ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfung **Herbst 2003**

MATHEMATIK (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:

Vorname:

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Gegeben ist eine Ellipse mit Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$ in Normallage (Mittelpunkt $(0/0)$, Achsen auf den Koordinatenachsen). Für welche Punkte C auf der Ellipse ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A(0/-3)B(5/0)C$ gleich 6?

2. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob beim Vorhandensein des undurchsichtigen Dreiecks $A(0/0/0)B(6/9/3)C(4/2/10)$ der Punkt $Q(-2/4/5)$ vom Punkt $P(10/4/7)$ aus sichtbar ist.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(2x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   a) Skizzieren Sie mit 4 cm Einheit den Graphen der Funktion f.

   b) Der Graph und die Normalen in den beiden Nullstellen der Funktion schliessen ein Gebiet ein. Bestimmen Sie dessen Inhalt.

   c) In dieses Gebiet wird ein achsenparalleles Rechteck mit möglichst grossem *Umfang* einbeschrieben. Berechnen Sie diesen maximalen Umfang.

4. Gegeben ist in der komplexen Ebene die Abbildung

$$f(z) = \frac{1+i}{z}.$$

   a) Berechnen Sie $f(i)$ und $f(3-i)$. Geben Sie die Resultate in Normalform an.

   b) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $f(z) = z$ (Resultate in Normalform).

   c) Zeigen Sie, dass gilt: $f(f(z)) = z$.

   d) Welches Bild hat die Gerade g mit der üblichen Koordinatengleichung $g : y = x + 1$ unter dieser Abbildung?

Dieses Blatt ist mit der Arbeit abzugeben

Lösungen Mathematik schriftlich Herbst 2003

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann.

---

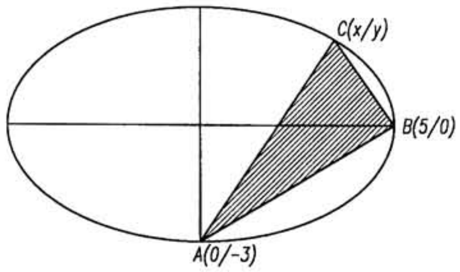
1. $F_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y+3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}(5y + 15 - 3x) \qquad (1)$ 3P

   Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2} \qquad (2)$ 2P

   (2) in (1):

$$\frac{1}{2}\left(\pm 3\sqrt{25 - x^2} + 15 - 3x\right) \stackrel{!}{=} 6$$
$$\pm\sqrt{25 - x^2} = x - 1$$
$$25 - x^2 = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$x_{1,2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$
3P

   Mit Beachtung der Vorzeichen folgt: $\underline{\underline{C_1(4|\frac{9}{5})}}$, $\underline{\underline{C_2(-3|-\frac{12}{5})}}$ 2P



2. Ebenengleichung $\mathbb{E}_{ABC}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ -48 \\ -24 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbb{E} : 7x - 4y - 2z = 0$ 3P

Gerade g_{PQ}:

$$g_{PQ} : \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1P

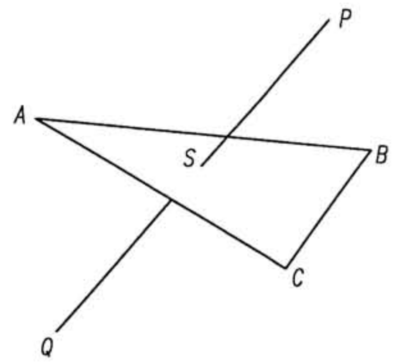
Durchstosspunkt $S = g_{PQ} \cap \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} 7(10 + 6\lambda) - 4 \cdot 4 - 2(7 + \lambda) &= 0 \\ 40\lambda + 40 &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

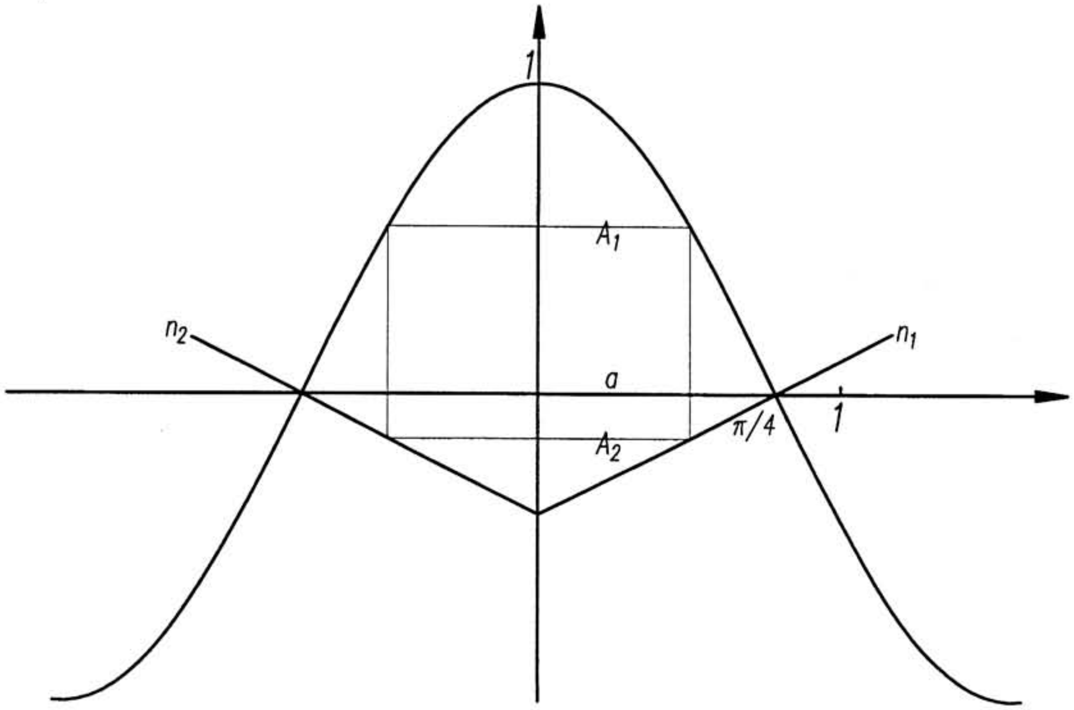
$\Rightarrow S(4/4/6)$ 2P

$$\overrightarrow{AS} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow u = \frac{1}{3},\ v = \frac{1}{2}$$ 2P

Aus $u + v < 1$ oder mit Zeichnung folgt:
S liegt innerhalb des Dreiecks ABC, also ist Q von P aus **nicht sichtbar**. 2P



3. a)



2P

b) Nullstellen: $\pm\dfrac{\pi}{4}$

Gleichung der Normalen:
$f'(x) = -2\sin(2x),\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \Longrightarrow$ Steigung von $n_1 : m = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$

$$n_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$$
$$n_2 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$$ 1P

Flächeninhalt:
$$\frac{1}{2}A = A_1 + A_2$$
$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{64}$$
$$\underline{\underline{A = 1 + \frac{\pi^2}{32} \approx 1.31}}$$ 3P

c) $\dfrac{1}{2}U(a) = 2a + \cos(2a) - \left(\dfrac{1}{2}a - \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{3}{2}a + \cos(2a) + \dfrac{\pi}{8}$ 2P

$\dfrac{1}{2}U'(a) = \dfrac{3}{2} - 2\sin(2a) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sin(2a) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow a_{\max} \approx 0.42$ 1P

$\underline{\underline{U_{\max}}} = 3a_{\max} + 2\cos(2a_{\max}) + \dfrac{\pi}{4} \approx \underline{\underline{3.38}}$ 1P

4. a) $f(i) = \dfrac{1+i}{i} = \underline{\underline{1-i}}$ 1P

$f(3-i) = \dfrac{1+i}{3-i} \cdot \dfrac{3+i}{3+i} = \underline{\underline{\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i}}$ 1P

b) $\dfrac{1+i}{z} = z \Longrightarrow z^2 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(45°) + i\sin(45°))$

$z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos(22.5°) + i\sin(22.5°)) \approx \underline{\underline{1.10 + 0.46i}}$

$z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos(202.5°) + i\sin(202.5°)) \approx \underline{\underline{-1.10 - 0.46i}}$ 2P

c) $f(f(z)) = f\left(\dfrac{1+i}{z}\right) = \dfrac{1+i}{\frac{1+i}{z}} = z$ 2P

d) $f(x+iy) = \dfrac{1+i}{x+iy} = \dfrac{x+y+i(x-y)}{x^2+y^2}$

$\Longrightarrow$Abbildungsgleichungen:
$u = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \quad v = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

Aus c) oder durch Auflösen obiger Gleichungen nach x, y folgen die Abbildungsgleichungen der Umkehrabbildung:
$x = \dfrac{u+v}{u^2+v^2}, \quad y = \dfrac{u-v}{u^2+v^2}$

Für das Bild von $g : y = x + 1$ folgt dann
$\bar{g} : \dfrac{u-v}{u^2+v^2} = \dfrac{u+v}{u^2+v^2} + 1 \Rightarrow u^2 + v^2 + 2v = 0 \Rightarrow u^2 + (v+1)^2 = 1$

Das Bild von g ist also ein Kreis mit Mittelpunkt $M(0/-1)$ und Radius 1. 4P

ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfung **Frühling 2004**

MATHEMATIK (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:

Vorname:

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000

1. Von einem Dreieck ABC kennt man die Koordinaten der Eckpunkte $A(6/-3)$ und $B(-\frac{3}{4}/6)$ sowie die Gleichung des Inkreises $k: x^2 + y^2 = 9$.
   - a) Zeige, dass der Kreis k die Gerade g_{AB} berührt.
   - b) Bestimme die Koordinaten der Ecke C.

2. Gegeben sind die Folgen
$$a_n = \frac{n+1}{2^n}, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
   - a) Berechne die Werte der Folgenglieder s_1, s_2, s_3, s_4.
   - b) Für s_n existiert die explizite Darstellung
$$s_n = p - \frac{n+q}{2^n}.$$
     Bestimme p und q und beweise die Allgemeingültigkeit der Darstellung mit vollständiger Induktion.

3. Ein Kreiskegel mit Grundkreisradius $r = 12$ und Höhe $h = 16$ wird zentrisch durchbohrt (Bohrachse: Spitze-Grundkreismittelpunkt).
   - a) Drücke die <u>Gesamt</u>oberfläche des gelochten Körpers durch den Bohrradius x aus.
   - b) Welches Volumen hat der entstehende Körper, wenn der Bohrradius so gewählt wurde, dass die Gesamtoberfläche des gelochten Körpers maximal ist.

4. Gegeben sind die beiden Funktionen
$$f(x) = \sqrt{2\sin(x)}, \quad g(x) = \sqrt{1-\cos(x)}.$$
   - a) Skizziere die Graphen im Bereich $D = [0, \pi]$ mit 2 cm Einheit.
   - b) Die Graphen der Funktionen besitzen im Bereich D neben dem Ursprung einen weiteren Schnittpunkt S. Berechne dessen exakte x–Koordinate x_S.
   - c) Die beiden Kurven begrenzen für $0 \leq x \leq x_S$ ein Flächenstück, welches man um die x–Achse rotieren lässt. Wie gross wird das Volumen des entstehenden Körpers (auf 2 Nachkommastellen)?

Dieses Blatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik schriftlich Frühling 2004

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann.

---

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{4} \\ 9 \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$c: 4x + 3y - 15 = 0$

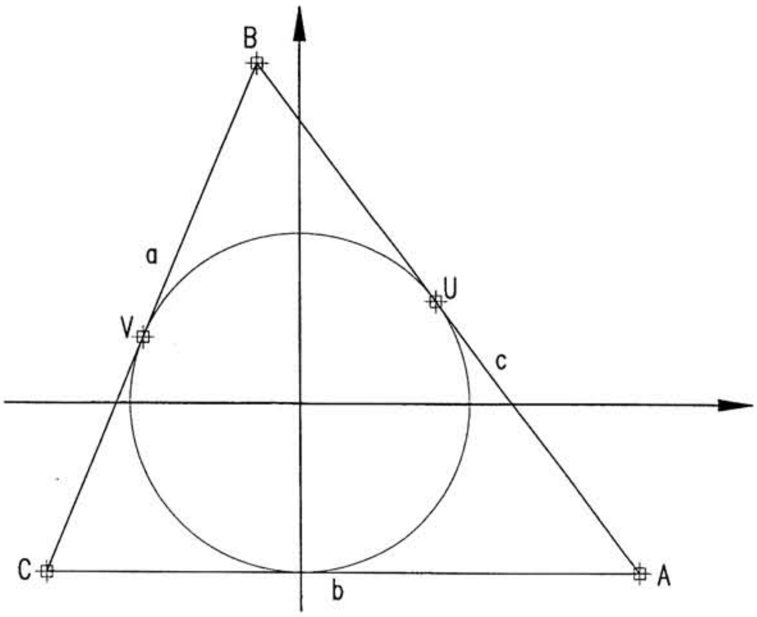
$d(M(0/0), c) = \left| \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 - \frac{15}{5} \right| = 3 \quad \checkmark$ 3P

b) Polare bzg. B: $-\frac{3}{4}x + 6y = 9 \Rightarrow x = 8y - 12$

Einsetzen in die Kreisgleichung: $(8y-12)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 65y^2 - 192y + 135 = 0$

$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{9}{5}, \frac{15}{13} \Rightarrow V\left(-\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right)$ 4P

$\left| \begin{array}{lrcr} a: & -\frac{36}{13}x + \frac{15}{13}y & = & 9 \\ b: & y & = & -3 \end{array} \right| \Rightarrow x = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C(-4.5/-3)}}$ 3P



2. a) $(a_n) = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}$

$(s_n) = 1, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{41}{16}$ 2P

b) $n = 1 : p - \dfrac{1+q}{2} = 1 \quad (1)$

$n = 2 : p - \dfrac{2+q}{4} = \dfrac{7}{4} \quad (2)$

$(1)\&(2) \Rightarrow \underline{\underline{p = 3, q = 3}}$ 3P

Beweis:

Verankerung ($n = 1$): $3 - \dfrac{1+3}{2} = 1\checkmark$

Voraussetzung: $s_n = 3 - \dfrac{n+3}{2^n}$

zu zeigen: $s_{n+1} = 3 - \dfrac{n+4}{2^{n+1}}$

Beweis: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \overset{\text{Vorauss.}}{=} 3 - \dfrac{n+3}{2^n} + \dfrac{n+2}{2^{n+1}} = 3 - \dfrac{2n+6-n-2}{2^{n+1}} = 3 - \dfrac{n+4}{2^{n+1}}$ 5P

3. a) $S = \pi\bar{s}(r+x) + \pi r^2 - \pi x^2 + 2\pi x\bar{h}$ 2P

Nebenbedingungen:

$$s = \sqrt{144+256} = 20$$

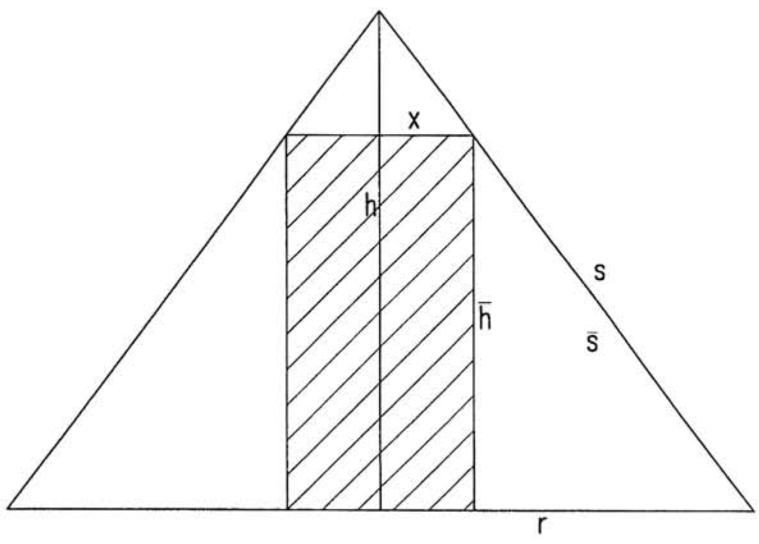
$$s : r = (s-\bar{s}) : x \Rightarrow \bar{s} = 20 - \frac{5}{3}x$$

$$h : r = (h-\bar{h}) : x \Rightarrow \bar{h} = 16 - \frac{4}{3}x$$

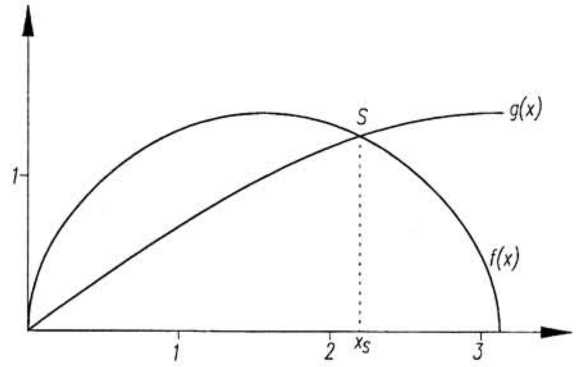
$$\Longrightarrow S = \pi\left(384 + 32x - \frac{16}{3}x^2\right)$$ 4P

b) $S' = \pi\left(32 - \frac{32}{3}x\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 3, \quad \bar{h} = 12$ 2P

$$V = \frac{\pi \cdot 12}{3}(144+9+36) - \pi\cdot 9\cdot 12 = \underline{\underline{648\pi}}$$ 2P



4. a)



2P

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\sin x} &= \sqrt{1-\cos x}\\
2\sin x &= 1-\cos x\\
2\sqrt{1-\cos^2 x} &= 1-\cos x\\
4-4\cos^2 x &= 1-2\cos x+\cos^2 x\\
5\cos^2 x-2\cos x-3 &= 0\\
\cos x &= \begin{cases} 1 & \Rightarrow x=0\\ -\frac{3}{5} & \Rightarrow \underline{\underline{x_S=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)}} \approx 2.21\end{cases}
\end{aligned}$$

4P

c)

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{x_S}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)\,dx\\
&= \pi\int_0^{x_S}(2\sin x)-1+\cos x)\,dx\\
&= \pi\Big[-2\cos x-x+\sin x\Big]_0^{x_S} \approx \underline{\underline{5.61}}
\end{aligned}$$

4P