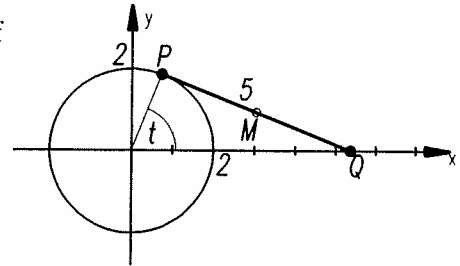


Schriftliche Aufnahmeprüfung Herbst 2007

MATHEMATIK (deutsch)

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten.
 Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 5.9.2000

1. Im skizzierten Mechanismus bewegt sich der Punkt P auf einem Kreis mit Radius 2, der Punkt Q auf der x -Achse. Die Länge der Stange PQ ist 5.
 - a) Berechnen Sie allgemein die x -Koordinate des Punktes Q in Abhängigkeit des Winkels t .
 - b) Für welchen Winkel $t \in [0, \pi]$ hat Q die Koordinaten $(6|0)$.
 - c) Für welchen Winkel $t \in [0, \pi]$ liegt der Mittelpunkt M der Stange PQ auf der Geraden $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$?



2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt[4]{2^x}$.
 - a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Bereich $x \in [-4, 8]$. Zeichnen Sie auch die Sehne durch die Punkte $P(0|?)$ und $Q(8|?)$ ein. (Einheit 1 cm)
 - b) Welche Steigung hat der Graph von f im Punkte Q ?
 - c) Für welches $x \in [0, 8]$ ist der vertikale Abstand (parallel zur y -Achse) zwischen Sehne und Graph von f am Grössten?
3. Bestimmen Sie die Gleichungen jener Geraden durch $P(6|3|0)$, welche in der Ebene $\mathbb{D} : x + y - 9 = 0$ liegen und mit der Ebene $\mathbb{E} : x + z - 4 = 0$ einen Winkel von 45° einschliessen. Bestimmen Sie zudem die Schnittpunkte dieser Geraden mit der xz -Ebene, sofern sie existieren.
4. In einem Quadrat mit Seitenlänge 1 betrachten wir die Menge aller Punkte, für die der Abstand zum Mittelpunkt des Quadrates gleich dem Abstand zum Rand des Quadrates ist. (Die Menge besteht also aus 4 Parabelbögen). Zeichnen Sie die Situation und betrachten Sie den Durchschnitt D der 4 Parabel-Innengebiete. Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt von D . Verwenden Sie dazu ein Koordinatensystem mit Nullpunkt in einem Parabelscheitel.

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik schriftlich Herbst 2007

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

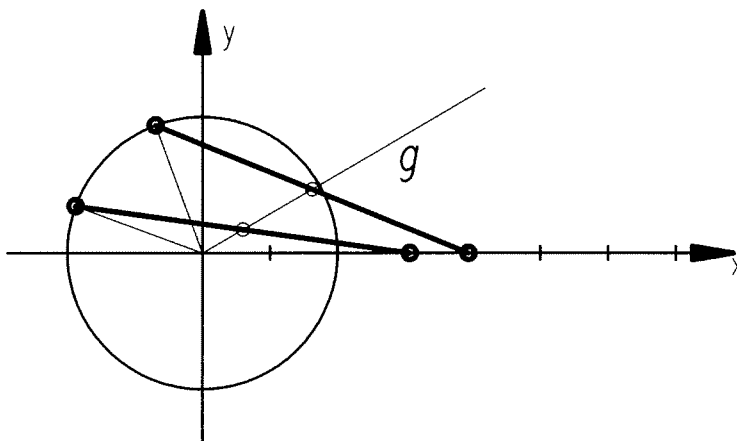
$$N = 1 + \frac{p}{8},$$

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnoten aufrunden).

1. a) $x(t) = 2 \cos t + \sqrt{25 - 4 \sin^2 t}$ 2P

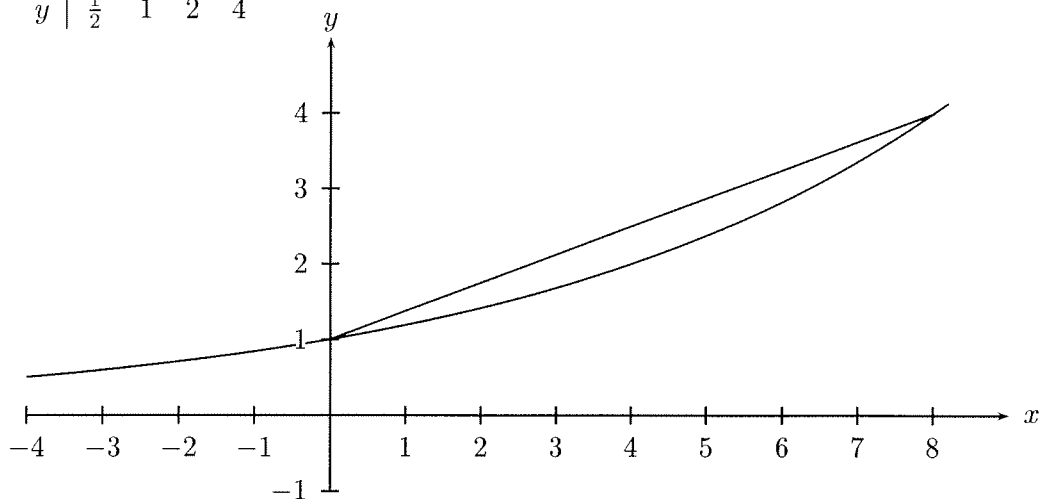
b) $\sqrt{25 - 4 \sin^2 t} = 6 - 2 \cos t$ | quadrieren
 $25 - 4 \sin^2 t = 36 - 24 \cos t + 4 \cos^2 t$ | $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
 $\cos t = \frac{15}{24}$
 $t = \arccos \frac{5}{8} \approx 51.32^\circ$ 4P

c) $M \left(\frac{4 \cos t + \sqrt{25 - 4 \sin^2 t}}{2} \mid \frac{2 \sin t}{2} \right)$
 $M \in g \Rightarrow \sqrt{25 - 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{3} \sin t - 4 \cos t$
 $16\sqrt{3} \sin t \cos t = -9$
 $\sin 2t = \frac{-9}{8\sqrt{3}} \Rightarrow 2t = 319.49^\circ \text{ oder } 220.51^\circ$
 $t = 159.75^\circ \text{ oder } t = 110.25^\circ$ 4P



2. a)

x	-4	0	4	8
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4



3P

b) $f(x) = 2^{\frac{x}{4}}$
 $\ln f = \frac{x}{4} \ln 2$
 $\frac{f'}{f} = \frac{1}{4} \ln 2$
 $f'(x) = 2^{\frac{x}{4}} \frac{1}{4} \ln 2$
 $f'(8) = \ln 2$

2P

c) Geradengleichung $y = \frac{3}{8}x + 1$

1P

$$d(x) = \frac{3}{8}x + 1 - 2^{\frac{x}{4}}$$

$$d'(x) = \frac{3}{8} - 2^{\frac{x}{4}} \frac{1}{4} \ln 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{8} = 2^{\frac{x}{4}} \frac{1}{4} \ln 2$$

$$\frac{3}{2 \ln 2} = 2^{\frac{x}{4}} \quad | \ln$$

$$x = \frac{4 \ln\left(\frac{3}{2 \ln 2}\right)}{\ln 2} \approx 4.45$$

4P

$$3. \quad \vec{n}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \vec{u} \quad \text{mit} \quad \vec{u} \cdot \vec{n}_D = 0 \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \quad 3P$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{n}_E) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_E}{|\vec{u}| |\vec{n}_E|} = \frac{x+z}{\sqrt{2x^2+z^2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$x+z = \sqrt{2x^2+z^2} \quad 3P$$

$$2xz = x^2$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2z$$

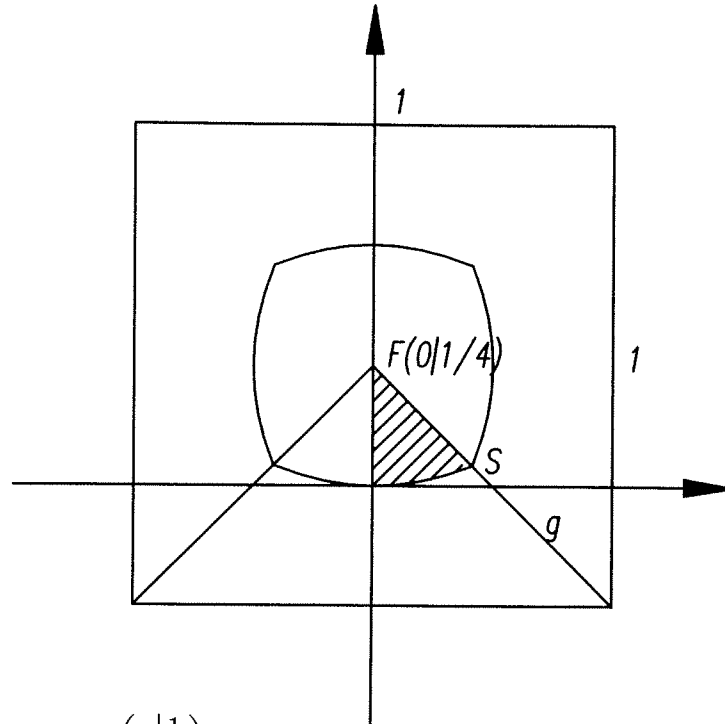
$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1P$$

$$g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1P$$

$g_1 \cap xz$ -Ebene existiert nicht 1P

$g_2 \cap xz$ -Ebene: $\lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow S(9|0|\frac{3}{2})$ 1P

4.



2P

Parabel mit Brennpunkt $F\left(0 \mid \frac{1}{4}\right)$ hat Gleichung $p: y = x^2$

2P

Geradengleichung $g: y = -x + \frac{1}{4}$

1P

$$g \cap p: x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x_S = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

1P

$$\begin{aligned} \frac{A}{8} &= \int_0^{x_S} \left(-x + \frac{1}{4} - x^2\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{x_S} \\ &= \frac{-x}{12} [6x - 3 + 4x^2]_0^{x_S} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{24} (-3 + 3\sqrt{2} - 3 + 1 - 2\sqrt{2} + 2) \\ &= \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{24} \end{aligned}$$

$$A = \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{3} \approx 0.219$$

4P