

Schriftliche Aufnahmeprüfung Herbst 2006

MATHEMATIK (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:

Vorname:

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 5.9.2000

1. Die beiden Geraden $a: y = 1$ und $b: y = \frac{2}{5}x$ teilen das Innere des Kreises k (Mittelpunkt $M(6/1)$, Radius $r = 5$) in vier Teilgebiete. Skizzieren Sie die Situation und berechnen Sie den Flächeninhalt jenes Teilgebietes, welches den Punkt $P(6/2)$ enthält.
2. Nikotin wird im Körper so abgebaut, dass die Menge exponentiell abnimmt. Durch das Rauchen einer Zigarette werden 5 mg Nikotin aufgenommen, nach einer Stunde sind noch 4 mg Nikotin vorhanden.
 - a) Nach welcher Zeit (auf Minuten genau) sind weniger als 1 mg Nikotin vorhanden?
 - b) Jemand raucht jede Stunde eine Zigarette. Wie viel Nikotin hat sich im Körper 14.5 Stunden nach dem Rauchen der ersten Zigarette angesammelt?
3. Gegeben ist das Dreieck $A(2/-1/0)B(2/0/-2)C(1/0/0)$.
 - a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
 - b) Um wie viele Einheiten muss der Punkt C senkrecht zur Dreiecksebene verschoben werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks 9 Mal grösser wird?
4. Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ soll im Intervall $[1, e]$ durch eine lineare Funktion $g(x) = mx$ 'möglichst gut' approximiert werden. Möglichst gut bedeutet hier, dass der Wert des Integrals

$$\int_1^e (f(x) - g(x))^2 dx$$

minimal wird. Für welche Steigung m der Geraden g ist dies der Fall?

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik schriftlich Herbst 2006

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$$N = 1 + \frac{p}{8},$$

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden).

1. $a \cap b \Rightarrow T(\frac{5}{2}/1)$ 1P

Kreisgleichung $k : (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 1P

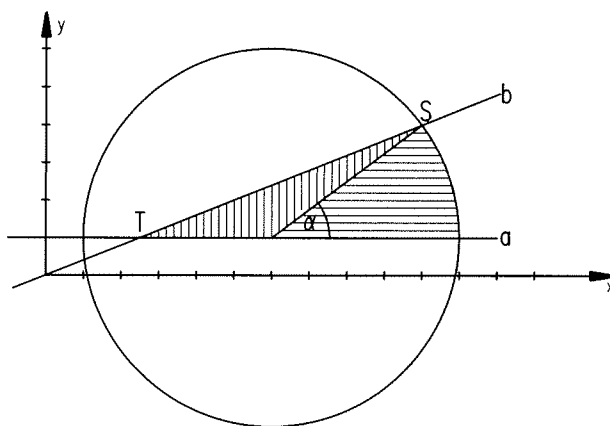
$k \cap b \Rightarrow S(10/4)$ 2P

$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$

$A_{\text{Sektor}} = \frac{25}{2} \alpha \approx 8.044$ 2P

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot (6 - \frac{5}{2}) \cdot 3 = 5.25$

$A = 13.294$ 2P



2P

2. a) $n(t) = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^t$ 2P

$$5 \left(\frac{4}{5}\right)^t < 1 \Rightarrow t > \frac{\ln \frac{1}{5}}{\ln \frac{4}{5}} \approx 7.212 \text{ h} \Rightarrow 7 \text{ h } 13 \text{ min}$$
 3P

b) Nach n Stunden ($n + 1$ Zigaretten) befinden sich

$$5 + 5 \cdot 0.8 + 5 \cdot 0.8^2 + \dots + 5 \cdot 0.8^n = 5 \frac{1 - 0.8^{n+1}}{1 - 0.8}$$

Milligramm Nikotin im Körper. 3P

Nach 14 h: $n_0 = 5 \frac{1 - 0.8^{15}}{1 - 0.8} \approx 24.12 \text{ mg}$

Nach 14.5 h: $n = 24.12 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 21.57 \text{ mg}$ 2P

3. $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2P

a) $F = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2}$ 2P

b) $C'(1 + 2\lambda/2\lambda/\lambda), \overline{AC'} = \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda \\ 1 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ 2P

$$F' = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC'}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 5\lambda + 2 \\ -4\lambda + 2 \\ -2\lambda + 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} 3\sqrt{5\lambda^2 + 1}$$

$$5\lambda^2 + 1 = 81 \Rightarrow \lambda = \pm 4 \Rightarrow \text{Verschiebung um } 4 \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 12$$
 4P

$$4. \quad A(m) = \int_1^e (\ln x - mx)^2 dx = \int_1^e (\ln^2 x - 2mx \ln x + m^2 x^2) dx \quad 1P$$

$$\int_1^e \ln^2 x dx = [\ln^2 x - 2 \ln x + 2]_1^e = e - 2 \quad (\text{Partiell, Substitution, z.T. Formelsammlung}) \quad 3P$$

$$\int_1^e 2x \ln x dx = \left[x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{2} \quad (\text{Partiell}) \quad 2P$$

$$\Rightarrow A(m) = m^2 \left(\frac{e^3 - 1}{3} \right) - m \frac{e^2 + 1}{2} + e - 2 \quad 2P$$

$$A'(m) = 2m \left(\frac{e^3 - 1}{3} \right) - \frac{e^2 + 1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{3(e^2 + 1)}{4(e^3 - 1)} \approx 0.330 \quad 2P$$

