge	z.b. ℘ = ∇ \ { -3; 8 }
⊄	= Lösungsmenge	
∉	ist keine Summe von	A∉B = A ist in B überhaupt nicht enthalten
∈	ist Summe von	
⊂	= ist Teilmenge von	A⊂B = A ist vollständig in B enthalten,
⊄	= ist keine Teilmenge von	A⊄B = A ist nicht vollständig in B enthalten,
∩	= vereinigt	A+B
∪	= nur Schnittmenge	(zb. A={123}; B={256}; A∪B={2})
A \ B = {2, 6,8}		= Das was weggenommen wird
(A ∩ B) \ (A ∪ B)		= A & B jedoch ohne Schnittmenge
G \ (A ∩ B)		= die Gesamtfläche abzüglich A + B sind enthalten
(A ∩ C) \ B		(A + C) - B
(A ∪ C) \ B		(Nur das was in A und C gleichzeitig enthalten ist) - B





©n=Teilermenge (Alle Zahlen die durch die n geteilt werden kann. n:1, n:2 usw.)

©14={1,2,7,14}

Logik

, und

. oder

Allgemeine Regeln

Vorzeichenwechsel
b-a = -(a-b)

1| (+a-b) = -1| (+b-a)

Brüche

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a\cdot c}{\frac{b\cdot c}{c}} = \frac{a\cdot c}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b\cdot c}$$

Brüche

$$\frac{x}{y} = x * \frac{1}{y}$$

Nicht kürzbar !

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

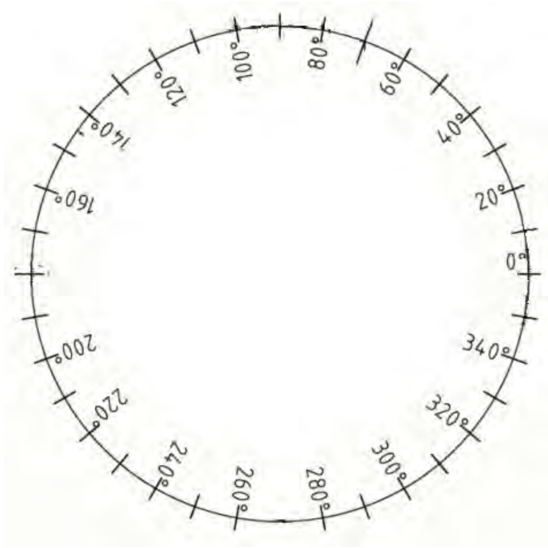
Wurzeln kürzen

$$\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Bogen & Gradeinheiten

$$\text{Bogenmass} = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

α	Gradmass	sin(α)	cos(α)	tan(α)
0°	0	0	1	
15°	1/12π			
30°	1/6π	1/2	1/2√3	
45°	1/4π	1/2√2	1/2√2	
60°	1/3π	1/2√3	1/2	
90°	1/2π	1	0	-
120°	2/3π	1/2√3	-1/2	
135°		1/2√2	-1/2√2	-1
150°		1/2	-1/2√3	
180°	3/4π	0	-1	0
225°		-1/2√2	-1/2√2	1
270°	1 1/2π	-1	0	-
360°	2π	0	1	0



Komplexe Zahlen

2. Stelle dar mit Real- und Imaginärteil

a) $z = 2 \cdot e^{2i}$

b) $z = 3 \cdot e^{-3i}$

Lösung:

a) $r = 2$

$\varphi = 2 \rightarrow \varphi^{\circ} = \frac{\varphi \cdot 180^{\circ}}{\pi} = \frac{2 \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 114{,}59^{\circ}$

$x = r \cdot \cos\varphi = 2 \cos 114{,}59^{\circ} = -0{,}8323$

$y = r \cdot \sin\varphi = 2 \cdot \sin 114{,}59^{\circ} = 1{,}8186$

$\underline{\underline{z = -0{,}8323 + 1{,}8186\,i}}$

b) $r = 3$

$\varphi = -3 \rightarrow \varphi^{\circ} = \frac{\varphi \cdot 180^{\circ}}{\pi} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{\pi} = -171{,}89^{\circ}$

$x = r \cdot \cos\varphi = 3 \cdot \cos -171{,}89^{\circ} = -2{,}970$

$y = r \cdot \sin\varphi = 3 \cdot \sin -171{,}89^{\circ} = -0{,}423$

$z = \underline{\underline{-2{,}970 - 0{,}423\,i}}$

Potenzregeln

Grundregel

$x^0 = 1$

$x^y \cdot x^z = x^{y+z}$

$\sqrt{x^2} = x$

Klammern

$x^z \cdot y^z = (xy)^z$

$(x^y)^z = x^{y \cdot z}$

Brüche

$\frac{1}{x^y} = x^{-y}$

$\frac{1}{x^{-y}} = x^y$

$\frac{x}{y^{-z}} = n \cdot o^z$

$\frac{x^y}{x^z} = x^{y-z}$

$\frac{x^z}{y^z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z = \left(\frac{y}{x}\right)^{-z}$

Umwandel

$\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 = a^{\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1}} = a^{\frac{8}{3}}$

Regeln mit Wurzeln

$\sqrt[y]{x^y} = x$

$\sqrt[2x]{a^x} = x$

$\sqrt[z]{x} = x^{\frac{1}{z}}$

$\sqrt[z]{x^y} = x^{\frac{y}{z}}$

$x \cdot \sqrt[z]{y} = \sqrt[z]{x^z y}$

$\sqrt[z]{x} \cdot \sqrt[z]{y} = \sqrt[z]{xy}$

$\sqrt[z]{\sqrt[y]{x}} = \sqrt[y]{\sqrt[z]{x}} = \cdot \sqrt[yz]{x} = x^{\frac{1}{yz}}$

Negative Exponenten/Wurzeln

$\sqrt[-z]{x^y z} = 1 \big/ \sqrt[z]{x^y z}$

$\sqrt[-z]{x^y z} = 1 \big/ \sqrt[z]{x^y z}$

$\sqrt{x^{-y} / z} = \sqrt{z / x^y}$

$\sqrt[-a]{x^{-b} z^{+c}} = 1 \big/ \sqrt[a]{x^b / z^c}$

Hochsetzen von Exponenten

$\frac{x}{z \cdot y^4} = \frac{x \cdot y^{-4}}{z}$

das Vorzeichen der Potenz ändert sich!

Teilbarkeitsregel

2	letzte Ziffer :2			
3	Quersumme :3	123 =	1+2+3=	6:2
4	letzte 2 Ziffern :4	15936 =		36:4
5	letzte Ziffer 5 oder 0			
6	bei gerader Zahl und Quersumme :3	126 =	1+2+6=	9:3
8	letzte 3 Ziffern :8	425368=		368:8
9	Quersumme :9	468=	4+6+8=	18:9
11	Quersumme mit wechseldem Vorzeichen :11	120527=	+1-2+0-5+2-7=	-11

Primzahlen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193
197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257
263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431	433	439	449	457	461

Komplexe Zahlen

- Übung

17.12.09

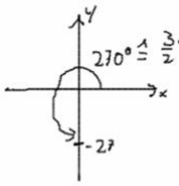
1 /

Bestimmung der Lösungsmenge von $z^3 + 27i = 0$ (Schreibe als $z = x + yi$)

Lösung: $z^3 + 27i = 0 \quad / -27i$

$z^3 = \underbrace{-27i}$

$|-27i| = |0-27i|$



$z = 27 \cdot e^{i\varphi} = 27 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i + 2k\pi i}$

$z^3 = e^{(\frac{3}{2}+2k)\pi i} \quad / \sqrt[3]{\ } \text{ bzw. } \frac{1}{3}$

$z = (27 \cdot e^{(\frac{3}{2}+2k)\pi i})^{\frac{1}{3}}$

$= \sqrt[3]{27} \cdot (e^{(\frac{3}{2}+2k)\pi i})^{\frac{1}{3}}$

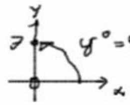
$= 3 \cdot e^{\frac{1}{3}(\frac{3}{2}+2k)\pi i} \rightarrow \cancel{3 \cdot \text{cis}((\frac{3}{2}+2k)} \quad 3 \cdot \text{cis}(\frac{1}{3}(\frac{3}{2}+2k) \cdot 180°)$

$= 3 \text{ cis}((\frac{3}{2}+2k) \cdot 60)$

k	$90° + k \cdot 120°$	$z_k = 3 \cos\alpha_k + 3i \sin\alpha_k$
0	90°	3i
1	210°	$-2{,}5981 - \frac{3}{2}i$
2	330°	$2{,}5981 - \frac{3}{2}i$

α_k

c) $|z| = \sqrt{0^2 + 7^2} = 7$



$\varphi° = 90°$

$z = 7 \cdot \text{cis } 90° \cdot \underline{e^{1{,}5708i}}$

d) $\xrightarrow[-3]{-4z}$

$-4z + iz = -3 - 5i \quad / \cdot (-1)$

$(4-i)z = 3+5i \quad / : (4-i)$

$z = \frac{3+5i}{4-i}$

$\rightarrow = \frac{(3+5i)}{(4-i)} \cdot \frac{(4+i)}{(4+i)}$

$= \frac{12 + 3i + 20i + 5i^2}{16 + 4i - 4i - i^2}$

$= \frac{7 + 23i}{17} = \frac{7}{17} + \frac{23}{17} i$

$r = \sqrt{(\frac{7}{17})^2 + (\frac{23}{17})^2} = \frac{\sqrt{578}}{17} = 1{,}4142 = \sqrt{2}$

$= \sqrt{2} \text{ cis}(73{,}07°) = \underline{\underline{\sqrt{2}\, e^{1{,}2754i}}}$

$\varphi = \arctan \frac{(\frac{23}{17})}{(\frac{7}{17})} = \arctan (\frac{23}{7}) = 73{,}07°$

Komplexe Zahlen

Über Potenzregeln lassen sich Grundoperationen anders „formulieren".

1\. Stufe

$$e^{ix_1} \cdot e^{ix_2} = e^{i(x_1+x_2)}$$ Multiplikation

$$\frac{e^{ix_1}}{e^{ix_2}} = e^{ix_1} \cdot e^{-ix_2}$$ Division

2\. Stufe

$$\left(e^{ix}\right)^m = e^{i \cdot m x}$$ Potenzieren

$$\sqrt[m]{e^{ix}} = \left(e^{ix}\right)^{1/m} = e^{\frac{x}{m} i}$$ Radizieren

Übungen

16.11.09

1) Stelle dar in der Exponentialform

a) $z = 3+4i$, $z = ?$

b) $z = 4-3i$, $z = ?$

c) $z = 7i$, $z = ?$

d) $iz + 3 = 4z - 5i$, $z = ?$

Merke: Der Winkel φ ist nicht eindeutig, z.B. $\varphi = \underbrace{30°, 390°}_{+360°}, \underbrace{750°}_{-360°}$ ergeben (bei gleichem Betrag) gleiche (komplexe) Zahlen.

Lösung: Merke: Bei der eulerschen Formel müssen Winkel im Bogenmaß angegeben werden.

Umrechnung: $\boxed{\varphi = \frac{\varphi° \cdot \pi}{180°}}$

a) $r = |z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\tan\varphi = \frac{4}{3} \rightarrow \varphi° = \arctan\frac{4}{3} = 53{,}13° \rightarrow 0{,}9273$

$z = 5 \cdot cis(53{,}13°) = \underline{5 \cdot e^{0{,}9273 i}}$

b) $\tan\varphi = \frac{3}{4} \rightarrow \varphi° = \arctan\frac{3}{4} = 36{,}87° \rightarrow 0{,}6435$

$z = 5 \cdot cis(-36{,}87°)$

$= 5 \cdot cis(323{,}13°)$

$= \underline{5 \cdot e^{-0{,}6435 i}}$

Zahlensysteme Umrechnen

6er System (Bsp Zahl 123456 Umrechnen)

Zahl im 6 System	1	2	3	4	5	6	Summe
Umrechnungs Potenz	6^5	6^4	6^3	6^2	6^1	6^0	
Faktor	7776	1296	216	36	6	1	
Zahl im Dezimalsystem	7776	2592	648	144	30	6	11190

Gesucht ist das Zahlensystem

Nr. 12

$343_x = 410$

$3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0 = 410$

$3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 3 \cdot 1 = 410 \quad | -3$

$3 \cdot x^2 + 4 \cdot x = 407 \quad | -407$

$3x^2 + 4x - 407 = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot -407}}{6}$$

4900

~~4868~~

$$\frac{-4 \pm 70}{6} = \quad x_1 = 11 \qquad x_2 = -12\tfrac{1}{3}$$

Nicht geeignet

Die Basis ist 11

Zerlege in Faktoren

12.

a) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{16}{1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$

Aufgabe $\frac{16}{1/4} - 5$

b) $\frac{(a^3 \cdot b)^2 \cdot a^{-2}}{(a \cdot b^2)^2} = \frac{a^3 \cdot b \cdot a^3 \cdot b}{a \cdot b^2 \cdot a \cdot b^2 a^2} = \frac{a^6 b^2}{a^4 b^4} = \frac{a^2}{b^2}$

c) $\frac{3a \cdot b}{a^2 \cdot b^{-2}} - \frac{2b^2}{a \cdot b^{-1}} = \frac{3b \cdot b^2}{a} - \frac{2b^2 \cdot b}{a} = \frac{3b^3}{a} - \frac{2b^3}{a} = \frac{3b^3 - 2b^3}{a} = \frac{b^3}{a}$

d) $a^3 \cdot (a^{-2})^3 \cdot (\sqrt[3]{a^4})^2 \cdot \sqrt[3]{a} = \underbrace{a^3 \cdot a^{-6}}_{a^{-3}} \cdot (a^{4/3})^2 \cdot a^{1/3}$ $= \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1}$

$a^{-3} \cdot \underbrace{a^{8/3} \cdot a^{1/3}}_{a^{8/3 + 1/3}}$

$a^{-3} \cdot a^3 = 1$

$a^0 = 1$

12 e) $\left(\frac{ax}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{(a \cdot x)^2}{b^3}\right)^{-2} = \left(\frac{ax}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot x^2}{b^3}\right)^{-2} =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$\frac{ax \cdot ax \cdot ax}{b^6} \cdot \left(\frac{b^3}{a^2 x^2}\right)^2 = \frac{\cancel{a^3} \cancel{x^3}}{\cancel{b^6}} \cdot \frac{\cancel{b^6}}{a^4 x^4} = \frac{1}{ax}$

f) $a \cdot \sqrt[6]{a^3 \cdot b^2} \cdot \sqrt[4]{a^6 \cdot b^3} = \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{b^2} \cdot \sqrt[4]{a^6} \cdot \sqrt[4]{b^3} \cdot a =$

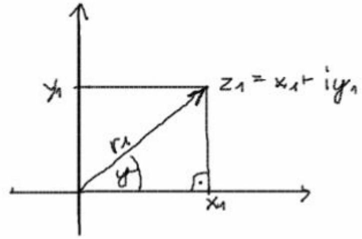
$a \cdot a^{3/6} \cdot b^{2/6} \cdot a^{6/4} \cdot b^{3/4} = a \cdot \underbrace{a^{1/2} \cdot a^{3/2}}_{a^2} \cdot \underbrace{b^{1/3}\, b^{3/4}}_{b^{13/12}} =$

$= a \cdot a^2 \cdot b^{13/12}$

$= a^3 \sqrt[12]{b^{13}}$

Komplexe Zahlen

Goniometrische Darstellung von komplexen Zahlen



Für komplexe Zahlen im 1. Quadranten der Gauss'schen Ebene ist:

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

Das gilt auch für komplexe Zahlen in den anderen Quadranten.

$\rightarrow$ neue darstellung von komplexen Zahlen mit Hilfe des Betrags: $(|z| = r)$

$z = x + iy = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

Definieren „komplexe Winkelfunktion"

$$\boxed{cis(\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$$

Über die komplexen Zahlen sind Winkel- und Exponentialfunktionen eng verwandt.

Eulersche Formel

$$\boxed{\cos x + i \cdot \sin x = e^{ix}}$$

Gemäss obiger Notation

$cis(x) = e^{ix}$

Komplexe Zahlen – 2 Unbekannte

Aufgabe 13 b) Erst i im Nenner wegmachen!

$$\frac{(1+i)a}{7+i} + \frac{37+99i}{25} = \frac{8+ai+b}{2-i}$$

$$\frac{1+i}{7+i}\cdot\frac{(7-i)a}{} + \frac{37+99i}{25} = \frac{8+ai+b\cdot(2+i)}{2-i\cdot 2+i}$$

$$\underbrace{7-i^2}_{50} \qquad \underbrace{2^2-i^2}_{5}$$

$8+6i = 2(4+3i)$

$$\frac{\overbrace{(7-i+7i+1)}a}{50} + \frac{37+99i}{25} = \frac{16+8i+2ai-a+2b+bi}{5}$$

$$\frac{\cancel{2}(4+3i)a}{\cancel{50}\ 25} + \frac{37+99i}{25} = \frac{5(2b-a+16+(b-a+8)i)}{\cancel{5}\ 25}$$

$$4a+3ai+37+99i = 10b-5a+80+5bi-5ai+40i$$

Realteil $4a+37 = 10b-5a+80$

$9a-10b = 43$

Imaginärteil $3a+99 = 5b-5a+40$

$8a-5b = -59 \quad |\cdot 2$

$16a-10b = -118$

$9a-10b = 43 \quad \} -$

$7a = -161 \quad |:7$

$a = -23$

$5b = 8a+59$

$= 8\cdot(-23)+59$

$5b = -125 \quad |:5$

$b = -25$

Zerlege in Faktoren Prüfung 2009

Aufgabe 4

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck möglichst:

$$[2(-b)^{-3}]^{-2} - [4(-b/2)^2]^3 + (-2)^{11}\cdot[-(4b^{-1})^2]^{-3}$$

Aufgabe 4 Vereinfache 20. 01. 10

$$[2(-b)^{-3}]^{-2} - [4(-b/2)^2]^3 + (-2)^{11}\cdot[-(4b^{-1})^2]^{-3}$$

$$\frac{2}{(-b)^3} = \frac{2}{-b^3} = -\frac{2}{b^3} \qquad 4\cdot\left(\frac{-b}{2}\right)^2 = \cancel{4}\cdot\frac{b^2}{\cancel{4}} = b^2 \qquad -\left(\frac{4}{b}\right)^2 = -\frac{16}{b^2} \quad \cdot(-2048)$$

$$\left[-\frac{2}{b^3}\right]^{-2} - \left[b^2\right]^3 - 2048\left[-\frac{16}{b^2}\right]^{-3}$$

$$\frac{1}{\left(-\frac{2}{b^3}\right)^2} - b^6 - \frac{2048}{\left(-\frac{16}{b^2}\right)^3}$$

$$\frac{1\cdot b^6}{\frac{4}{b^6}\cdot\frac{b^6}{1}} - b^6 + \frac{2048\cdot b^6}{\frac{4096}{b^6}\cdot b^6} = \frac{b^6}{4} - b^6 + \frac{b^6}{2} = \frac{b^6}{4} - \frac{4b^6}{4} + \frac{2b^6}{4}$$

$$-\frac{b^6}{4}$$

KgV / ggT Anwenden

Primfaktorenzerlegung

156=2 | 2 | 3 |

208=2 | 2 | 2 | 2 |

312=2 | 2 | 2 | 3 | 13

Zusammenfassen

13 $=2^2$ | 3 | 13

13 $=2^4$ | 13

= 2^3 | 3 | 13

ggt

Nimm jede Primzahl die bei jeder Zahl vor kommt und bilde das Produkt der tiefsten Potenz.

ggT = 2 | 2 | 13 = 52

kleinste Zahl durch die alle Variabeln geteilt werden können.

156:52=3

208:52=4

312:52=6

(z.b. gemeinsamer Nenner bei Bruch)

Kgv

Nimm jede Primzahl der höchsten Potenz und bilde das Produkt.

Kgv = 2^4 | 3 | 13 = 624

kleinste Zahl die durch alle Variabeln geteilt werden können.

624:156=4

624:208=3

624:312=2

Alles in die gleichen Masseinheiten Umwandeln!

Komplexe Zahlen – z gesucht

12. $\frac{z+1-2i \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{5-7i \cdot (1-i)}{1+i \cdot (1-i)}$

$-i^2 = +1$

gekehrt damit Lösung sowieso im Zähler

$-zi - i - 2 = \frac{5-5i-7i-7}{\underbrace{1-i+i-1}_{2}}$

$\frac{+2zi+2i+4}{2} \cdot (-1) = \frac{+2+12i}{2} \cdot (-1) \quad | -4-2i$

$2zi = 2+10i \quad | :2$

$zi = -1+5i$

$-z = -i-5 \quad | \cdot -1$

$\underline{\underline{z = 5+i}}$

→ Umwandeln → Goniometrisch

$z = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$

$\varphi = \frac{1}{5} = 11{,}30$

$\underline{\underline{\sqrt{26} \cdot e^{0{,}1973 i}}}$

$\frac{2\bar{z}}{1-i} - z(3+5i) = 2+20i$

Substitution $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$

$\frac{2\bar{z}\; x-iy \cdot (1+i)}{\underbrace{1-i \cdot (1+i)}_{2}} - (x+iy) \cdot 3+5i = 2+20$

$x+xi-yi+y-[3x+5xi+3yi-5y] = 2+20i$

$x+y+xi-yi-3x-5xi-3yi+5y = 2+20i$

$-2x+6y-4xi-4y = 2+20i$

Real $-2x+6y = 2 \xrightarrow{:2} -x+3y = 1$

Imaginär $-4x-4y = 20 \xrightarrow{:-4} x+y = -5$ } +

$4y = -4 \xrightarrow{:4} y = -1$

$x = -5-y = -5+1 = -4$

$z = x+iy = -4-i$

Exponentialform komplexer Zahlen

Von Gonemetrisch nach Exponential:

Ausgangsform (Gonimetrische Darstellung): $z = r \cdot \mathrm{cis}(\varphi + \kappa \cdot 180)$

1. "φ" ins Bogenmass umrechnen $\dfrac{\varphi° \cdot \pi}{180°}$

2. Werte in die Formel einsetzen: $\underline{\underline{z = r \cdot e^{i\varphi}}}$

Von Exponential nach Arthrimetisch:

Ausgangsform (Exponentialform): $z = r \cdot e^{i\varphi}$

1. "φ" ins Gradmass umrechnen $\dfrac{\varphi° \cdot 180°}{\pi}$

2. xy Koordinaten ausrechnen

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

3. Werte einsetzen

$\underline{\underline{z = \pm x \pm yi}}$

Zinsrechnen

Zinsberechnung für mehere Jahre

z.b. Zinsberechnung bei 6% und 10000,- sFr.

1 Jahr	10000 | 1,06	=10600
2 Jahre	10000 | $1,06^2$	=11236
6 Jahre	10000 | $1,06^6$	=14185.20

Um 6% Zins herunterzurechnen

1 Jahr	10600/1,06	=10000
2 Jahre	$11236/1,06^2$	=10000

Textaufgaben

Bei einer Zweistelligen Zahl ist die Zehnerziffer um 3 kleiner als die Einerziffer. Sie Quersumme der Zahl beträgt 5/23 der Zahl selber. Wie heisst die Zahl?

Musterprüfung 16 29.10.09

Nr 11

Einerziffer x

Zehnerziffer $x-3$

Quersumme $2x-3$

Quersumme $\frac{5}{23}$

$$2x - 3 = \frac{5}{23}\Big[\underbrace{(x-3)\cdot 10 + x}_{10x - 30 + x}\Big] \quad \Big| \cdot 23$$

$$46x - 69 = \frac{23}{1}\cdot\frac{5}{23}\cdot[11x - 30]$$

$$46x - 69 = 55x - 150 \quad | -46x + 150$$

$$81 = 9x \quad | :9$$

Die Zahl heisst $\underline{69}$ $\begin{cases} 9 = x \\ 6 = x-3 \end{cases}$

Textaufgaben

Aufgabe 31 a) S.65 B1 21.10.09

Wenn man eine Zahl um 1 vergrössert vergrössert sich ihr Quadrat um 8,16 %

$(x+1)^2 = x^2 + 8{,}16\,\% \;/\; \frac{108{,}16}{100} x^2$

$x^2 + 2x + 1 = 1{,}0816 x^2 \quad | -x^2 - 2x \quad | \cdot (-1)$

$0{,}0816 x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0{,}0816 \cdot -1}}{2 \cdot 0{,}0816} = \frac{2 \pm 2{,}08}{0{,}1632}$

$x_1 = 25$

$x_2 = -0{,}4902$

Aufgabe 31 b) Bei 6 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Produkt gebildet durch die ersten beiden Zahlen drei mal so gross wie die Summe der restlichen 4 Zahlen. Wie heissen die 6 Zahlen?

x, $x+1$: $x \cdot (x+1) = 3 \cdot (4x + 14)$

$x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$: $4x + 14$

$x^2 + x = 12x + 42$

$x^2 - 11x - 42 = 0$

$(x-14) \cdot (x+3) = 0$

$x_1 = -3$ Keine Lösung

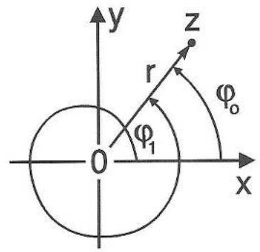
$x_2 = +14$

Antwort: 14, 15, 16, 17, 18, 19

Goniometrische Darstellung komplexer Zahlen

Von Arthrimetisch nach Gonemetrisch:

Ausgangsform(Arthrimetische): $z = a + bi$



1. "r" Ausrechnen

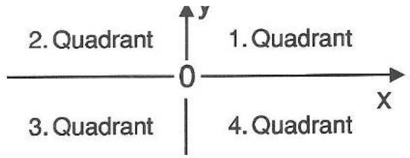
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. "$\kappa \cdot 180°$" Festlegen
siehe Tabelle rechts

3. "cis(φ)" Ausrechnen + K·180°

$\varphi = \arctan = \frac{y}{x} = \frac{\text{(Gegenkatete)}}{\text{(Ankathete)}}$

κ = 0, wenn z im 1. Quadranten liegt.
κ = 1, wenn z im 2. Quadranten liegt.
κ = 1, wenn z im 3. Quadranten liegt.
κ = 2, wenn z im 4. Quadranten liegt.***



4. Zusammenfassen

$$z = r \cdot \text{cis}(\varphi + \kappa \cdot 180)$$

$$\begin{pmatrix} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Grundoperationen in der Exponential form 16.12.09

Operation	Formel für $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren mit $n \in (N)$	$z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n\varphi}$
Radizieren mit $n \in (N)$	$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ * k = Ganze Zahl o. 0, $k \in \mathbb{Z}$

* Es macht sich die Unbestimmtheit von φ bemerkbar

Komplexe Zahlen

$i = \sqrt{-1}$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$

$i^{(-3,1,5,....)} = i$ $\quad i^{(-2,2,6,...)} = -1$ $\quad i^{(-1,3,7,...)} = -i$ $\quad i^{(-4,0,4,8,...)} = 1$

$$\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{(-b)} = i\sqrt{a} \cdot i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$$

Rechnenregeln:

Addition & Subtraktion -> Real und Imaginärteile getrennt:
(a±bi) ± (c±di) = (a±c) ± (b±d)i
Beispiel: (4 -2i) + (-2+3i) = 2 + i

Multiplikation: ganz normal Multiplizieren wie mit Normalen Variablen!
(a±bi) · (c±di) = (a·c) ϒ (b·d) ± ((b·c)± (a·d))i Achtung i² = -1

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$: Erweitern mit Konjunktion (c-di)

$$\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{x^2+y^2}$$

Betrag |z| :
Realteil = a Imaginärteil = bi -> $\sqrt{a^2+b^2}$

Forgehensweise bei z.b.	
iz + 3 = 4z – 5i	| z auf eine Seite bringen
3 + 5i = 4z + iz	| z Ausklammern
3 + 5i = z(4-i)	| :(4-i) teilen
	| linke Seite mit (4+i) erweitern

Textaufgaben

Seite 65 Aufgabe 32 ② 21.10.09

Multipliziert man die Differenz zwei positiver Zahlen x und y mit ihrer Summe und multipliziert das Ergebnis mit 5, so erhalt man eine Zahl, die vier mal sogross ist wie die Summe der Quadrate vom x und y wie heissen die beiden Zahlen wenn die Differenz 16 ist

$$5 \cdot \underbrace{(x-y)}_{16} \cdot (x+y) = 4(x^2+y^2)$$

$x - y = 16 \rightarrow y = x - 16 \rightarrow y^2 = x^2 - 32x + 256$

$$
\begin{aligned}
80\,(x + x - 16) &= 4\,(x^2 + x^2 - 32x + 256) && |:4 \\
20\,(2x - 16) &= 2x^2 - 32x + 256 \\
40\,(x - 8) &= 2(x^2 - 16x + 128) && |:2 \\
20\,(x - 8) &= 2(x^2 - 16x + 128) \\
20x - 160 &= x^2 - 16x + 128 && |-20x \; +160 \\
x^2 - 36x + 288 &= 0
\end{aligned}
$$

a | 1
b | -36
c | 288

$$x = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 1 \cdot 288}}{2}$$

$$x = \frac{36 \pm 12}{2}$$

$x_1 = 24$

$x_2 = 12$

$y_1 = x_1 - 16 = 8$

$y_1 = x_2 - 16 = -4$

$$\mathbb{L} = \binom{x}{y} = \left\{ \binom{24}{8}, \binom{12}{-4} \right\}$$

Textaufgaben

Bei zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ist die Differenz zwischen Dem Produkt und der Summe der Zahl 419. Bestimme beide Zahlen

(5.) x und $y = x+1$ Differenz 379

Zwei Afeinanderfolgende natürlich Zahlen

$$x \cdot y - x - y = 379$$
$$x \cdot (x+1) - x - x - 1 = 379$$
$$x^2 + x - 2x - 1 = 379 \quad |-379$$
$$x^2 - x - 380 = 0$$

a 1
b 1
c −380

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-380)}}{2} = \frac{1 \pm 39}{2}$$

$$x_1 = 20$$
$$x_2 = -19$$

$$y = x + 1$$
$$y = 20 + 1 = 21$$

Polynomdivisionen

Polynomdivision bei der sich die Lösung nicht trennen lässt.
(Achtung Lösung +4(a+2)!)

$$(x^4 + ax^3 + b) : (x-2) = x^3 + (a+2)x^2 + 2(a+2)x - 4(a+2)$$
$$-(x^4 - 2x^3)$$
$$(a+2)x^3 + b$$
$$-((a+2)x^3 - 2(a+2)x^2)$$
$$+2(a+2)x^2 + b$$
$$-(2(a+2)x^2 - 2 \cdot 2(a+2)x)$$
$$4(a+2)x + b$$
$$-(4(a+2)x - 2 \cdot 4(a+2))$$
$$-8(a+2)$$

$$b = -8(a+2)$$

$$b + 8(a+2) = 0 \quad \text{kein Rest}$$

Hat ein Polynom lauter reelle Wurzeln so kann man schreiben:
$anx^n + an\text{-}1x^{n-1} + ...a1x + a0=$
$an(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)....... \cdot(x-x_n)$

Polynomdivisionen

14. $(5x^4 - ax^3 + 3x^2 + b) : (x^2 - 1) = 5x^2 - ax + 8$ Blatt 7

$-+5x^4 \qquad -\,-5x^2$

$-ax^3 + 8x^2 + b$

$-\,-ax^3 \qquad -+ax$

$+8x^2 - ax + b$

$-\,-8x^2 \qquad -8$

$\underbrace{-ax}\ +\underbrace{(b+8)}$

$a=0 \qquad b+8=-8$

15. Kubische Gleichung

$x^3 + 8 = 0$ Lösung $x = -2$

$x^3 + 8 = (x+2)\cdot p_2(x)$

$p_2 = \frac{x^3+8}{x+2}$

$p_2 = (x^3+8) : x+2 = x^2-2x+4 \qquad p_2(x) = x^2 - 2x + 4$

$-+x^3 + 2x^2$

$-\,-2x^2 + 8$

$-2x^2 + 4x$

$4x + 8$

$4x + 8$

0

Textaufgaben

In der Multiplikation $35\cdot 38a^3 = 13c855$ fehlen die Ziffern a und c.

Aufgabe 10 S. 57 a und c sind gesucht

$35\cdot 38a3 = 13c\ 855$

$35\cdot(3803 + 10a) = 130855 + 1000c$ Diophantische

$35\cdot 38a3 = 13c855 \quad :35$

$38a3 = \frac{13c855}{5\cdot 7} = \frac{134855}{5\cdot 7} = 3853 \to a = 5$

c	
0	$\notin \mathbb{Z}$
1	"
2	"
3	"
4	19265
5	$\notin \mathbb{Z}$
6	"
7	"
8	"
9	"

$38a3 = \frac{19265}{35}$

Textaufgaben

Ein Kondensator wird aufgeladen. Die Ladung Q zur Zeit t (in Sekunden) beträgt $Q(t) = Q_0(1-e^{-0.02t})$.
Nach welcher Zeit beträgtdie Ladung 95% von Q_0

Aufgabe 7 S.15

$Q(t) = Q_0(1-e^{-0,02t})$

Nach welcher Zeit beträgt die Ladung 95% von Q_0

$Q(t) = \frac{95}{100}Q_0 = 0.95\,Q_0$

?

$0,95\,Q_0 = Q_0(1-e^{-0,02t}) \quad | :Q_0$

$0,95 = 1-e^{-0,02t} \quad | -0,95 \quad + e^{-0,02t}$

$e^{-0,02t} = 0,05 \quad | \ln$

$-0,02t = \ln(0,05) \quad | :(-0,02)$

$t = \frac{\ln 0,05}{-0,02}$

$t = 150$

Ungleichungen – Exponential Prüfung 2009

Aufgabe 5

a) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $\left(\frac{7}{9}\right)^n < 0,0001$

$\left(\frac{7}{9}\right)^n = 0,0001 \quad | \log$

$n \cdot \lg\frac{7}{9} = -4 \quad | : \lg\frac{7}{9}$

$n = 36,648$

Probe mit 1 $\quad \frac{7}{9} < 0,0001 \quad$ Falsch

37 $\quad \left(\frac{7}{9}\right)^{37} = 0,000091549 < 0,0001$

$n > 36,648$

Ungleichungen – Vorzeichen Gesucht

Nr.9 S.62 gesucht Vorzeichen a|b|c

$a^2b < 0 \longrightarrow b < 0$

$a^3c^2 > 0$

$b^3c > 0 \quad b^3 < 0 \quad c < 0 \quad$ da $-b^3 \cdot -c = +$

b negativ $\quad -a \cdot -a \cdot -a =$ Negativ

$-a \cdot -a =$ Positiv

Quatratische – Betragsungleichung Prüfung 2009

$|x-6| > x^2 - 5x + 9$

$\oplus\; x - 6 = x^2 - 5x + 9$

$= x^2 - 6x + 15$

$x = \frac{6 \pm 36 + 225}{2} \subset \frac{6 \pm \sqrt{24i}}{2}$

$\ominus\; x + 6 = x^2 - 5x + 9 \quad |-6 \quad |-x$

$x^2 - 4x + 3$

$(x-3)\cdot(x-1)$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \qquad x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$

$x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$

$x_2 \quad x_1$

0 1 2 3 4

Probe

$x=0 \rightarrow -6 > 9$ Falsch

$x=2 \rightarrow |-4| > 4-10+9 = 3$

$4 > 3$ Richtig

$x=4 \rightarrow |-2| > 16-20+9 = 5$

$2 > 5$ Falsch

Ergebnis x

Binomische Formeln

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	$1a + 1b$
$(a+b)^2$	$1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3$	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4$	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1a^4$
$(a+b)^5$	$1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
$(a+b)^6$	$1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$

$(a-b)^0$	1
$(a-b)^1$	$1a - 1b$
$(a-b)^2$	$1a^2 - 2ab + 1b^2$
$(a-b)^3$	$1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3$
$(a-b)^4$	$1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1a^4$
$(a-b)^5$	$1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5$
$(a-b)^6$	$1a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15^2b^4 - 6ab^5 + 1b^6$

3te Binomische Formel

$(a+b)\,|\,(a-b)$	a^2-b^2
$(a+b)\,|\,(a+b)$	a^2+b^2
$(a+b)^2\,|\,(a-b)^2$	a^4-b^4
$(a+b)^2\,|\,(a+b)^2$	a^4+b^4

Trinomische Formeln

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Grosse Zahlen Bionomisch berechnen

$10002^5 = (10000+2)^5$ Aufgabe 2 28.10.09

0	5	10000^5	1	1 =	1'000'000'000'000'000'000'000
1	4	10000^4	2^1	5 =	100'000'000'000'000'000
2	3	10000^3	2^2	10 =	40'000'000'000'000
3	2	10000^2	2^3	10 =	8'000'000'000
4	1	10000	2^4	5 =	800'000
5	0	1	2^5	1 =	32
					100'100'040'008'000'800'032

7. Berechne $1'234'567'890^2$ mit binomisch Formel

$(12'345 \cdot 10^5 + 6789 \cdot 10^1)^2$ Ausklammern nach Binomischer Formel

$= 12'345^2 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 12345 \cdot 6789 \cdot 10^6 + 6789^2 \cdot 10^2$

= 1523'990'25 0000'000000'

16 7'620'000'000

4'609'052'100

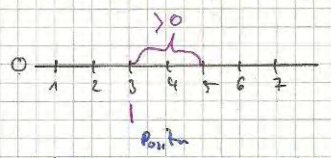
1'524'157'87'5'019'052'100

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ungleichungen – Quadratisch

Quadratische Ungleichungen 15.10.09

Beispiel: $x^2 - 8x + 15 = (x-3)\cdot(x-5) > 0$



L = $x-3>0$ $x-5>0$ Negativ $x-3<0$ $x-5<0$

$x>3$ $x>5$ $x<3$ $x<5$

$x \mid x>5$ $x \mid x<3$

$x \mid x \{ > 5$ oder $< 3 \}$

$L\{3 < x < 5\}$ $L = \{x \in R \mid 3<x<5\}$

Quadratische Ungleichung 16.10

Bei den Wurzeln der Gleichung ändert es für die zugehörige Ungleichung vom „zutreffend" zu falsch

Siehe Seite 75

Aufgabe 1 S.75: $x^2 - 9 \le 0$ → $x^2 - 9 = 0 \quad |+9$

$x^2 = 9 \quad |\sqrt{}$

$x = \pm 3$

$x_1 = -3$

$x_2 = 3$

$L = \{|x| \le 3\}$

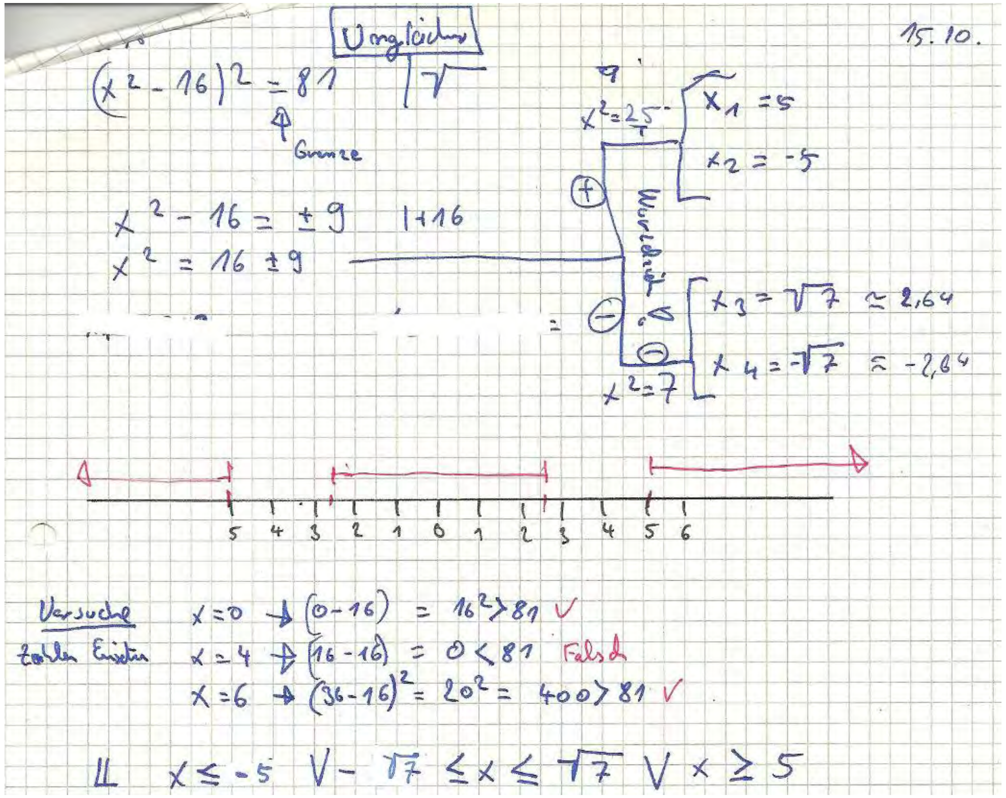
$L = \{-3 \le x < 3\}$

Ungleichungen – Quadratisch

Beispiele für Lösungen

$x^2-9 \leq 0$
$\not\subset=\{-3 < x < 3\}$

$x^2-9 \geq 0$
$\not\subset=\{x < -3 \quad \vee \quad x > 3\}$



Binominalkoeffizienten

x^0 1
x^1 1 1
x^2 1 2 1
x^3 1 3 3 1
x^4 1 4 6 4 1
x^5 1 5 10 10 5 1
x^6 1 6 15 20 15 6 1
x^7 1 7 21 35 35 21 7 1
x^8 1 8 28 56 70 56 28 8 1
x^9 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
x^{10} 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
x^{11} 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

Binominalkoeffizienten berechnen

m	n	$(a)^n$	$(b)^m$	n/k	$(a)^n$ | (b
0	3,4,5 ...				
1	2				
2	1				
3,4,5 ...	0				

Bei $(a-b)^x$ gilt: Vorzeiche bei ungeradem Exponent m Negativ

Beispiel: $(3x-2y)^5$

m	n	$(3x)^n$	$(-2y)^m$	n/k	$(a)^n$ | $(b)^m$ | n/k
0	5	$243x^5$	1	1	$243x^5$
1	4	$81x^4$	$-2y^1$	5	$-810\ x^4\ y^1$
2	3	$27x^3$	$4y^2$	10	$1080\ x^3\ y^2$
3	2	$9x^2$	$-8y^3$	10	$-720\ x^2\ y^3$
4	1	$3x^1$	$16y^4$	5	$240\ x^1\ y^4$
5	0	1	$-32y^5$	1	$-32\ y^5$

$10002^5=(10000+2)^5$
10000^5=4x5 Nullen = 1 & 20 mal die 0

Kombinatorik

Permutation Bedingung n = k

n Objekte in verschiedenen Reihenfolgen anordnen.

$$P_n = n!$$

$$P_w = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!....n_x!}$$

n	= Anzahl Objekte
$n_{1,2,3}$	= Anzahl Wiederholungen

n… Liste der Wiederholungen. Für jede Unterscheidungsmöglichkeit ein n
Wobei die Grösse n die Summe der Gleichen Positionen Entspricht

Variation -> Reihenfolge wichtig!

k Objekte aus einer Menge von n Objekten auswählen.

$$V = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_w = n^k$$

n	= Anzahl Objekte
k	= Anzahl gewählte Objekte

Kombination -> Reihenfolge unwichtig!

k Objekte aus einer Menge von n Objekten auswählen.

$$C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_w = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1}{k!(n-1)!}$$

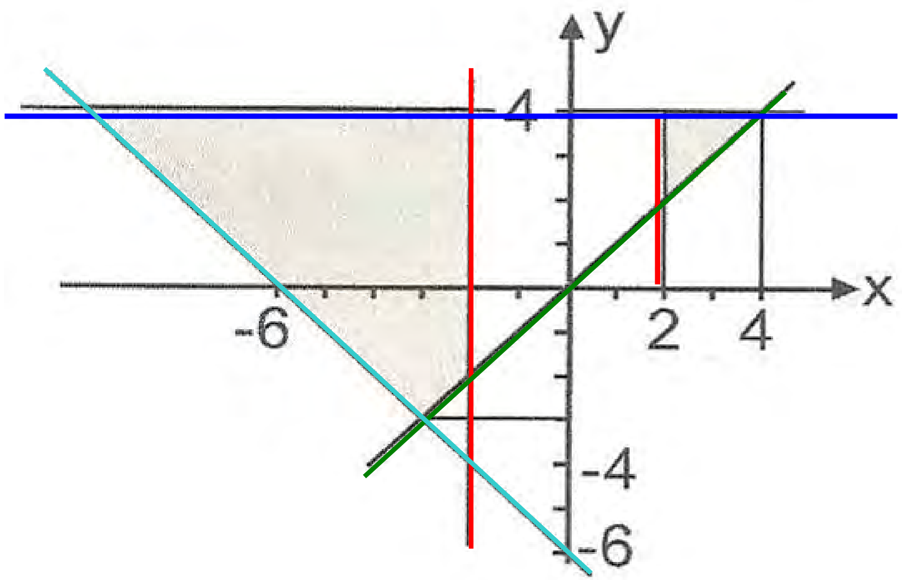
P_w;V_w; C_w = Wiederholungen

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots \rightarrow C = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Ungleichungen - 2Dimensional

17. Stelle die Lösungsmenge des untenstehenden Systems von linearen Ungleichungen graphisch dar.

$|x| > 2$
$y < 4$
$y > x$
$x + y + 6 > 0$



Ungleichungen – 2Dimensional

Seite 15 Nr. 4 Hausaufgabe

① $y + 4 > |x - 3|$

② $x - 5 < 0$

③ $4x - 3y + 12 > 0$

① $y + 4 > \pm(x - 3) \quad | -4$

$y > \pm(x-3) - 4$

1.1 $y > +x - 3 - 4$

$y > x - 7$

$x < y + 7$

1.2 $y > -x + 3 - 4$

$y > -x - 1$

$-x < y + 1 \quad | \cdot (-1)$

$x > -y - 1$

② $x - 5 < 0 \quad | +5$

$x < 5$

③ $4x - 3y + 12 > 0 \quad | -12 \; -4x$

$-3y > -4x - 12 \quad | \cdot -1$

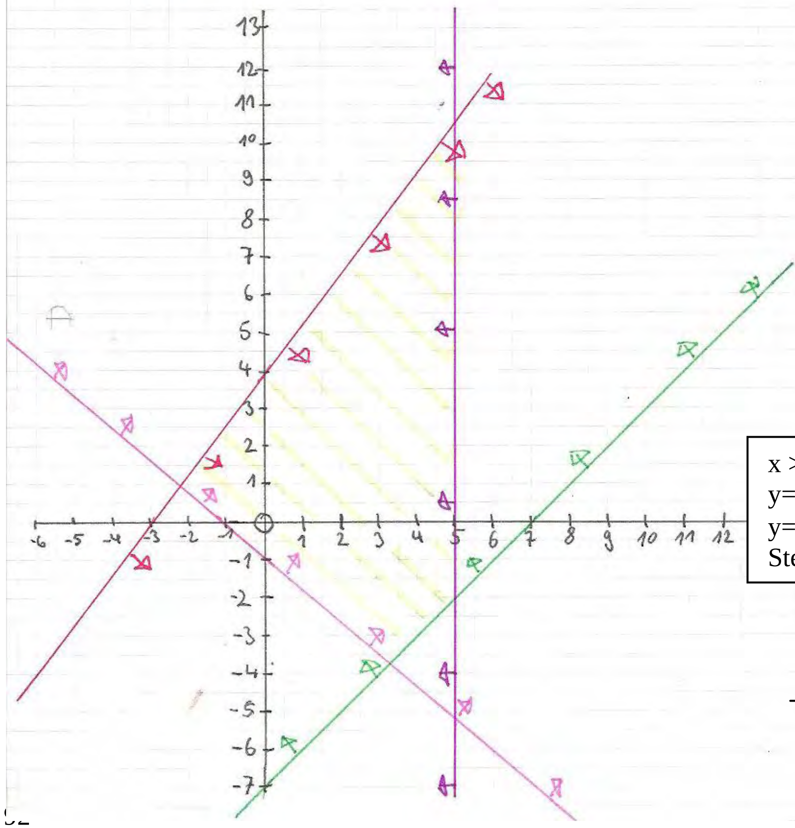
$3y < 4x + 12 \quad | : 3$

$y < \frac{4}{3}x + 4$

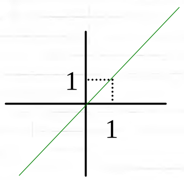
$4x > 3y - 12 \quad | : 4$

$x > \frac{3}{4}y - 3$

Regel: $\cdot(-1)$ ändert die Richtung des Grösser Kleiner Zeichens!



$x > y \quad | \; 1 = 1$
$y = mx + q$
$y = 1 \cdot x + 0$
Steigung m: 1 = 45°



Kombinatorik – Beispiele

25. 36 Karten 4 Spieler Reihenfolge egal wenn man sie gibt

1 Spieler $\binom{36}{9} = \frac{36!}{9!\,27!} \cdot \frac{27!}{9!\,18!} \cdot \frac{18!}{9!\,9!} \cdot \frac{9!}{9!\,0!} = \frac{36!}{(9!)^4}$

2 Spieler $\binom{27}{9}$

3 Spieler $\binom{18}{9}$

4 Spieler $\binom{9}{9}$

24. 26 Pferde

a) 6 schnellsten Pferd Reihenfolge unwichtig! Kombination $\binom{26}{6} = \frac{26!}{20!\,6!}$

b) 4 ersten Reihenfolge! Variation ohne Wiederholung

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$

1 Platz 2 Platz 3 Platz 4 Platz

Kombinatorik – Beispiele

Kombinatorik 27. 1. 10

3. Am alphabet als Briefträger mit 12 Postsendungen vor Wohnblock mit 18 Brief Kästen
Gesucht Anzahl Möglichkeiten wenn

a) 12 identische unadressierte Werbesendungen willkürlich verteilt

$C_W = \frac{(n+k-1)}{(n-1)!\,k!}$ $\quad \frac{(18+12-1)!}{(18-12)!\,12!}$ $\quad n = 18$, $K = 12$ $\quad \frac{29!}{17!\cdot 12!} = 51895935$

b) 12 Adressierte Briefe willkürlich verteilt mit wiederholung

$V_W = 18^{12} = 1{,}156831381 \cdot 10^{15}$

c) 12 Adressierte Briefe willkürlich ohne Wiederholung
max 1 Brief pro Kasten

$V = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad \frac{18!}{(18-12)!} = 8{,}892185702 \cdot 10^{12}$

4. Gruppe von 11 Touristen checkt in ein Hotel ein. Portier verteilt willkürlich an jeden Hotelgast einen Schlüssel und zwar

3 gleiche von Dreizimmer
2 x 2 " vom zwei Zimmer
4 unterschiedlich für Einzelzimmer
Gesucht Anzahl möglichkeiten

$P_W = \frac{11!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!}$

Ungleichungen - Betragsungleichung

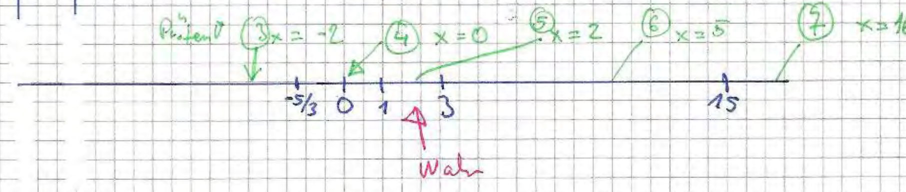
Nr. 3, S. 74 28.10.09

Achtung Üben !

c) $|x+3| + |2x-5| < 7$

① ②

+	+	$x+3+2x-5 = 7 \rightarrow 3x-2 = 7 \xrightarrow{+2} 3x = 9 \xrightarrow{:3} x = 3$
+	-	$x+3-2x+5 = 7 \rightarrow -x+8 = 7 \quad x = 1$
-	+	$-x-3+2x-5 = 7 \rightarrow x-8 = 7 \xrightarrow{+8} x = 15$
		$-x-3-2x+5 = 7 \rightarrow 3x+2 = 7 \xrightarrow{-2} -3x = 5 \xrightarrow{:3} x = -5/3$



③ $|-2+3| + |2\cdot(-2)-5| = 1 + 9 = 10 > 7$

④ $|3| + -5 = 8 > 7$

⑤ $|2+3| + |2\cdot 2 - 5| \rightarrow 5+1 = 6 < 7$ Wahr!

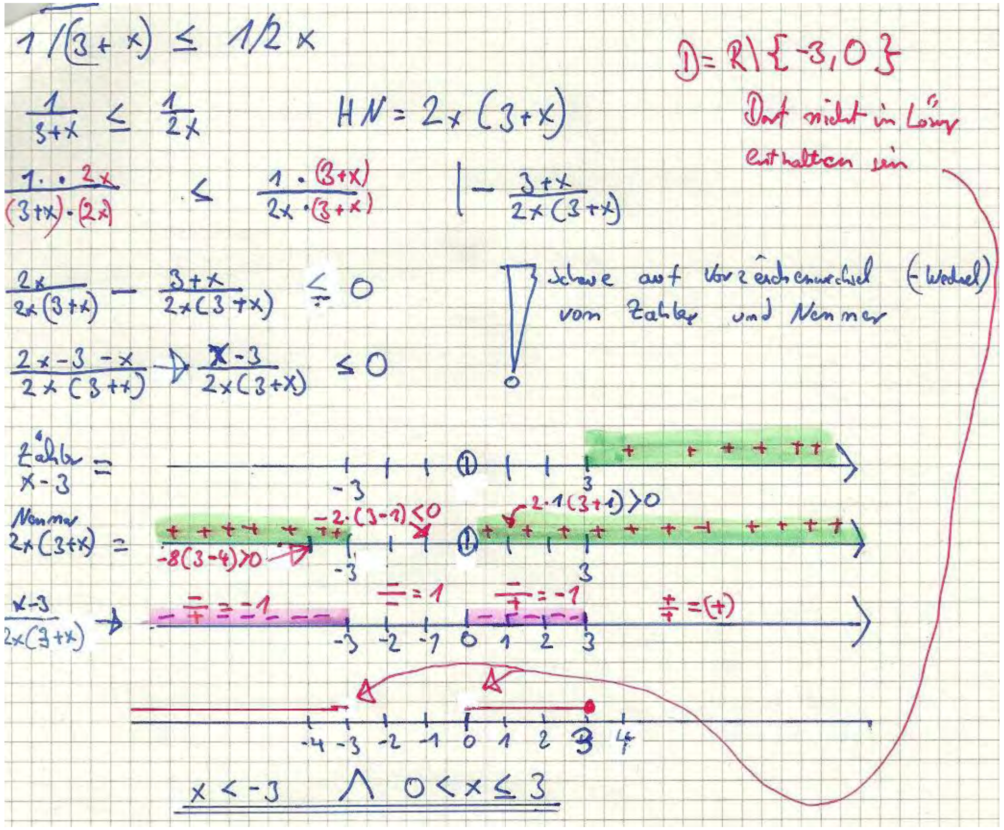
⑥ $|5+3| + |2\cdot 5 - 5| = 8 + 5 = 13 > 7$

⑦ $|16+3| + |2\cdot 16 - 5| = 19 + 27 = 46 > 7$

Muss kleiner Als 7 sein!

$\mathbb{L} \quad x < x < 3$

Ungleichungen – Brüche



Lineare Gleichungssysteme

Quadrieren erzeugt scheinlösungen

x=-3 -> L = {-3 }

x^2=9 -> L = {-3,3 }

Beim Wurzelziehen Verschwindet Lösung

x^2=5x -> L = {0;5 }

x=5 -> L = {5 }

Wurzel + Brüche in Gleichung

$$\left|\sqrt{x^2+y}=3\right| \rightarrow Quadrieren \rightarrow x^2+y=9$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2x-1}=1 \\ \dfrac{x-y}{y}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2x-1}=\dfrac{2x-1}{2x-1} \\ \dfrac{2(x-y)}{2y}=\dfrac{y}{2y} \end{array}\right| D_x = R\setminus\{1/2\} \quad D_y=R\setminus\{0\}$$

Lineare Gleichungssysteme

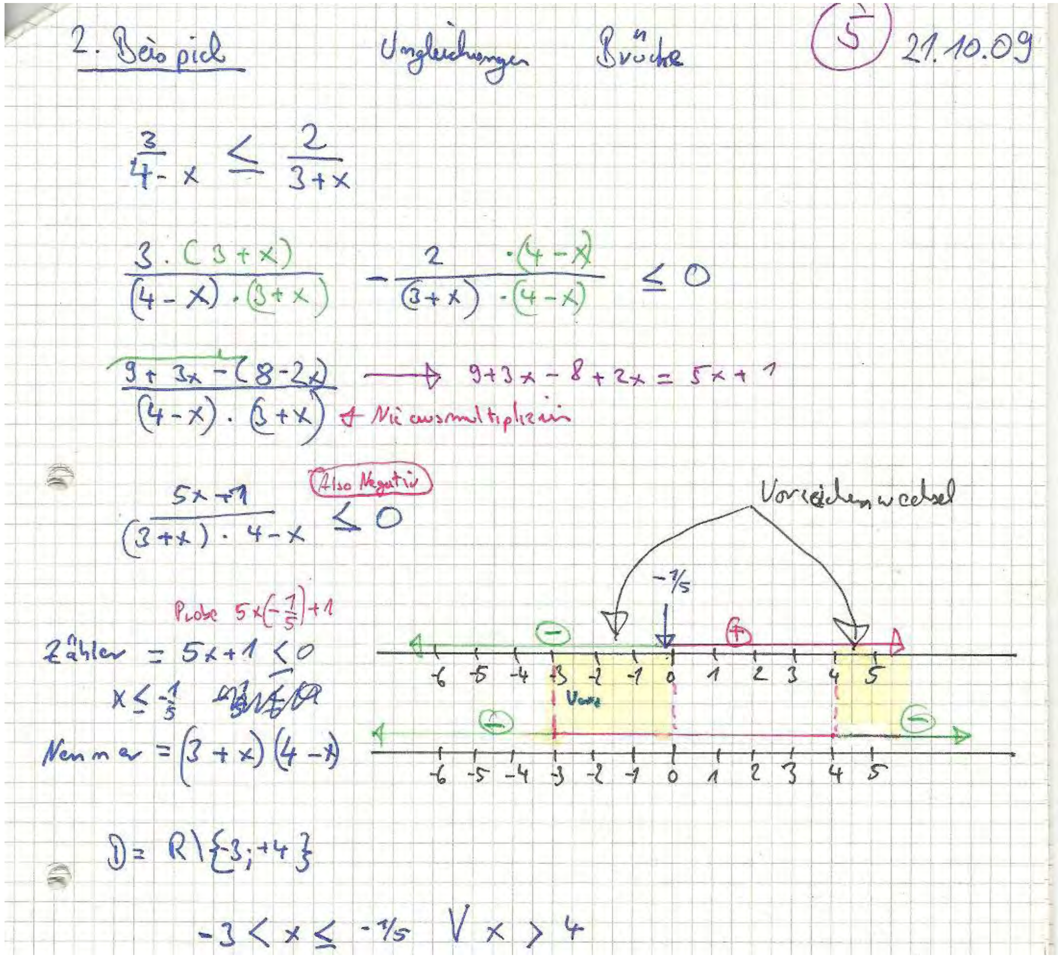
Gleichsetzungsverfahren

1. Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auf.
2. Setze die anderen Seiten der Gleichungen einander gleich.
3. Löse die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.
4. Setze die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein und berechne so die andere Variable.

Einsetzungsverfahren

1. Löse eine Gleichung nach einer Variablen auf.
   (Eventuell liegt eine gegebene Gleichung schon passend vor. Verfahre sonst so, daß du möglichst keine oder zumindest "einfache" Brüche erhältst.)
2.
3. Setze den Term für diese Variable in die andere Gleichung ein.
4.
5. Löse die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.
6.
7. Setze die Lösung in die umgeformte Gleichung aus Schritt 1 ein und berechne so die andere Variable.

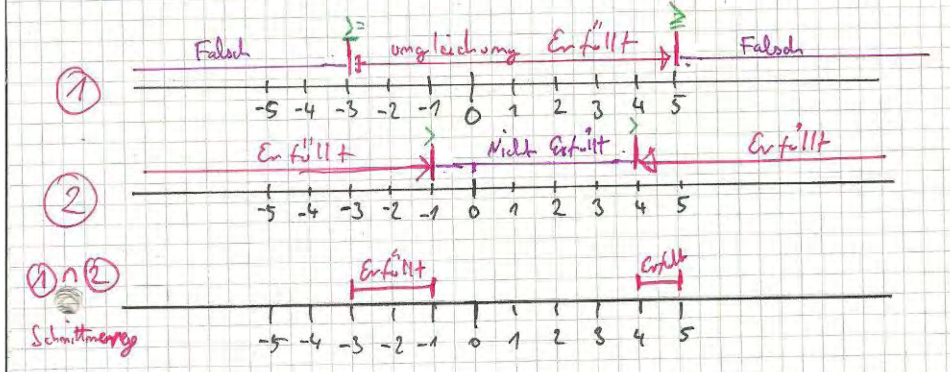
Ungleichungen – Brüche



Ungleichungen – Lineare Systeme

Aufgabe 2 Seite 76 — Bestimme Gültigkeitsbereich auf reeller Zahlengerade — ③ — 21.10.0

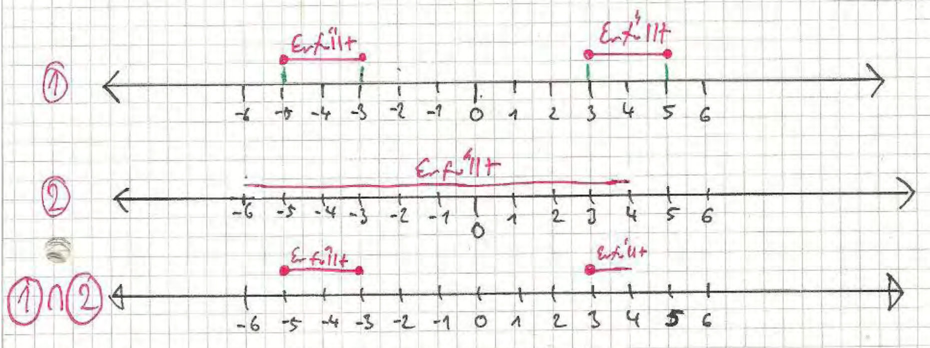
$$\left|\begin{array}{l} x^2-2x-15 \le 0 \\ x^2-3x-4 > 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l} (x-5)\cdot(x+3) \le 0 \quad ① \\ (x-4)\cdot(x+1) > 0 \quad ② \end{array}\right|$$



$$-3 \le x < -1 \vee 4 < x \le 5$$

Aufgabe 3 S. 76

$$\left|\begin{array}{l} (x^2-25)(x^2-9) \le 0 \\ x^2+2x-24 < 0 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} ①\ (x+5)\cdot(x-5)\cdot(x+3)\cdot(x-3) \le 0 \\ ②\ (x+6)\cdot(x-4) < 0 \end{array}\right|$$



$$-5 \le x \le -3 \vee 3 \le x < 4$$

Lineare Gleichungssysteme

Additionsverfahren

1. Beide Gleichungen so umformen, daß die Variablen (mit ihren Faktoren) auf einer Seite (links) vom Gleichheitszeichen stehen und auf der anderen Seite (rechts) eine einzelne Zahl.
2. Suche jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache der Faktoren vor x und vor y.
   Wähle die Variable aus, bei der das kleinere kgV auftritt, und multipliziere beide Gleichungen so, daß vor dieser Variablen jeweils gleiche Faktoren stehen (das ist dann nämlich das kleinste gemeinsame Vielfache).
   Man kann auch ohne Umschweife die erste Gleichung mit dem Faktor vor dem x der zweiten Gleichung multiplizieren und umgekehrt.
3. Falls die (betragsmäßig gleichen) Faktoren das selbe Vorzeichen haben, dann subtrahiere die Gleichungen voneinander. Wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben, dann addiere sie.
   Dies geschieht komponentenweise, d.h. die Faktoren vor x werden untereinder addiert, die Faktoren vor dem y (oder entsprechenden anderen Variablen), und die einzelnen Zahlen werden für sich behandelt.
4. Dadurch entsteht eine Gleichung mit nur einer Variablen. Diese wird nun durch normale Äquivalenzumformungen nach der Variablen aufgelöst
5. Erhaltene Wert in die Ursprüngliche Gleichung Einsetzen. Es Ensteht eine Gleichung mit einer Unbekannten
6. Probe mit beiden Gleichungen

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe

I   3x + 9y - 2z = -1
II   2x - 3y + 4z = 1
III   x - 3y + 3z = -1

Lösungsschritte:

Gleichung II wird mit (3) multipliziert und mit der Gleichung I addiert

$$
\begin{array}{llrcl}
 & \text{I} & 3x + 9y - 2z & = & -1 \\
+ & \text{II} & 6x - 9y + 12z & = & 3 \\
\hline
 & \text{IV} & 9x + 10z & = & 2
\end{array}
$$

Gleichung III wird mit (3) multipliziert und mit der Gleichung I addiert:

$$
\begin{array}{llrcl}
 & \text{I} & 3x + 9y - 2z & = & -1 \\
+ & \text{III} & 3x - 9y + 9z & = & -3 \\
\hline
 & \text{V} & 6x + 7z & = & -4
\end{array}
$$

Übrig bleiben also die IV und V Gleichung:

IV   9x + 10z = 2
V   6x +   7z   = -4

Nun Gleichung IV mit (2) multiplizieren und Gleichung V mit (-3) multiplizieren und dann anschließend addieren:

$$
\begin{array}{llrcl}
 & \text{IV} & 18x + 20z & = & 4 \\
+ & \text{V} & -18x - 21z & = & 12 \\
\hline
 & & -z & = & 16
\end{array}
$$

also z = -16

Nun z = -16 in IV Gleichung einsetzen:

18x + 20*(-16) = 4   x = 18

Nun z = -16 und x=18 in die I (oder II oder III) Gleichung einsetzen:

3*18 + 9y - 2*(-16) = -1   y = - 29/3 (= -9,67)

Logarithmengleichungen Prüfung 2009

b) $x = ?$

$\ln(x-1) = 3 - \ln(x-2) \quad | + \ln(x-2)$

$\ln(x-1) \cdot \ln(x-2) = 3$

$\ln[(x-1)\cdot(x-2)] = 3$

$\ln[x^2 - 3x + 2] = 3 \quad | e^{\cdots}$

$x^2 - 3x + 2 = e^3$

$x^2 - 3x + 2 = 20{,}0855$

$x^2 - 3x + 2 - e^3 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2 - e^3)}}{2}$$

$D = 9 - 8 + 4e^3 = 4e^3 + 1$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{4e^3 + 1}}{2} = \underline{\underline{x_1 = 6{,}0095}} \quad x_2 = -3{,}0095 = \notin D$

Probe: $\ln(5.0095) = 3 - \ln 4.0095$

$1{,}611336 = 1{,}611336$

Ungleichungen - Linear

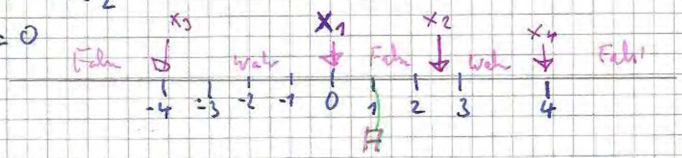
Nr. 10 b)

$x \cdot (2x - 5) \cdot (x^2 - 16) \leq 0$

$0 \leq \frac{-5}{2} = +2{,}5 \quad (x+4)\cdot(x-4) \longrightarrow x_{3,4} \ \pm 4$

$x_2 = \frac{5}{2}$

$x_1 = 0$



A $x = 1 \quad 1 \cdot (2-5) \cdot (1-16)$

Gültigkeit mit Probe im Zwischenraum testen.

$x = 3 \quad 3 \cdot 1(-7) \leq 0$

$x = 5 \quad 5 \cdot (2 \cdot 5 - 5) \cdot (5^2 - 16)$

$-4 \leq x \leq 0 \ \vee \ 5/2 \leq x < 4$

Logarithmengleichungen Prüfung 2008

2

$$\lg(z^2) + \lg(z^{1/3}) = 2(\lg(z))^2$$

$$\lg(z^2 \cdot z^{1/3}) = 2[\lg z]^2$$

$$\lg(z^{\frac{6}{3}} \cdot z^{1/3})$$

$$\lg(z^{\frac{7}{3}}) = 2[\lg z]^2 \quad | \cdot 3$$

$$\lg z^7 \rightarrow 7 \cdot \lg z = 6[\lg z]^2 \qquad u = \lg z$$

$$7u = 6u^2 \quad | -7u$$

$$0 = 6u^2 - 7u$$

$$0 = u(6u - 7)$$

$$u = 0 \rightarrow z_1 = 10^0 = 1$$

$$6u - 7 = 0 \quad | +7 \; :6$$

$$u = \frac{7}{6}$$

$$z_2 = 10^{7/6} = 14{,}678$$

Lineare Gleichungssysteme

c)
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2x-1} = 1 \\ \dfrac{x-y}{y} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right| \qquad \begin{array}{ll} \dfrac{x+y}{2x-1} = \dfrac{2x-1}{2x-1} & (1) \\ \dfrac{2(x-y)}{2y} = \dfrac{y}{2y} & (2) \end{array}$$

$$D_x = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$$

$$D_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(1) \xrightarrow{-y} y = \boxed{x - 1}$$

$$(2) \longrightarrow 2x - 2y = y \quad | +2y$$

$$2x = 3y \quad | :3$$

$$\frac{2}{3}x = y$$

$$\frac{2}{3}x = \boxed{x - 1}$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{3x-3}{3} \rightarrow 2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$$

$$y = x - 1 = 2$$

Lineare Gleichungssysteme - Beispiele

S. 107 76

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 15 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{y} = 5\end{array}\right|$$

Substitution: $u = \sqrt{x+1}$

$v = \sqrt{y}$

$$\begin{array}{ll} u + v = 15 & \\ u - v = 5 & \\ \hline 2u = 20 & | :2 \\ u = 10 & \end{array}$$

$v = 15 - u = 15 - 10 = 5$

$u = \sqrt{x+1} = 10$ Quadr.

$x + 1 = 100 \quad | -1$

$x = 99$

$v = \sqrt{y} = 5$

$y = 25$

Probe $\sqrt{100} + \sqrt{25} = 15$

$\sqrt{100} - \sqrt{25} = 5$

Umformung

d) $$\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+y} = 3 \\ 2x^2 - y = 3\end{array}\right| \xrightarrow{\text{Quadrieren}}$$ Probe!

$$\begin{array}{ll} x^2 + y = 9 & \\ 2x^2 - y = 3 & \\ \hline 3x^2 = 12 & | :3 \end{array}$$

$x^2 = 4 \quad x = \sqrt{4} \quad x_1 = +2 \quad x_2 = -2$

$y = 2x^2 - 3 = 1$

$y = 8 - 3 = 5$

B

1. Lösung $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 5 \end{cases}$

2. Lösung $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 5 \end{cases}$

Logarithmengleichungen

26 g) $2 \log_a (2x) - \log_a (6 + 10x) = 0$

$\log_a ((2x)^2) = \log_a (6 + 10x) \quad | a^{\cdots}$

$4x^2 = 6 + 10x \quad | :2$

$2x^2 = 3 + 5x$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{5 \pm 7}{4}$

Richtig $x_1 = 3$

falsch $x_2 = -1/2$ Achtung geht nicht

$2 \log_a 6 - \log_a 36 = 0$

$L = \{3\}$

Logarithmengleichungen

Aufgabe 26 e S.5 (3) 11.11.09

c) $\log_2 16^x + \log_5 25^{x^2} = 16$

$x \cdot \log_2 16 + x^2 \cdot \log_5 25 = 16$

Wechsel in 10log

$\log_2 16 = \frac{\lg 16}{\lg 2} = 4$

$\log_5 25 = \frac{\lg 25}{\lg 5} = 2$

$4x + 2x^2 = 16 \quad |:2$

$2x + x^2 = 8 \quad |-8$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

$x_1 = -4 \quad x_2 = +2$

d) $6 \lg \sqrt{x+1} + \lg 1 = 2 + \lg(x+1)$

$6 \lg (x+1)^{1/2} + \lg 1 = 2 + \lg(x+1)$

$6 \cdot \frac{1}{2} \lg(x+1)$

$3 \lg(x+1) = 2 + \lg(x+1) \quad |-\lg(x+1)$

$2 \lg(x+1) = 2 \quad |:2$

$\lg(x+1) = 1 \quad |10^{\cdots}$

$x+1 = 10^1 = 10 \quad |-1$

$x = 9$

Probe: $6 \lg \sqrt{9+1}$

$2 \lg(x+1) = 1 \quad |:2$

$(x+1) = \frac{1}{2}$

Lineare Gleichungssysteme- Beispiele

(1) $2x + 3y - 2z = 4$

(2) $2x + 4y - z = 9$

(3) $x + 4y + z = 13$

$\boxed{3x + 8y = 22}$

$\cdot 2$: $2x + 8y + 2z = 26$

$2x + 3y - 2z = 4$

$4x + 11y = 30$

$3x + 8y = 22 \xrightarrow{\cdot 4} 12x + 32y = 88$

$4x + 11y = 30 \xrightarrow{\cdot 3} 12x + 33y = 90$

$-y = -2 \quad |\cdot(-1)$

$y = 2$

$-8y \rightarrow 3x = 22 - 8y = 22 - 16 = 6 \xrightarrow{:3} x = 2$

$2x + 4y - 9 = z \rightarrow z = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 9 = 3 \quad z = 3$

Lineare Gleichungssysteme-Prüfung 2008

Lösen sie folgendes Gleichungssystem nach X und y auf:

Aufgabe 2:

$$① \; ax + by - a^2 + b^2 = 0 \xrightarrow{-by + a^2 - b^2} ax = -by + a^2 - b^2 \quad |:a$$

$$② \; bx - ay - 2ab = 0 \xrightarrow{+ay + 2ab} bx = ay + 2ab \quad |:b$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \; x = -\frac{b \cdot y}{a} + a - \frac{b^2}{a} \\ ② \; x = \frac{a \cdot y}{b} + 2a \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{by}{a} + a - \frac{b^2}{a} = \frac{ay}{b} + 2a \quad \left| -2a + \frac{by}{a} \right.$$

$$-a - \frac{b^2}{a} = \frac{ay}{b} + \frac{by}{a} \quad |\text{Hauptnenner} = ab$$

$$\frac{-a^2 b}{ab} - \frac{b^3}{ab} = \frac{a^2 y}{ab} + \frac{b^2 y}{ab}$$

$$-a^2 b - b^3 = a^2 y + b^2 y$$

$$-b(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\, y \quad |: a^2 + b^2$$

$$\underline{\underline{-b = y}}$$

$$x = \frac{a \cdot (-b)}{b} + 2a \qquad \text{Einsetzen}$$

$$x = -a + 2a$$

$$\underline{\underline{x = a}}$$

Logarithmengleichungen

$$\lg(x+1) + \lg(x-2) = \lg 28$$

$$\lg\left[(x+1)\cdot(x-2)\right] = 28 \quad | \text{ Antilog}$$

$$x^2 - 2x + x - 2 = 28$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)\cdot(x+5) = 0$$

$x_1 = -5$ Falsch siehe Probe

$x_2 = 6$ Richtig

Probe: $x_1 = -5 \rightarrow \lg(-4) + \lg(-7) = \lg 28$ keine Lösung

$x_2 = 6 \rightarrow \lg(7) + \lg 4 = \lg 28$ ✓

1\. $\lg x - \lg(x+1) = -1$

$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$

$\lg a \cdot b = \lg a + \lg b$

Umkehrfunktion

$$\lg \frac{x}{x+1} = -1 \quad | \; 10^{\cdots}$$

$$\frac{x}{x+1} = 10^{-1} = 0{,}1$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{0{,}1 \cdot (x+1)}{x+1}$$

$$x = 0{,}1x + 0{,}1 \quad | -0{,}1x$$

$$0{,}9x = 0{,}1 \quad | :0{,}9$$

$$x = 1/9$$

Probe: $\lg \frac{1}{9} - \lg \frac{10}{9} = -1$

2.) $3 \cdot \lg x - 1/2 \lg x = 2$ Gesetz $\lg a^b = b \cdot \lg a$

$$\lg x^3 - \lg x^{1/2} = 2$$

$$\lg \frac{x^3}{x^{1/2}} = \lg x^{5/2} = 2 \quad | \; 10^{\cdots}$$

$$x^{5/2} = 10^2 = 100$$

$$(x^{5/2})^{2/5} = x = 100^{0,4} = 6{,}30957$$

Vermutlich Falsch

3 Wurzel

$\sqrt[3]{100} = 4{,}6415$

Logarithmengleichungen

Verhältnisse

$$\lg 1 = 0 \qquad \log_e X = \ln x$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_{10} X = \lg x$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\sqrt{\lg x} = \frac{1}{2} \lg x \qquad 3e^{-x} = \frac{3}{e^x}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$$

Basiswechsel

Von a nach b
Normal b=10

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Bruchgleichungen

mit Lösungsvariable im Nenner

1 Definitionsmenge festlegen

- bei Bruchgleichungen z.b. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+a} + \frac{5}{x-3} = \frac{4}{x^2}$ $\wp = \nabla \setminus \{0; -a; +3\}$

2 Hauptnenner festlegen und gleichnahmig machen
3 Hauptnenner weglassen und Nun Zähler auflösen
4 Definitionsmenge vergleichen

Nr. 19

a) $\frac{1}{x+4} = \frac{1}{3x}$ HN $3x \cdot x+4$

$D_x = R \setminus \{-4, 0\}$

$\frac{3x}{3x(x+4)}$ $\frac{x+4}{3x(x+4)}$

$3x = x+4 \quad | -x$

$2x = 4 \quad | :2$

$\underline{\underline{x = 2}}$

b) $\frac{3}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$ $D_x = R \setminus \{-3 \quad +3\}$

HN x^2-9

$\frac{3 \cdot (x+3)}{x^2-9} - \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9}$

$3x+9 - x+3 = 6$

$2x + 12 = 6 \quad | -12$

$2x = -6 \quad | :2$

$x = -3 \quad = \notin D$ = keine Lösung !

Nullgleichungen

Nullgleichung

a) $(x^3-4x)\cdot(x-a+b)=0$

$x\cdot(x^2-4)\cdot(x-a+b)=0$

$x\cdot(x^2-4)\cdot(x-a+b)=0$

x-a+b=0 |+a-b
$x_{4=}$a-b

x^2-4=0 |-4
x^2=4 | Wurzel ziehen
$x_{2=}$2
$x_{3=}$-2

x=0

---

b) $\sqrt{4x^2-9}\cdot(x^2-b^4)=0$

$\sqrt{(2x+3)(2x-3)}\cdot(x+b^2)(x-b^2)=0$

$\sqrt{(2x+3)}\sqrt{(2x-3)}\cdot(x+b^2)(x-b^2)=0$

L= $x_1=\sqrt{-\frac{3}{2}};x_2=\sqrt{\frac{3}{2}};x_3=-b^2;x_4=b^2$

---

c) $\left(\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(4x^2-9\right)=0$

$\left(\frac{x-3}{x+3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{x-3}{x+3}-\frac{1}{4}\right)\cdot(2x+3)\cdot(2x-3)$

1. gleichnahmig machen mir (x+3) | 4
2. Definitionsmenge festlegen + kontrollieren !
3. Nenner weglassen und nur mit Zähler rechnen

Exponentialgleichungen Typ C
Mit 2 unbekannten im Exponenten

27.1.10

8. $3^{x+y}\cdot 3^{2x}=81$
$5^{2x-1}\cdot 25^{1-y}=125$

$3^{3x+y}=3^4$

$5^{2x-1}\cdot 5^{2(1-y)}=5^3 \rightarrow 5^{2x-1+2-2y}\rightarrow 5^{2x-2y+1}=5^3$

① $3x+y=4$
② $2x-2y+1=3$ |-1
$2x-2y=2$ |:2
$x-y=1$
$3x+y=4$
$4x=5$ |:4
$x=\frac{5}{4}=\underline{\underline{1\frac{1}{4}}}$
$y=x-1=\underline{\underline{1/4}}$

Exponentialgleichungen Typ B schwer

Nr. 4 Seite 39 17.11.09

$$18\cdot\underbrace{4^x}_{2^x\cdot 2^x} - 35\cdot\underbrace{6^x}_{2^x\cdot 3^x} + 12\cdot\underbrace{9^x}_{3^x\cdot 3^x} = 0 \quad \Big|: 2^x\cdot 2^x$$

$$18 - 35\,\frac{\cancel{2^x}\cdot 3^x}{\cancel{2^x}\cdot 2^x} + 12\cdot\overbrace{\frac{3^x\cdot 3^x}{2^x\cdot 2^x}}^{u^2} = 0$$

$$u = \frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$12u^2 - 35u + 18 = 0$$

$$\frac{+35 \pm\sqrt{35^2-4\cdot 12\cdot 18}}{2\cdot 12}$$

$$\frac{+35 \pm 19}{24}$$

$x_1 = 2{,}25 = \frac{9}{4}$

$x_2 = \frac{2}{3}$

$$\frac{9}{4} = 2{,}25 = \frac{3^x}{2^x}$$

$$\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} \quad |\lg$$

$$x_1\cdot\lg\frac{3}{2} = \lg\frac{9}{4} \quad \Big|:\lg\frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{\lg 9/4}{\lg 3/2} = 2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3^x}{2^x}$$

$$\frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$$

$$x_2\cdot\lg\frac{3}{2} = \lg\frac{2}{3} \quad \Big|:\lg\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\lg 2/3}{\lg 3/2} = -1$$

Nullgleichungen

$$\underbrace{\left[\sqrt{x+12}-x\right]}_{①}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x-1}\right]}_{②} = 0$$

$|+x$

$$\sqrt{x+12} = x \quad |\text{quad}$$

$$x+12 = x^2$$

$$x^2 - x - 12 = (x-4)\cdot(x+3)$$

$\rightarrow x_1 = 4$ $\quad x_2 = -3$ ↯ Scheinlösung

Probe: $x_1 = 4 \rightarrow \sqrt{16}-4=0$

$x_2 = -3 \rightarrow \sqrt{9}-(-3)\neq 0$

② $$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2x-1} \qquad HN\ (x+1)\cdot(2x-1)$$

$$\frac{2x-1}{HN} = \frac{x+1}{HN}$$

$$2x-1 = x+1 \quad |-x+1$$

$$x_3 = 2$$

$$L = \{2, 4\}$$

Betragsfunktionen

Musterprüfung 12 28.10.09

10. a) $|\underbrace{2x+3}_{①}| - |\underbrace{x-3}_{②}| = 10$

+ +	$2x+3 - x+3 = 10$	$\rightarrow x+6=10 \quad |-6 \rightarrow x=4$
+ −	$2x+3 + x-3 = 10$	$\rightarrow 3x \quad |:3 = x = 3\frac{1}{3}$
− +	$-2x-3 - x+3 = 10$	$\rightarrow -3x \quad |:3 = -x = 3\frac{1}{3}\cdot -1 = -3\frac{1}{3}$
− −	$-2x-3 + x-3 = 10$	$\rightarrow -x-6=10 \quad |+6 \rightarrow -x=16 = x=-16$

① $|2\cdot 4+3| - |4-3| = 10$ ✓

$|2\cdot 3\frac{1}{3}+3| - |3\frac{1}{3}-3| = 10$ f

$|2\cdot -3\frac{1}{3}+3| - |3\frac{1}{3}-3| = 10$ f

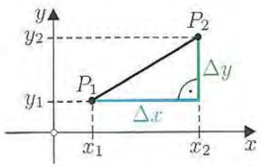
$|2\cdot -16+3| - |-16-3| = 10$ ✓

29

Alles was im Betragszeichen steht ist immer Positiv !

Analytische Geometrie

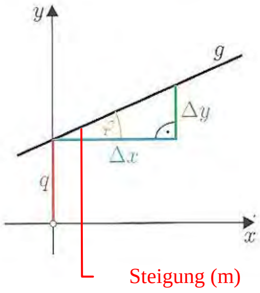
Abstand zweier Punkte	$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$



Geradengleichungen

Normalform (explizite Form)	$g\colon\ y = mx + q$
	Steigung $m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\varphi$

Δx heisst Horizontaldifferenz
Δy heisst Vertikaldifferenz
q heisst y-Achsenabschnitt
φ ist der Steigungswinkel



eine Lösung:			
g1Xg2	beide verlaufen nicht parrallel zueinander	$m_1 \neq m_2$	Schnittpunkt einen
keine Lösung:			
g1||g2	beide verlaufen parrallel zueinander	$m_1 = m_2$ $q \neq q$	Schnittpunkt keinen
unendlich viele Lösungen:			
g1=g2	beide verlaufen genau am selben Ort	$m_1 = m_2$ $q=q$	Schnittpunkt unendlich

Normalform (Formel)
g: y=mx+q

Steigungswinkel
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

Andert sich die gerade um 90° dann ändert sich der Wert m um (-1/m) Beispiel m =2 -> -1/2

Was tun wenn der Wert m fehlt ?
z.b. y = x-b dann ist m = 1 -> y =1x-b

m>0 steigende Gerade
m=0 horizontale Gerade
m<0 fallende Gerade

Exponentialgleichungen Typ B schwer

Aufgabe 5 ZLSAP S. 48 17.11.09

$5^{x+3} = 40 + 375 \cdot 25^{x-1}$ $\quad 25^{x-1} = 25^x \cdot 25^{-1} = \frac{25^x}{25} = \frac{(5\cdot5)^x}{25}$ $\quad 25^{-1} = 1/25$

$5^{x+3} = 40 + 375 \cdot 5^{x-1} \cdot 5^{x-1}$ $\quad \frac{5^x \cdot 5^x}{25}$ $\quad (a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$\frac{5^x}{5} \cdot \frac{5^x}{5} = \frac{(5^x)^2}{25}$

$5^x \cdot 5^3 = 125 \cdot 5^x$

$125 \cdot 5^x = 40 + 15 \cdot (5^x)^2 \quad | \quad u = 5^x$

$125\,u = 40 + 15\,u^2 \quad | :5$

$25\,u = 8 + 3\,u^2 \quad | -25u$

$0 = 3u^2 - 25u + 8$

$\frac{+25 \pm \sqrt{25^2 - 4\cdot 8\cdot 3}}{2\cdot 3} \rightarrow \frac{+25 \pm 23}{6} \rightarrow x_1 = 8 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 \rightarrow 8 = 5^x \quad | \lg$

$\lg 8 = x \cdot \lg 5 \quad | : \lg 5$

$1{,}2920 = x$

$x_2 \rightarrow \frac{1}{3} = 5^x \quad | \lg$

$\lg \frac{1}{3} = x \cdot \lg 5 \quad | : \lg 5$

$-968260 = x$

Exponentialgleichungen Typ B

LuS Aufgabe 2 S.57 17.11.09

a) $9^x - 2\cdot 3^x - 11 = 0$ $\quad (3^x) = u$

$(3\cdot 3)^x$

$3^x\cdot 3^x$

$(3^x)^2$

$u^2 - 2u - 11 = 0$

$\frac{2\pm\sqrt{4+11\cdot 4}}{2} = \frac{2\pm 6{,}9282}{2} = u_1 = 4{,}4641 \qquad u_2 = -2{,}4641$ falsch

$4{,}4641 = (3^x) \quad | \lg$

$\lg 4{,}4641 = \lg 3\cdot x \quad | :\lg 3$

$\underline{\underline{1{,}36177 = x}}$

b) $x^{\lg x} - x\cdot 10^{12} = 0 \quad | + x\cdot 10^{12}$

$x^{\lg x} = x\cdot 10^{12} \quad | \lg$

$\lg x\cdot \lg x = \lg x + 12\cdot \cancel{\lg 10}$

$\lg x^2 = \lg x + 12 \qquad \lg x = u$

$u^2 = u + 12 \quad | -u - 12$

$u^2 - u - 12 = 0$

$\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 12}}{2} \quad \frac{1\pm 7}{2} \quad u_1 = 4 \quad u_2 = -3$

$u_1 \quad 4 = \lg x \quad | \lg \rightarrow 10^4 \quad 10000$

$u_2 \quad -3 = \lg x \quad | \lg \rightarrow 10^{-3} \quad 0{,}001$

Analytische Geometrie

Punkt-Richtungsgleichung

Formel: g: $y = mx + y_1 - mx_1$

Gegeben: g_2: $y_2 = mx_2 + q$ $\qquad P_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Einsetzen-> g_1: $y = mx + y - mx$

Ausrechnen->g_1: $\underline{\underline{y = mx + q}}$

Koordinatengleichung

ax+by+d = 0 oder ax+by = 0

Weitere Formeln:

Strecke AB berechnen:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Mittelpunkt Strecke AB als Koordinaten:

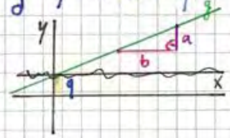
$$X_M = \tfrac{1}{2}(X_A + X_B) \qquad Y_M = \tfrac{1}{2}(Y_A + Y_B)$$

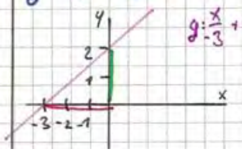
Analytische Geometrie

Darstellungsmöglichkeiten

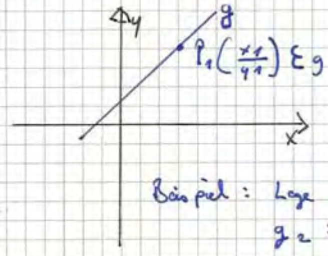
Darstellungsmöglichkeiten

Koordinatengleichung	Normalform	Achsenabschnittgleichung
$g: ax + by + c = 0$	$g: y = mx + q$	$g: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
Wenn a fehlt dann nimmt man für $a = 1$		$g: \frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$





Punkt-Richtungsgleichung



$P_1\binom{x_1}{y_1} \in g$

$g: y = mx + y_1 - mx_1$

Beispiel: Lege eine Gerade g_1 durch $P\binom{3}{-2}$ die senkrecht zu $g_2: 3x - 2y + 7 = 0$ steht

$mx + y_1 - mx_1$

$+2y$

$g_2: 2y = 3x + 7 \quad |:2$

$g_2: y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

$g_1: y = mx + \underbrace{(-2)}_{y_1} - m \cdot \underset{x_1}{3}$

Weil g_1 senkrecht zu g_2 gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$

$\frac{3}{2}m = -1 \quad |\cdot \frac{2}{3}$

$m = -\frac{2}{3} \quad |$ Einsetzen in g_1

$g_1: y = -2x - 2 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 3$

$y = -2x - 2 + 2$

$y = -\frac{2}{3}x$

Exponentialgleichungen Typ B

Seite 2 Nr. 5

$2^{x+4} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 2^{3x} = 0$

$2^x \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^{2x} \cdot 2 - 2^{3x} = 0$

$16 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} - 2^{3x} = 0$ Substitution $u = 2^x$

$16 \cdot 2^x - 6 \cdot (2^x)^2 - (2^x)^3 = 0$

$16 \cdot u - 6 \cdot u^2 - u^3 = 0 \quad | \cdot -1$

$u^3 + 6u^2 - 16u = 0 \quad |$ Faktorisieren + Kürzen

$u(u^2 + 6u - 16) = 0$

$\to = 0$ keine Lösung ✓

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$

$u_1 = 2 \qquad u_2 = -8$

$\cdot(-1) \qquad \cdot(-1)$

$u_1 = -2 \qquad u_2 = 8$

Keine Lösung ✓

$8 = 2^x \quad || \lg$

$\lg 8 = \lg 2 \cdot x \quad |: \lg 2$

$\frac{\lg 8}{\lg 2} = x$

$3 = x$

Regel: Wurde $| \cdot (-1)$ vor dem Einsetzen in die Quadratische Lösungsformel verwendet muss das Ergebnis Ebenfalls mit $\cdot(-1)$ zurückgerechnet werden ✓

Hausaufgabe

Seite 6 Nr 7

a) $\ln(\ln x) = -2$ $\qquad e^{(e^{-2})} = e^{\left(\frac{1}{e^2}\right)}$

$e^{-2} = \ln x$

$\ln x = e^{-2}$

$e^{(e^{-2})} = x$

$1{,}144920 = x$

Exponentialgleichungen Typ B

Aufgabe 46; S.113 04.11.09

$10^x + 4 = \frac{5}{10^x}$ Substitution $u = 10^x$

$u = 10^x$

$u + 4 = \frac{5}{u}$ | HN = u

$\frac{u^2}{u} + \frac{4u}{u} = \frac{5}{u}$ | -5

$u^2 + 4u = 5$

$u^2 + 4u - 5 = 0$

$\Downarrow$

$(u+5) \cdot (u-1) = 0$

$-5 \wedge +1$

$u_1 = 10^{x_1} = -5$ → keine Lösung

Nie Negative Zahl im Poten

$u_2 = 10^{x_2} = 1 = 10^0 \rightarrow x_2 = 0$

$x_2 \cdot \underbrace{\lg 10}_{=1} = \underbrace{\lg 1}_{=0}$

$x_2 = 0$

$10^{x_1} = -5$

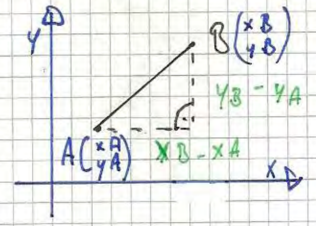
$x_1 \cdot \lg 10 = \lg(-5)$

Kein Lösung

Analytische Geometrie

Geraden mit zwei Punkten

1. Schritt: Bestimme Steigung aus den Koordinaten der beiden Punkte



$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

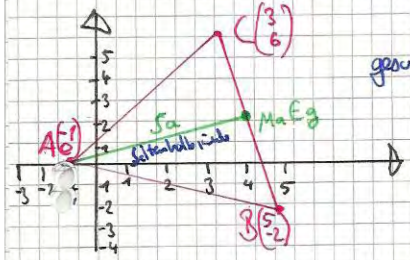
2. Schritt: In die Normalform einsetzen

$g: y = mx + q$ ← ? ← bekannt

Koordinaten einsetzen und q bestimmen

Beispiel: Auf der Geraden g liegt die Seitenhalbierende „s_a" des Dreiecks mit Eckpunkte $A\binom{-1}{0}$, $B\binom{5}{-2}$ und $C\binom{3}{6}$

Bestimme Normalform



gesucht $M_a(\ )$

$x_{M_a} = \frac{5+3}{2} = 4$

$y_{M_a} = \frac{-2+6}{2} = 2$

$M_a = \frac{3+5}{6+-2}$

$\left\{A\binom{-1}{0}, M_a\binom{4}{2}\right\}$ $\frac{y\Delta}{x\Delta} = \frac{2-0}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$

$g: y = \frac{2}{5}x + q$ | Eine der 2 Punkte Einsetzen

$0 = \frac{2}{5}(-1) + q$

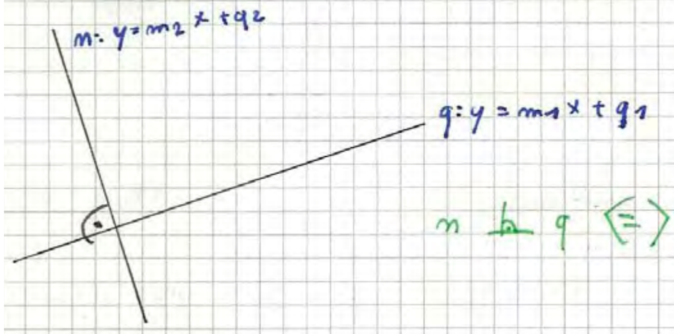
$0 = -\frac{2}{5} + q$ | $+\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} = q$

$g: y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$

Analytische Geometrie

Lot auf einer Geraden



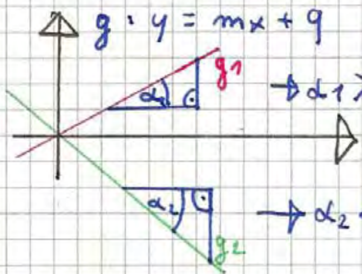
$n \perp g \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Steigungswinkel zwischen 2 Geraden

$\left.\begin{array}{l} g_1 \; y = m_1 x + q_1 \\ g_2 \; y = m_2 x + q_2 \end{array}\right\}$ Schnittwinkel $\gamma = \arctan\left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

Steigungswinkel von Geraden

$g: y = mx + q \rightarrow \alpha = \arctan(m)$



$\rightarrow \alpha_1 > 0$

$\rightarrow \alpha_2 < 0$

Schnittwinkel berechnen $\gamma = \arctan(m_1) - \arctan(m_2)$

Exponentialgleichungen Typ AB

Seite 6 Nr. 7 Hausaufgaben

b) $5 \cdot 2^x = 2 \cdot 4^x \quad | -2 \cdot 4^x$

$5 \cdot 2^x - 2 \cdot 4^x = 0$

$5 \cdot 2^x - 2 \cdot (2^x)^2 = 0 \qquad 2^x = u$

$5 \cdot u - 2u^2 = 0 \quad | \cdot -1$!

$2u^2 - 5u = 0 \quad |$ Faktorisieren

$u \cdot (2u - 5) = 0$

Variante A $\rightarrow 2u - 5 = 0 \quad | +5$

$2u = 5 \quad | : 2$

$u = 2{,}5$

$2^x = 2{,}5 \quad | \lg$

$x \cdot \lg 2 = \lg 2{,}5 \quad | : \lg 2$

$x = \dfrac{\lg 2{,}5}{\lg 2}$

$\underline{\underline{x = 1{,}32192}}$

Warum geht Quadratische Lösungsformel nicht?

Exponentialgleichungen

$$4^x + \frac{256}{4^x} = 68 \qquad u = 4^x$$

$$\frac{u^2}{u} + \frac{256}{u} = \frac{68\cdot u}{u} \qquad HN = u$$

$$u^2 + 256 = 68u \quad | -68u$$

$$u^2 - 68u + 256 = 0$$

$$(u-64)\cdot(u-4) = 0$$

$$u_1 = 4^{x_1} = 4^1 \to \underline{\underline{x_1 = 1}}$$

$$u_2 = 4^{x_2} = 4^3 \to \underline{\underline{x_2 = 3}}$$

Analytische Geometrie -Hessesche Normalform

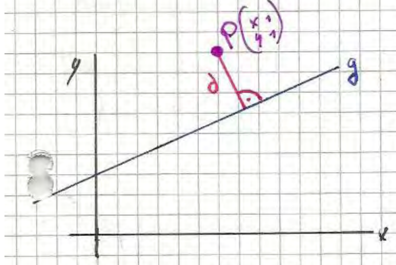
Die Hessesche Normalform (HNF) aus Koordinatengleichung

Bei von Koordinatengleichung $ax + by + c = 0$

$\downarrow$

zur HNF $\quad g: \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$

Für Punkte die nicht auf g liegen erhält man



Abstand $\qquad \frac{a}{b} = m$ Steigung

$$\left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = d \quad \text{(Abstand des Punktes vom g)}$$

Negative Werte drunter $\qquad$ Positive drüber

Beispiel: Bestimme den Abstand vom $P\binom{0}{12}$ vom $g: 24x - 7y + 82 = 0$

Lösung: $\dfrac{\overset{a}{24}\cdot\overset{x}{0} - \overset{b}{7}\cdot\overset{y}{12} + \overset{c}{91}}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \dfrac{7}{25} = \underline{\underline{0{,}28}}$

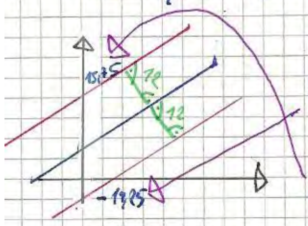
2. Beispiel: Welche Punkte auf der y-Achse haben vom $g: 3x - 4y + 3 = 0$ den Abstand 12

$y = 3x + 4$

Lösung $\dfrac{3x - 4y + 3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0 \qquad \begin{array}{c|c} a & 3 \\ b & -4 \end{array}$

$\dfrac{3x - 4y + 3}{5}$

$P\binom{0}{a} \quad \left|\dfrac{3\cdot 0 - 4\cdot a + 3}{5}\right| = 12 \qquad$ Beide Seiten sind möglich!



$$\frac{3 - 4a}{5} = \pm 12 \quad |\cdot 5$$

$$3 - 4a = 60 \quad | -3$$
$$-4a = 57 \quad | :-4$$
$$a = -\frac{57}{4} = -14{,}25 \to P_1\binom{0}{-14{,}25} \qquad g: -14{,}25 = 0x + 4$$

$$3 - 4a = -60$$
$$-4a = -63 \quad | :-4$$
$$a = \frac{63}{4} = 15{,}75 \to P_2\binom{0}{15{,}75}$$

Analytische Geometrie-Parameterdarstellung

Eine Kurve wird mithilfe eines einzigen Parameters dargestellt und zwar x- und die y-Koordinate separat.

$$\left| \begin{array}{l} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{array} \right| \quad \text{Parameter}$$

Für jeden Wert, den diese Parameter annimmt hat man ein anderen Punkt. Im Falle von Geraden

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda \cdot a_x \\ y = y_0 + \lambda \cdot a_y \end{array} \right|$$

Parameter

Beispiel:

Erstelle Wertetabelle und stelle Gerade graphisch dar, wenn

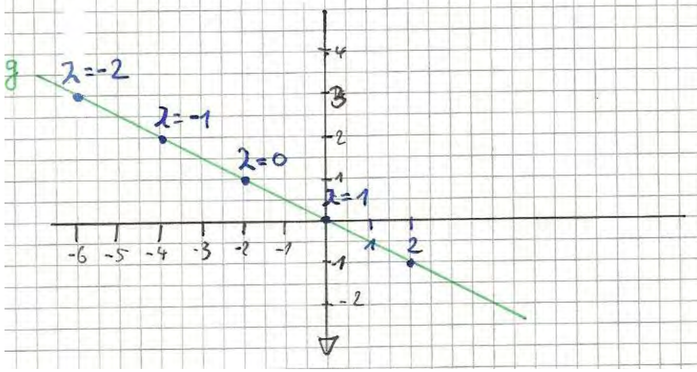
$x_0 = -2$, $a_x = 2$

$y_0 = 1$, $a_y = -1$

für $\lambda = -2, -1, 0, 1$ und 2

Formel $x = x_0 + a_x\lambda$ $\quad y = y_0 + a_y\lambda$

λ	$x = -2 + 2\lambda$	$y = 1 - \lambda$
-2	-6	3
-1	-4	2
0	-2	1
1	0	0
2	2	-1



Exponentialgleichungen Typ A

Exponentengleichung

25. f

$x^{4-\lg x} = 100 \cdot x \quad | \lg \ldots$

$(4 - \lg x) \cdot \lg x = \underbrace{\lg 100}_{} + \lg x$

Ausmultiplizieren

$4\lg x - (\lg x)^2 = 2 + \lg x \quad | + (\lg x)^2 - 4\lg x$

$(\lg x)^2 - 3\lg x + 2 = (u-2) \cdot (u-1) = 0$

$\to = 1 = \lg x \quad | 10^{\cdots}$

$10 = x$

$= 2 = \lg x \quad | 10^{\cdots}$

$100 = x$

25 g)

$x^{\lg x} = \frac{1000}{x^2} \quad | \lg$

$\underbrace{\lg x \cdot \lg x}_{\lg x^2} = \underbrace{\lg 1000}_{3} - \underbrace{\lg x^2}_{2\lg x} \qquad u = \lg x$

$u^2 = 3 - 2u \quad | + 2u - 3$

$u^2 + 2u - 3 = 0$

$(u+3) \cdot (u-1) = 0$

$u_1 = 1 \to 1 = \lg x_1 \quad | 10^{\cdots}$

$10 = x$

$u_2 = -3 \to -3 = \lg x_2 \quad | 10^{\cdots}$

$0{,}001 = x$

25 h) $x^3 = 10 \cdot x^{1+\lg x} \quad | \lg$

$3 \cdot \lg x = \lg 10 + (1 + \lg x) \cdot \lg x$

$3 \cdot \lg x = 1 + \lg x + (\lg x)^2 \quad | -3 \cdot \lg x$

$0 = 1 - 2 \cdot \lg x + (\lg x)^2$

$u^2 - 2u + 1$

$(u-1) \cdot (u-1) = (u-1)^2$

$u = 1 \to 1 = \lg x \quad | 10^{\cdots}$

$10 = x$

Exponentialgleichungen Typ A

j) $10^{x^2} = \frac{100}{10^x}$

$x^2 \cdot \underbrace{\lg 10}_{1} = \underbrace{\lg 100}_{2} - \underbrace{\lg(10^x)}_{x \cdot \lg 10 = x}$

$x^2 = 2 - x \qquad |+x|-2$

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$

1-2 $\to x = -2 \qquad \to x = 1 \qquad x \in \{-2, 1\}$

m) $10^x + 2 \cdot \underbrace{\sqrt[3]{10^{3x}}}_{(10^{3x})^{1/3} \to 10^x} = 300$

$10^x + 2 \cdot 10^x = \underbrace{3 \cdot 10^x = 300}, \quad |:3$

$10^x = 100 = 10^2 \to x = 2$

q) $\underbrace{e^{x^2}} + 5 = 0 \qquad |-5$

stets grösser als 0 daher keine Lösung

$e^{x^2} = -5 \qquad |\ln$

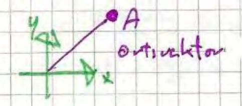
$x^2 \cdot \ln e = \ln(-5)$

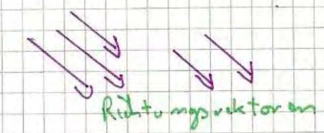
Analytische Geometrie

Vektoren

Vektoren → zum Geraden Darstellen

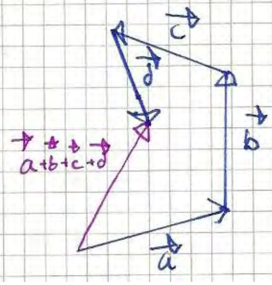
zwei Arten von Vektoren





Vorzeichenwechsel bewirkt 180° Drehung

„Zusammenfassen" von Vektoren → Vektorensumme



Analytische Geometrie Beispiele

Aufg 5a S. 107

$$\begin{cases} 2x - ay = 3a \\ 3ax + ay = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow[-3a]{+ay} \\ \xrightarrow{-3ax} \end{matrix} \quad \begin{matrix} ay = 2x - 3a & |:a \\ ay = -3ax & |:a \end{matrix}$$

$$y = -3x$$

$$y = \frac{2}{a}x - 3$$

$$m_1 \neq m_2 \rightarrow \frac{2}{a} \neq -3$$

$$\underline{\underline{a \neq -2/3}}$$

Ausserdem muss $a \neq 0$

Für Welchen Wert von a und b hat das lineare Gleichungssystem

a) nur eine Lösung

b) keine Lösung

c) unendlich viele Lösungen

Nr. 21

$$\begin{cases} ax + 5y = a \\ 5bx + ay = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{-ax} 5y = ax + a \xrightarrow{:5} y = -\frac{a}{5}x + \frac{a}{5} \\ \xrightarrow{-5bx} ay = -5bx + 5 \xrightarrow{:a} y = \underbrace{-\frac{5b}{a}}_{\text{Steigung}} x + \underbrace{\frac{5}{a}}_{\text{y-Achsen Abschnitt}} \end{matrix}$$

a) $-\frac{a}{5} \neq -\frac{5b}{a} \xrightarrow{\cdot a \cdot 5} a^2 \neq 25b$ $\quad m_1$

Wenn das gegeben ist gibt es nur 1 Lösung

b) $\underline{\underline{a^2 = 25b}}$ aber $\frac{a}{5} \neq \frac{5}{a} \rightarrow a^2 \neq 25$

c) $a^2 = 25b$, $a = 5$

$$\rightarrow b = \frac{a^2}{25} = 1$$

Exponentialgleichungen Typ A

Aufgabe 25 Prüfung

g) $x^{\lg x} = \frac{100}{x^2} \quad | \cdot x^2$

$$x^2 \cdot x^{\lg x} = 100$$

$$x^{2 + \lg x} = 100$$

$$(2 + \lg x) \cdot \lg x = \underbrace{\lg 100}_{\lg_{10} 10^2} = 2$$

$$(\lg x)^2 + 2 \lg x - 2 = 0$$

$$\lg x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \quad \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \quad (+)\ \lg x_1 = 0.73205$$

$(+)$ $\lg x_1 = 0{,}73205 \rightarrow x_1 = 10^{0{,}73205} = 5.3957$

$(-)$ $\lg x_2 = -2{,}73205 \rightarrow x_2 = 10^{-2.73205} = 0{,}0018533$

21d. $(3^x - 45)^2 = 1296$

$$3^x - 45 = \pm 36 \quad | +45$$

$$3^x = +45 \pm 36$$

$$3^{x_1} = 81 = 3^4$$

$$3^{x_2} = 9 = 3^2$$

$$x_1 = 4$$

$$\underline{x_2 = 2}$$

!

Exponentialgleichungen Typ A

Aufgabe 25 Prüfungen

a) $5^{x-1} = 25 \quad | \lg$

$(x-1)\cdot \lg 5 = \lg 25 \quad | \lg 5$

$x-1 = \frac{\lg 25}{\lg 5} \quad | +1$

$x = \frac{\lg 25}{\lg 5} + 1$

$\underline{\underline{x = 3}}$

b) $2^{x-10} = 3000$

$x-10\cdot \lg 2 = \lg 3000 \quad | \lg 2$

$x-10 = \frac{\lg 3000}{\lg 2} \quad | +10$

$x = 10 + \frac{\lg 3000}{\lg 2}$

$\underline{\underline{x = 21{,}5507}}$

c) $2^{12x} = 8^{x+15}$

$(12x)\cdot \lg 2 = (x+15)\cdot \lg 8 \quad | : x+15 \quad : \lg 2$

$\frac{12x}{x+15} = \frac{\lg 8}{\lg 2} \quad | \cdot x+15$

$12x = 3\cdot(x+15)$

$12x = 3\cdot x + 45 \quad | -3x$

$9x = 45 \quad | :9$

$\underline{\underline{x = 5}}$

Analytische Geometrie

Für welchen Wert der Parameter a und b hat das lineare Gleichungsystem

a) eine Lösung? b) keine Lösung? c) unendlich viele Lösungen?

Prüfungsaufgabe 04.11.09

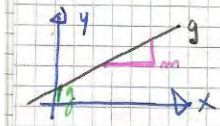
20. x und y von einander Trennen

$$\begin{array}{ll} ① & ax - 7y = 35 \\ ② & x - y = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{+7y-35} ax - 35 = 7y \xrightarrow{:7} \frac{a}{7}\cdot x - 5 = y \rightarrow m_1 = \frac{a}{7} \\ \xrightarrow{+y-6} x - 6 = y \qquad x - 6 = y \rightarrow m_2 = 1 \end{array}$$

① $g_1 = y = \frac{a}{7}x - 5 \rightarrow m_1 = \frac{a}{7}$

② $g_2 = y = x - 6 \rightarrow m_2 = 1$

a) Ein Lösung da $m_1 \neq m_2 \rightarrow \frac{a}{7} \neq 1 \xrightarrow{\cdot 7} a \neq 7$



b) $m_1 = m_2$ dh $a = 7$ und $q_1 \neq q_2$

$-5 \neq -6 \rightarrow b \neq 5$

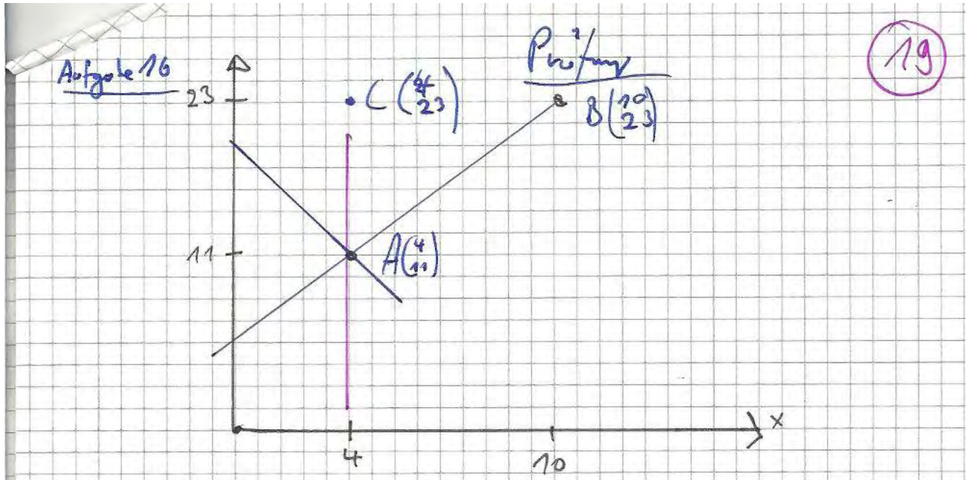
$a = 7 \wedge b \neq 5$

c) $a = 7 \wedge b = 5$

Analytische Geometrie

Eine Gerade g geht durch zwei Punkte A(4/11) B(10/23).

a) Bestimme die Steigung. b) Wie gross ist der y-Achsenabschnitt von g?
c) Wie gross wäre die Steigung einer Geraden h. die lotrechtauf g steht?
d) Eine Gerade h schneidet g im Punkt a senkrecht. Wie gross ist der y-Achsenabschnitt von h?



a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{23-11}{10-4} = \frac{12}{6} = 2 = m$

b) $11 = 2 \cdot 4 + q$
$11 = 8 + q \quad | -8$
$3 = q$

c) $\frac{2}{1} \to -\frac{1}{2}$

d) Es gibt keinen 0

$11 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + q$
$11 = -2 + q \quad | +2$
$13 = q$

Exponentialgleichungen

Typ A
Lösungsvariable im Exponent durch beidseitiges Logarithmieren

$5^x = 8^{x-2}$ $\qquad$ $x^{\lg x} = 2$

$e^{x^{\wedge}2} = 1$ $\qquad$ $\sqrt{x^{\lg x}} = 7$

$3 - 5^{x-2} = \frac{ex}{25}$

Typ B
Enthält + und –
Durch Manipulation in Typ 1

$3^x - 4^x = 20$

Umwandeln

$2^{4x} = (2^2)^{2x} = 4^{2x}$
$2^{6x} = (2^2)^{3x} = 4^{3x}$
$8^2 = 2^6 = (2^3)^2$

$x^{e^2} = x^{e \cdot 2}$

$x^{2^4} = x^{2 \cdot 4}$

$\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$

$2^{2x+2} = 2^{2x} \cdot 2^2$

$10^x \cdot 10^{x+2} = 10^{2x+2}$

$10^x + 2| \; 10^x = 3| \; 10^x = 300$

$\lg 10^x \to x \cdot \lg 10$

Eulerische Zahl

Umwandeln
$\ln = e^1$

Logarithmieren

$$10^{x-1} \rightarrow (x-1)\cdot \lg 10$$

$$10^{x}\cdot 10^{x+3} = 10 \rightarrow \lg 10^{x} + \lg 10^{x+3} = \lg 10$$

$$\frac{10}{13} \rightarrow \lg 10 - \lg 13$$

$$\frac{\lg 5}{\lg 3} \rightarrow \lg(\lg 5) - \lg(\lg 3)$$

Schnittpunkt von Parabeln Prüfung 2008

Gegeben: 2 Parabeln: $y=2x^2+cx+3$ und $y=x^2-c$
Berechne c so das sich beide Parabeln berühren.
Wie lauten die Koordinaten der jeweiligen Berührungspunkte ?

Aufgabe 6 zwei Parabeln $y = 2x^2 + cx + 3$ $y = x^2 - c$
Berechne Lösung für c so das Beide Parabeln berühren.
Wie lauten die Koordinaten

Schnittpunkt: $2x^2 + cx + 3 = x^2 - c \quad | -x^2 + c$
$x^2 + cx + 3 + c = 0$

Diskriminante:

$D = -b^2 - 4ac$ $\quad D = 0 \rightarrow$ Doppellösung
$D = c^2 - 4 \cdot 1 \cdot (c + 3)$
$D = c^2 - 4c - 12$
$D = (c-6) \cdot (c+2) = 0$

$c_1 = 6$ Einsetzen $x^2 + 6x + 3 + 6$ $\quad x = \frac{-c \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-c}{2}$ $\quad (\sqrt{D} \rightarrow 0)$
$\rightarrow x_1 = -\frac{6}{2} = -3$; $y_1 = x_1^2 - c = 9 - 6 = 3$

$B_1 \binom{-3}{3}$

$c_2 = -2$ $\quad x_2 = -\frac{-2}{2} = 1$, $\quad y_2 = x_2^2 - c_2 = 1 - (-2) = 3 \rightarrow B_2 \binom{1}{3}$

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

$y = -\frac{1}{2}(x-3)^2+2$ → Scheitelpunkt $S\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Steigung m, q

→ Tabelle

x	1	2	3	4	5
y	0	1,5	2	1,5	0

m = positiv nach oben

= Scheitelpunkt

m = negativ nach unten

Logarithmen

<u>Grundregeln</u>

Multiplikation: log (x| y) = log x + log y

Divison: log (x:y) = log x - log y

Potenz: $\log x^{y} = y \mid \log x$

Wurzel: $\log \sqrt[y]{x} = \log x^{1/y} = \frac{1}{y} \bullet \log x$

$\frac{1}{2} \lg x = \sqrt{\lg x} \quad \sqrt{x^{\lg x}} = 7$

<u>Exponentialgesetz</u>

$\lg x^{n} = \lg(x \cdot x \cdot \ldots x)$

<u>Grundsätze</u>

log a X ; X >0 ; kleiner als Null keine Lösung

Wurzelgleichungen Prüfung 2009

Aufg. 1 $(x+3)^{1/2}+(2x-8)^{1/2}-15\cdot(x+3)^{-1/2}=0$ 1

$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-8}-\frac{15}{\sqrt{x+3}}$ $\quad | \cdot\sqrt{x+3}$

HN $\sqrt{x+3}$ $\quad \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}+\frac{+\sqrt{2x-8}}{\sqrt{x+3}}=\frac{15}{\sqrt{x+3}}$

$x+3+\sqrt{(x+3)(2x-8)}=15 \quad |-x-3$

$\sqrt{(x+3)(2x-8)}=12-x \quad |$ Quadrieren

$2x^2-8x+6x-24=12-x^2$

$2x^2-2x-24=12^2-2\cdot12x+x^2$

$144-24x+x^2 \qquad -x^2+24x-144$

$x^2+22x-168=0$

$\frac{-22\pm\sqrt{484+672}}{2}=x_1=6 \qquad x_2=-28$

Probe $\sqrt{6+3}+$

$\sqrt{9}+\sqrt{4}-\frac{15}{\sqrt{9}}=3+2-5=0 \qquad \mathbb{L}=6$

Quadratische Gleichungen

Lösungsformel vereinfacht (Mitternachtsformel)

$$x^2+px+q=0 \dashrightarrow x_{1,2}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Lösungsformel

$$ax^2+bx+c=0 \dashrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Diskiminante ist zur Berechnung der Anzahl Lösungen

$D>0$: zwei reelle Lösungen

$D=0$: eine reelle Lösung -> Doppellösung -> zwei gleiche reele Lösungen

$D\geq0$: reelle Lösungen

$D<0$: keine reelle Lösung

$$ax^2+bx+c=0 \dashrightarrow D=b^2-4ac$$

Begriffe

Polynom 1 Grades $\qquad ax^2+c=0$

Polynom 2 Grades $\qquad ax^2+bx+c=0$

Diskriminate Berechnen

Gegeben: Für welche Werte von a sind die Wurzeln von $x^2-ax+3a=0$ reell?

11. $D = b^2 - 4ac$

$D = a^2 - 3a \cdot 4 \cdot 1$

$D = a^2 - 12a$

Aufgabe: $x^2 - ax + 3a = 0$

Welche Werte von a ist reell!?

Lösen

$x^2 - ax + 3a = 0$

$x^2 + a \cdot (-x + 3) = 0 \quad | -x^2$

$a(3-x) = -x^2 \quad | :(3-x)$

$a = \frac{-x^2}{3-x}$

a	1
b	−a
c	3a

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$

$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3a)$

$a^2 - 12a = a(a-12) \geq 0$

$a \geq 12 \vee a \leq 0$

Prüfungsaufgaben 04.11.09

Nr. 13 $x^2 + [a+15]x - a = 0$ zwei reele Lösungen gleiche?

$-b\ (x_1 + x_2)$

$x_1 + x_1$

$D = b^2 - 4ac$

a	1
b	a+15
c	−a

$D = (a+15)^2 - 4 \cdot (-a)$

$a^2 + 30a + 225 + 4a = 0$

$(c+d)^2 = c^2 + 2c \cdot d + d^2$

$a^2 + 2a \cdot 22 + 225$

Für welche Werte des Parameters a hat die quadratische Gleichung $x^2+[a+15]x-a=0$ zwei gleiche reelle Lösungen ?

$a^2 + 34a + 225 = 0$

$-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\frac{-34 \pm \sqrt{1156 - 900}}{2} \qquad \frac{-34 \pm 16}{2}$

$a_1 = -9 \qquad a_2 = -25$

zwei gleiche Reelle: eine Reelle Doppellösung →

zwei Reelle Lösungen → $D > -9 \vee -25 < D$

2)

Wurzelgleichungen

-4. 17.11.

b) $\sqrt{x+7} - \sqrt{3x-2} = 0$ Probe: $\sqrt{11{,}5} - \sqrt{11{,}5}$

$\sqrt{x+7} = \sqrt{3x-2} \quad |$ quadrieren

$x + 7 = 3x - 2 \quad | -x+2$

$9 = 2x \quad | :2$

$4{,}5 = x$

d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{5 \cdot (x-3)} + 2 = 0$

$\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{5 \cdot (x-3)}$

$x+1+2 \cdot 2\sqrt{x+1} + 2 = 5 \cdot (x-3) \quad | \cdot$

$= 5x - 15 \quad | -x-5$

$4\sqrt{x+1} = 4x - 20 = 4(x-5) \quad | :4$

$\sqrt{x+1} = x - 5 \quad |$ quad

$x + 1 = x^2 - 10x + 25 \quad | -x-1$

$0 = x^2 - 11x + 24$

$0 = (x-3) \cdot (x-8)$

$x_1 = 8$ Probe $\sqrt{9} + 2 = \sqrt{25}$ ✓

$x_2 = 3$ Probe $\sqrt{4} + 2 = \sqrt{5 \cdot 0}$ ✗ Falsch

g) $\sqrt{4x+1} + \sqrt{9x-2} = \sqrt{25x-1} \quad |$ Quad

$(4x+1) + 2 \cdot \sqrt{(4x+1) \cdot (9x-2)} + (9x-2) = 25x - 1 \quad | -13x \quad | +1$

$2\sqrt{(4x+1) \cdot (9x-2)} = 12x \quad | :2$

$\sqrt{(4x+1) \cdot (9x-2)} = 6x \quad |$ Quadr

$(4x+1) \cdot (9x-2) = 36x^2$

$36x^2 + 9x - 8x - 2 = 36x^2 \quad | -36x^2$

$x - 2 = 0 \quad | +2$

$x = 2$

Gleichungen 4. Grades

Durch Abspaltung der Wurzeln $X_1 = 1$ und $X_2 = -1$ soll die Gleichung vierten Grades in eine Quadratische Gleichung überführt werden.

6. $x \cdot 3y =$

$x = 3y$

$$x \cdot y = 6(x+y)$$
$$3y \cdot y = 6(3y + y)$$
$$3y^2 = 6 \cdot 4y$$
$$3y^2 = 24y \quad | :3$$
$$y^2 = 8y$$
$$y^2 - 6y = y \cdot (y - 8)$$
$$y_1 = 8$$
$$y_2 = 0$$

8. $x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$x + 1 = 0 \quad x - 1 = 0$

$$(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$$

$$\frac{\left(\frac{x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 11x - 28}{x+1}\right)}{x-1}$$

$$x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 11x - 28 : (x^2 - 1) = x^2 - 11x + 28 = 0 \quad \leftarrow a)$$
$$-+x^4 \quad --x^2$$
$$11x^3 + 28x^2 + 11x - 28$$
$$--11x^3 \quad -+11x$$
$$+28x^2 \quad -28$$
$$28x^2 \quad -28$$
$$0$$

$$= (x-7) \cdot (x-4)$$

$$x_3 = 7$$
$$x_4 = 4 \quad \leftarrow b)$$

Diskriminate Berechnen Prüfung 2009

Aufgabe 6: $(12a - 2)x^2 - 40x + 20a - 5 = 0$

Für welche Werte von a sind die Wurzeln nicht reell?

$D < 0$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = -40^2 - 4(12a-2) \cdot (20a-5) = 0$$
$$-1600 - 4(240a^2 - 60a - 40a + 10) = 0$$
$$-1600 - 960a^2 - 400a + 40 = 0$$
$$960a^2 - 400a - 1560 = 0 \quad | :5$$
$$192a^2 - 80a - 312 = 0 \quad | :2$$
$$96a^2 - 40a - 156 = 0 \quad | :4$$
$$24a^2 - 10a - 39 = 0$$

$$\frac{+10 \pm \sqrt{100 - (4 \cdot -39 \cdot 24)}}{2 \cdot 24} = \frac{+10 \pm \sqrt{-3844}}{2 \cdot 24}$$

$$\frac{10 \pm 62}{48} \quad x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = -1{,}08\overline{3}33\ldots$$

$-1{,}08\overline{333}\ldots \quad 0 \quad +1{,}5$

Probe (1)

$$a < -1{,}08\overline{333} \quad \wedge \quad a > +1{,}5$$

Gleichung mit 2 unbekannten

Geben sie den grössten Wert x an, für den die Gleichung
Genau eine Lösung hat.

Nr 11 S.57

$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ y Nur eine Lösung

Quadratische Gleichung

a	1
b	-2
c	$-2x+x^2$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 2x) \geq 0 \quad :4$

$1 - x^2 + 2x \geq 0$

$x^2 + 2x - 1 \geq 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = 0$

$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{2} \qquad x = 1 + \sqrt{2} = \underline{\underline{2{,}414}}$

Kubische Gleichungen

Kubische Gleichung mit einer vorgegebenen Lösung

1.Vorhandene Lösung einseitig auf 0 Auflösen
z.b. $x_1=1 \mid x_1-1=0$
2. Kubische Gleichung durch dies Teilen
z.b. $(x^3-6x^2+11x-6):(x-1)$
3. Mit Ergebnis wie mit einer Quadratische Gleichung verfahren

$\boxed{\text{S.66 Nr. 43}}$ Hausaufgabe

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \qquad x_1 = 1 \mid -1 \qquad$ gesucht $x_2 \; x_3$

$\boxed{x - 1 = 0}$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : x - 1 = x^2 - 5x + 6$

$-(+x^3 - x^2)$

$-5x^2 + 11x - 6$

$-(-5x^2 + 5x)$

$+6x - 6$

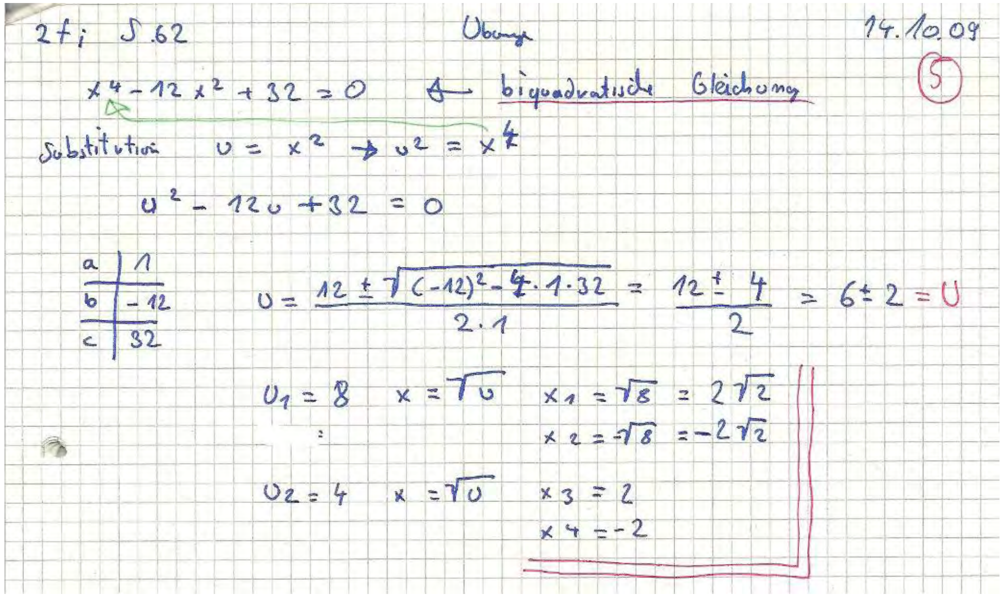
$-(+6x - 6)$

0

QLF: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \rightarrow \frac{+5 \pm 1}{2}$

$x_2 = \frac{5+1}{2} = \underline{\underline{3}} \qquad x_3 = \frac{5-1}{2} = \underline{\underline{2}}$

Biquadratische Gleichungen



2fi S.62 Übung 14.10.09

5

$x^4 - 12x^2 + 32 = 0$ ← biquadratische Gleichung

Substitution $u = x^2 \rightarrow u^2 = x^4$

$u^2 - 12u + 32 = 0$

a	1
b	-12
c	32

$u = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 4}{2} = 6 \pm 2 = U$

$U_1 = 8 \quad x = \sqrt{u} \quad x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

$U_2 = 4 \quad x = \sqrt{u} \quad x_3 = 2$

$x_4 = -2$

Sätze von Vieta

Die reellen Zahlen x_1 und x_2 sind genau dann Lösungen der Gleichung $x^2+px+q=0$, wenn für die Koeffizienten p und q gilt: **$p=-(x_1+x_2)$** und **$q=x_1 \bullet x_2$**.

1 Satz $\quad x1 + x2 = -\frac{b}{a}$

2 Satz $\quad x1 \cdot x2 = \frac{c}{a}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

Faktorisieren von Quadratischen Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Gleichung mit Lösungsformel auflösen und Werte einsetzen

Beispiel zum Satz von Vieta

Gegeben: Lösungen x1 ist 5 mal x2 und x1 ist um 8 grösser. Gesucht b und c

Aufgabe 30 Seite 65 Hausarbeit

$x^2 + bx + c = 0$ $\mathbb{L} = x_1 = 5x_2$ $x_1 - x_2 = 8$

Vieta (1) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$10 + 2 = -12$

$\underline{-12 = b}$

Vieta (2) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$10 \cdot 2 = 20$

$\underline{20 = c}$

$\underline{x_2 + (-12) + 20}$

$x_2 + 8 = x_1$

$5x_2 = x_1$

$x_2 + 8 = 5x_2 \quad | -1x_2$

$8 = 4x_2 \quad | :4$

$\underline{2 = x_2}$

$5x_2 = x_1$

$5 \cdot 2 = 10$

$\underline{x_1 = 10}$

Faktorisieren eines Polynoms

Faktoriesieren eines Polynoms

$$12x^2 + 5x - 2$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$(3x + 2) \cdot (4x - 1)$$

Beispiel zum Satz von Vieta

Gegeben: x2-qx+125-q=0; Wurzel Unterscheiden sich um $x_1+x_2=x^2$; Gesucht: x_1 x_2

Aufgabe 9 $\quad x^2 - qx + 125 - q = 0 \quad x_1 + x_2 = x_2^2 \quad$ 21.01.1

(1) $\frac{-b}{a} = x_1 + x_2$

$-b = x_2^2 - x_2 + x_2 = x_2^2$

$x_1 + x_2 = x_2^2 \mid -x_2$

$x_1 = x_2^2 - x_2$

(2) $c = 125 - q = x_1 \cdot x_2 \rightarrow$

$(x_2^2 - x_2) \cdot x_2 \rightarrow x_2^3 - x_2^2$

$125 \cancel{- x_2^2} = x_2^3 \cancel{- x_2^2}$

q

$x_2^3 = 125 \xrightarrow{\sqrt[3]{\dots}} x_2 = 5 \quad \mid \text{hoch}^2$

$q = x_2^2 = 25$

Beispiel mit der Grundform von Vieta

Gegeben: x^2-6x+k=0; $x_1=3-(5)^{1/2}$; Gesucht: k

Aufgabe 5 $\quad x^2 - 6x + k = 0 \quad x_1 = 3 - (5)^{1/2}$

$x^2 - 6x + k = x(x-6) + k = 0 \quad \mid -x \cdot (x+6)$

$k = -x \cdot (x-6)$

$(3 - \sqrt{5} - 6)$

$3 - \sqrt{5}$

$= (-1) \cdot (3 - \sqrt{5}) \cdot (-3 - \sqrt{5})$

$= (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

$= 3^2 + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5 = 4$

Beispiel zum Satz von Vieta

Gegeben: x2+qx+q²-24 Produkt der Wurzel doppelt so groß wie die Summen; Wurzeln müssen Reel sein !

Gesucht: q

Nr. 14 $\quad$ ~~x1 x2~~ Prüfung $\quad$ 17 $\quad$ 23.10.09

$x^2 + \underset{-b}{q}x + \underbrace{q^2 - 24}_{C}$

Gesucht q

Produkt der Wurzel doppelt so gross wie die Summe

$a x^2 + bx + c = 0$

1 $\quad x_1 + x_2 = -b/a$

2 $\quad x_1 \cdot x_2 = c/a$

Wurzeln müssen reell sein

$\underbrace{(x_1 \cdot x_2)}_{\text{Produkt Wurzel}} \cdot \underset{\text{doppelt}}{2} \qquad \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Summe}}$

$x_1 + x_2 = - - q = q$

$x_1 \cdot x_2 = q^2 - 24$

$q^2 - 24 = 2 \cdot q \xrightarrow{-2q} q^2 - 2q - 24 = 0$

$(q - 6) \cdot (q + 4) = 0$

$q_1 = 6 \quad q_2 = -4$

Reelle Wurzeln? $\quad q = 6 \rightarrow x^2 - 6x + 36 - 24 = x^2 - 6x + 12$

$D = b^2 - 4ac \quad D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 12 < 0$

$36 - - 24$

$16 - - 24$

$q = -4 \rightarrow x^2 + 4x + 16 - 24 = x^2 + 4x - 8 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) > 0$

Beispiel zum Satz von Vieta

Gegeben: $x^2-qx+q^2+45=0$; Eine Wurzel ist um 4 grösser als die andere

Gesucht: q & x_1 & x_2

Nr.15 29.10.09

$x^2 - qx + 45$ Wurzel ist um 4 grösser

$x_1 = x_2 - 4$

$-b = -q = x_1 + x_2 + 4$

$-q = 2x + 4$

$c = 45 = x_1 \cdot (x_2 + 4)$

$45 = x^2 + 4x \quad |-45$

$0 = x^2 + 4x - 45$

$\frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2} = \frac{-4 \pm 14}{2} \qquad x_1 = 5 \qquad x_2 = -9$

$q_1 \rightarrow 2 \cdot 5 + 4 = 14$

$q_2 \rightarrow 2 \cdot -9 + 4 = -14$ $\Big\}$ -9 ||

$q_1 \quad x_2 - 14 + 45 \qquad (+14 \pm \sqrt{196 - 180}) : 2 \qquad x_{11} \; 9 \qquad x_{12} \; 5$

$q_2 \quad x_2 + 14 + 45 \qquad (-14 \pm \sqrt{196 - 180}) : 2 \qquad x_{21} \; -5 \qquad x_{22} \; -9$

Beispiel zum Satz von Vieta

Gegeben: x2-qx+2q=0; Wurzel Unterscheiden sich um 3; x_1+x_2+3;

Gesucht: q & x_1

$x2 - qx + 2q = 0$ Bestimme q

a	1
b	-q
c	2q

$x_1 = x_2 + 3$

Vieta $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-q}{1} = q$

$\cancel{x_2}+3+ x_2 = q$

$2x_2 + 3 = q$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2q}{1} = 2q$

$(x+3)\cdot x_2 = q^2$

$q = 2x_2 + 3$

$(x_2 + 3) \cdot x_2 = 2(2x_2 + 3)$

$x_2^2 + 3x_2 = 4x_2 + 6 \quad | -4x_2 - 6$

$x_2^2 - x_2 - 6 = 0$

$(x_2 - 3) \cdot (x_2 + 2) = 0$

$x_2 = 3 = x_2 + 3 = 6 \qquad q_1 = x + x_2 = 9$

$x_2 = -2, \quad x_1 = x_2 + 3 = 1 \qquad q_2 = x_1 + x_2 = -1$