Juventus

Bachelor
Zulassungsstudium

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK ZÜRICH

Fach: Mathematik II / Geometrie   Zeitpunkt: Juni 2009   Zeit: 90 Minuten

Dieses Aufgabenblatt bleibt nach der Prüfung im Besitze der Studierenden und muss nicht mit den Lösungen abgegeben werden.

Klassen	Zulassungsstudium Beginn August 2008, Klassen 1,2 und 3
Examinator	Prof. Dr.h.c. Bedi Büktas, Rektor der Hochschule für Technik Zürich
Erlaubte Hilfsmittel	- Eine persönlich erstellte und/oder eine gedruckte Formelsammlung (handschriftliche Einträge ohne Lösungsansätze sind erlaubt) - Ein elektronischer Rechner
Bewertungsschema	Pro Aufgabe total 3 Punkte --> Maximal 24 Punkte

Notengebung
(Anz. Punkte / 4 + 1)

Anzahl Punkte	Note
24,23,22,21,20,19	6.0
18,17	5.5
16,15	5.0
14,13	4.5
12,11	4.0
10,9	3.5
8,7	3.0
6,5	2.5
4,3	2.0
2,1	1.5
0	1.0

Wichtig
- Bei jeder Aufgabe muss der Lösungsweg in allen Schritten nachvollziehbar sein, ansonsten die Aufgabe nicht bewertet würde
- Erratene Lösungen werden nicht bewertet
- Für jede Aufgabe ist ein separates Blatt zu verwenden
- Die Lösungsblätter sind nur einseitig zu beschriften

AUSZUG AUS DEM REGLEMENT
IV. PRÜFUNGSBESTIMMUNGEN, § 13 (Ausschluss von Zertifikatsprüfungen bzw. Gesamtprüfung)

Ein Ausschluss von den Prüfungen erfolgt, wenn

a) der/die Studierende unerlaubte Hilfsmittel verwendet oder in anderer schwerwiegender Weise gegen die Prüfungsordnung verstösst
b) der/die Studierende ohne zwingenden Grund einer Prüfung ganz oder teilweise fernbleibt
c) sich auch nachträglich ein offenkundiger und belegbarer Betrug herausstellt.

Wird ein Ausschluss ausgesprochen, gilt die ganze Zertifikats- oder Gesamtprüfung als nicht bestanden. Die Studierenden werden ausdrücklich auf diese Bestimmungen aufmerksam gemacht.

Aufgabe 1
Gegeben ist ein Rechteck ABCD. Die Höhe des Rechtecks beträgt AD = 5 cm. Wir ziehen von D aus eine Gerade in Richtung Basis AB. Diese schneidet AB in E. Der Winkel ADE beträgt 60°. Der Winkel DEC beträgt 90°. Wie lang ist die Seite AB?

Aufgabe 2
Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH (Basisfläche ABCD; Deckfläche EFGH; E liegt über A, F über B, G über C, H über D). Bekannt sind A(0/22/14), B(20/42/4) und C(40/20/0). Berechnen Sie die Koordinaten von D und E.

Aufgabe 3
In einem Dreieck gilt : $a : b = 3 : 4$ und $\beta = \alpha + 30°$.
Berechnen Sie alle Dreieckswinkel.

Aufgabe 4
Die Spitze eines geraden Kreiskegels befindet sich im Punkt S(4/8/7), der Mittelpunkt seiner Grundfläche ist M(6/4/3). Eine Mantellinie des Kegels geht durch A(3/7/3). Welchen Radius hat die Grundfläche des Kreiskegels?

Aufgabe 5
Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die Deckseite c = 3 cm und den Flächeninhalt A = 24.84 cm^2.
Die Differenz zwischen den parallelen Grund- und Deckseiten (a - c) ist dreimal so gross wie jene zwischen der Höhe h und der Deckseite c (c < a).
Berechnen Sie die Länge der Grundseite a.

Aufgabe 6
Gegeben sind die Punkte A(1/0/5), B(3/6/8), C(0/4/14) und D(-2/-2/11). Weisen Sie rechnerisch nach, dass ABCD ein Quadrat ist.

Aufgabe 7
Ein gerader Kreiskegel hat die Mantellinienlänge von 12 cm und einem Öffnungswinkel von 60º. Eine dieser Mantellinien verbindet die Kegelspitze S mit einem Punkt R auf dem Grundkreis. Der Grundkreismittelpunkt sei M. Die Mitte der Mantellinie SR sei P. Auf der anderen Seite der Diagonalen durch RM des Grundkreises befinde sich der Punkt Q auf dem Grundkreis.
In P befindet sich ein Käfer. Er möchte auf dem Mantel des Kreiskegels auf kürzestem Weg von P nach Q gelangen. Welchen Weg muss er zurücklegen?

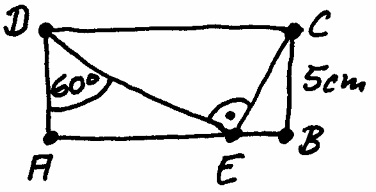
Aufgabe 8
Von einem Dreieck ABC kennt man die Ecke C(9/3/8) und den Fusspunkt F(3/0/2) der Höhe h_c. Die Ecke A liegt auf der Geraden g: (x/y/z) = (0/1/1) + λ(1/1/2), die Ecke B in der xy-Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von A und B.

WIR WÜNSCHEN IHNEN VIEL ERFOLG !

12.06.2009/BB

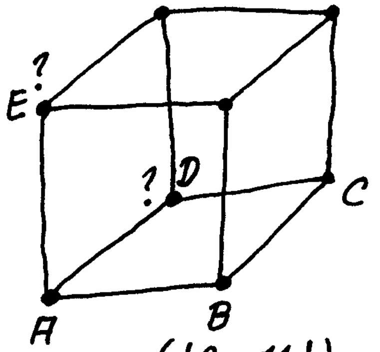
ZLSAP Juni 2009 Mathe II

1.)



$$\overline{AB} = 5cm\cdot[\tan 60° + \tan 30°]$$
$$= (4/\sqrt{3})\cdot 5cm = 20cm/\sqrt{3} = \underline{\underline{11.547cm}}$$

2.)



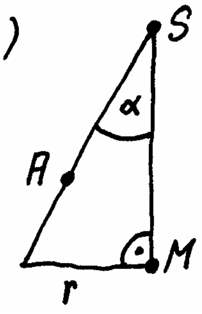
$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{BC} = \begin{pmatrix}0\\22\\14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}40-20\\20-42\\0-4\end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{D\begin{pmatrix}20\\0\\10\end{pmatrix}}}$$

$$\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AD} = \begin{pmatrix}20-0\\42-22\\4-14\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}20-0\\0-22\\10-14\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}20\\20\\-10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}20\\-22\\-4\end{pmatrix} = 20\left[\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10\\-11\\-2\end{pmatrix}\right]$$
$$= 20\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & -11\\-1 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 10\\-1 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 10\\2 & -11\end{vmatrix}\end{pmatrix} = 20\begin{pmatrix}-15\\-6\\-42\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{n}| = 20\sqrt{15^2+6^2+42^2} = 900$$
$$= (\overline{AB})^2 \longrightarrow \overline{AB} = 30 \leftarrow \text{Kantenlänge!!!}$$
$$\vec{r}_E = \vec{r}_A + \frac{\vec{n}}{\sqrt{|\vec{n}|}} = \begin{pmatrix}0\\22\\14\end{pmatrix} + \frac{20}{30}\begin{pmatrix}-15\\-6\\-42\end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{E\begin{pmatrix}-10\\18\\-14\end{pmatrix}}}$$

3.) Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+30°)} \rightarrow 3\sin(\alpha+30°) = 4\sin\alpha$

$$3(\sin\alpha\cos 30° + \cos\alpha\sin 30°) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha) = 4\sin\alpha$$
$$\rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{8-3\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 46.94°$$
$$\beta = \alpha + 30° = 76.94°$$
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = \underline{\underline{56.13°}}$$

4.)



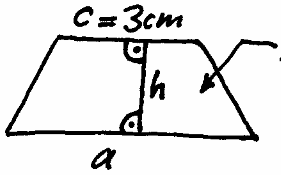
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{SM}\cdot\vec{SA}}{\overline{SM}\cdot\overline{SA}}\right), \quad r = \overline{SM}\cdot\tan\alpha$$

$\vec{SM}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix} \to \overline{SM}=6\,,\quad \vec{SA}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix} \to \overline{SA}=3\sqrt{2}$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}}{6\cdot 3\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\frac{-2+4+16}{18\sqrt{2}}\right)=45^\circ$$

$\to r=\overline{SM}\cdot\tan\alpha=6\cdot\tan 45^\circ=\underline{\underline{6}}$

5.)



$A=\frac{a+c}{2}h=\frac{a+3cm}{2}h=24.84cm^2$

$a-c=3(h-c)\to a=3h-2c=3h-6cm$

$A=\frac{3h-3cm}{2}h=\frac{3}{2}h(h-1cm)=24.84cm^2$

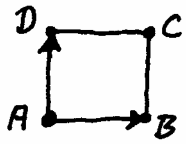
$\to h^2-(1cm\cdot h)-16.56\,cm^2=0$

$\to h=\frac{1cm\,(\pm)\sqrt{1+66.24cm}}{2}=4.6cm \to a=3h-6cm=\underline{\underline{7.8cm}}$

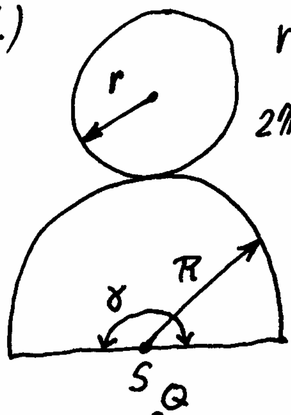
6.) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\to\overline{AB}=7,\ \vec{AD}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix}\to\overline{AD}=7=\overline{AB}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix}=-6-12+18=0\to\vec{AB}\perp\vec{AD}$ ✓

$\vec{r}_A+\vec{AB}+\vec{AD}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\14\end{pmatrix}=\vec{r}_C$ ✓



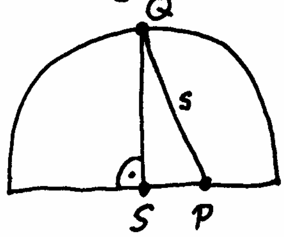
7.)



$r=\frac{R}{2}=6cm$

$2\pi r=\frac{\pi\gamma}{180^\circ}\cdot R$

$\to\gamma=180^\circ$



$\overline{SQ}=12cm$

$\overline{SP}=\frac{\overline{SQ}}{2}=6cm$

$s=\sqrt{(\overline{SQ})^2+(\overline{SP})^2}$

$=\sqrt{5}\cdot 6cm$

$=\underline{\underline{13.4cm}}$

8.) $\vec{FC}=\begin{pmatrix}6\\3\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$E\perp\vec{FC}:\ 2x+y+2z+d=0$

$F\in E:\ 6+0+4+d=0\to E:2x+y+2z-10=0$

$E\cap g:\ 2\lambda+1+\lambda+2+4\lambda-10=7\lambda-7=0$

$\to\lambda=1\to A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\{A,F\}\in h:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$z=3-t=0\to t=3$

$B\begin{pmatrix}1+3\cdot2\\2+3\cdot(-2)\\3+3\cdot(-1)\end{pmatrix}\to B\begin{pmatrix}7\\-4\\0\end{pmatrix}$