Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2003**

Anwendungen der Mathematik (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:
Vorname:

Für die Lösungen sind separate Blätter zu verwenden. Die Aufgabe 4 ist auf beiliegendem Blatt zu lösen

Alle Blätter, dieses Aufgabenblatt inbegriffen, sind am Schluss der Prüfung abzugeben.

1. Löse das folgende Gleichungssystem mittels des Gaussverfahrens. Die einzelnen Schritte sind anzugeben. Für welche Werte von a hat das System jeweils genau eine Lösung?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + a^2 x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - a^2 x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

2. In welchem Bereich (auf eine Stelle nach dem Komma) liegt die kleinste positive Lösung der Gleichung

$$\tan(x) = x \text{ ?}$$

Bestimme diese Lösung mittels des Newtonschen Verfahrens auf vier Stellen nach dem Komma. Die einzelnen Schritte müssen erkennbar sein.

3. Gegeben sind die windschiefen Geraden g und f sowie der Punkt T.
Von einem Würfel liegt die Kante AB auf g, eine zu AB parallele Seitenfläche enthält f und eine zu AB senkrechte Seitenfläche enthält T.

Bestimme den Würfel. Verlangt sind eine stereometrische Skizze und eine Beschreibung des stereometrischen Lösungsverfahrens (**keine** Konstruktion und **keine** Konstruktionsbeschreibung im Zweitafelsystem!)

4. Eine Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius $r = 4$ cm berührt die Zeichenebene im Punkt A. Eine Lichtquelle L hat die Normalprojektion L' und den Abstand $d = 2$ cm von der Zeichenebene. (siehe Arbeitsblatt)

Bestimme die Normalprojektion der Kugel auf die Zeichenebene. Konstruiere dann den Schatten, den die Kugel bei Zentralbeleuchtung von L aus auf die Zeichenebene bildet. Speziell verlangt sind die Achse, der Scheitel und die Asymptoten.

Aufgabe 4

Lösungen: Anwendungen der Mathematik (Herbst 2003))

1. Gaussscher Algorithmus bekannt 1
   Algorithmus richtig durchgeführt 3
   Lösungen:

$$x_1 = \frac{7a^4 - 12a^2 - 40}{5\left(3a^2 - 4\right)} \qquad x_2 = \frac{3a^2\left(6 - a^2\right)}{5\left(3a^2 - 4\right)} \qquad x_3 = \frac{6 - a^2}{3a^2 - 4} \qquad 3$$

   genau eine Lösung für $a \neq \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 1 **8**

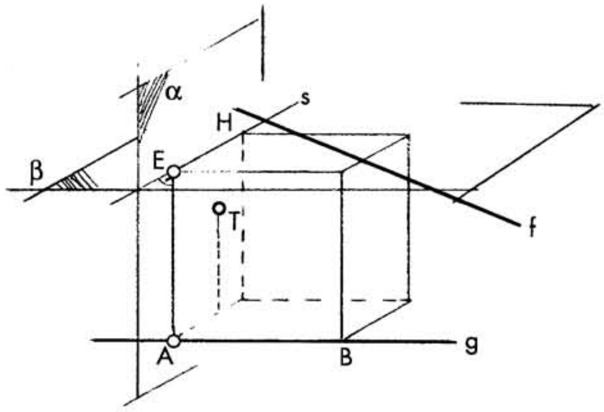
2. $f(x) = \tan x - x \Rightarrow f'(x) = \tan^2 x$ 1
   Nullstelle zwischen 4.4 und 4.5 2

x	f(x)	f'(x)
4.4	−1.303676	9.58722
4.53598	1.07375	31.46918
4.5018596	0.177687	21.89815
4.4937454	0.00679	20.254847
4.4934099990	0.0000107	20.190829
4.4934094		

3

   f(4.4934) < 0 ==> x zwischen 4.4934 und 4.49341 ==> x = 4.4934 2 **8**

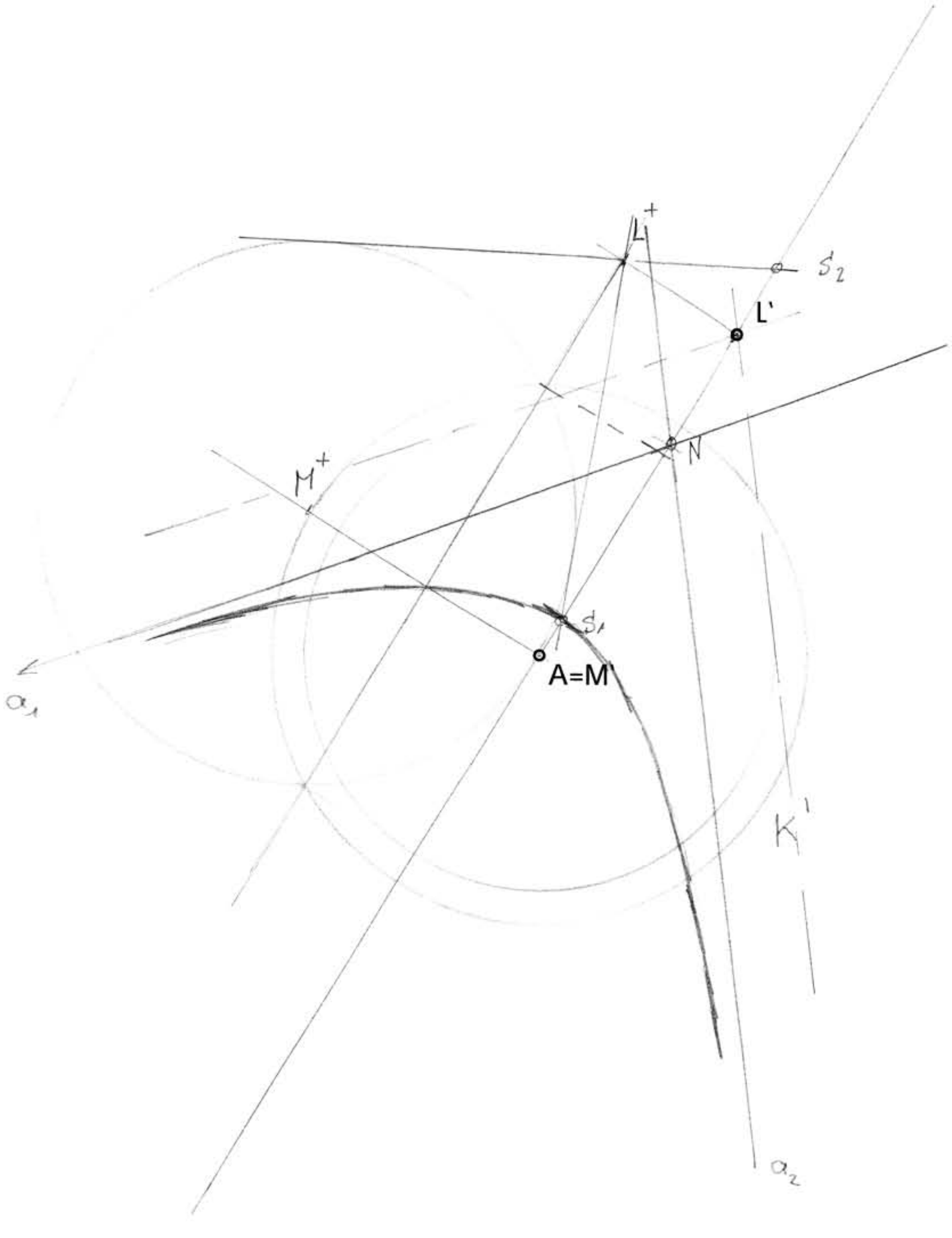
3. saubere und vollständige stereometrische Skizze: 3



   Normalebene α zu g durch T mit g geschnitten ==> A 1
   Normalebene β zu α durch f mit α geschnitten
   ==> Gerade s, enthält eine zu AB windschief-senkrechte Würfelkante 2
   Lot von A auf s ==> Ecke E, Würfelkante AE 1
   Ecken B und H, Würfel vervollständigen 1 **8**

4. Lösungsbeschreibung 1
   Konstruktion: Riss der Kugel 1
   Asymptotenrichtungen 2
   Scheitel 2
   Asymptoten 2 **8**

Aufgabe 4



ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Frühjahr 2004**

Anwendungen der Mathematik (deutsch)

Kandidat.-Nr.

Name:
Vorname:

Für die Lösungen sind separate Blätter zu verwenden. Die Aufgabe 3 ist auf beiliegendem Blatt zu lösen

Alle Blätter, dieses Aufgabenblatt inbegriffen, sind am Schluss der Prüfung abzugeben.

1. Ein neues Bürogebäude mit einer Bodenfläche von $3000\,m^2$ soll derart mit einem Kunststoffbelag versehen werden, dass die Anschaffungskosten möglichst gering sind. Es stehen drei Sorten zur Verfügung: eine Sorte A zu 30 Franken pro m^2, eine Sorte B zu 15 Franken pro m^2 und eine Sorte C zu 10 Franken pro m^2. Die Reinigungskosten betragen pro Jahr bei der Sorte A 5 Franken pro m^2, bei B 8 Franken pro m^2 und bei C 10 Franken pro m^2. Für die Reinigungskosten stehen im Jahr höchstens 20'000 Franken zur Verfügung. Zudem sollen mindestens $800m^2$ mit der Sorte A belegt werden.
   Wie sind die Beläge zu wählen?

2. Der Term $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 1$ ist für alle x grösser als eine gewisse Zahl k positiv.

   Bestimme k mittels des Newtonschen Verfahrens auf vier Stellen nach dem Komma. Die einzelnen Schritte müssen erkennbar sein.

3. Eine Drehkegelfläche ist durch die Spitze $S(0/0/9)$, der auf der xy–Ebene senkrecht stehenden Achse a und den Punkt $T(-2/3/4)$ auf der Kegelfläche gegeben.

   a) Gesucht ist eine Ebene durch den Punkt T, die die Kegelfläche in einer Parabel so schneidet, dass T der Scheitelpunkt der Parabel ist. Bestimme auch die Scheiteltangente. Verlangt sind eine stereometrische Skizze (Schrägbild) und eine Lösungsbeschreibung (stereometrisches Verfahren oder rechnerische Lösung).

   b) Bestimme einen allgemeinen Parabelpunkt mit Tangente (nur Beschreibung des Vorgehens).

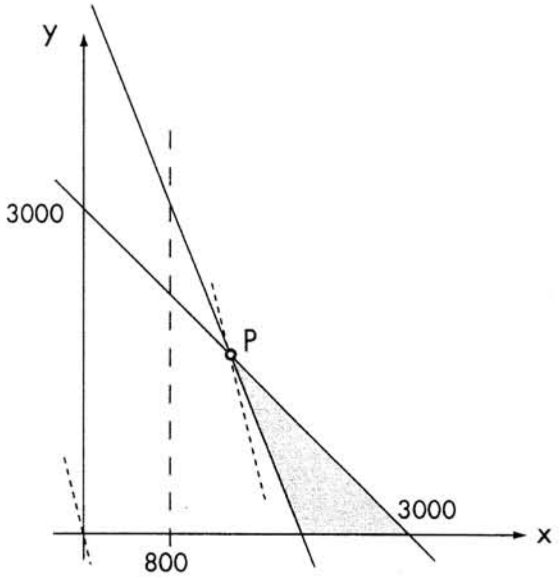
4. Drei Schützen A, B und C schiessen abwechslungsweise in der Reihenfolge A, B, C, A, B, C, A, B, C,...usw. auf eine Zielscheibe. Wer die Scheibe zuerst trifft, ist Sieger. Die Wahrscheinlichkeit, die Scheibe zu treffen, ist für alle Schützen für jeden Schuss gleich p.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass B siegt, ist $\frac{10}{39}$.

Lösungen!

Es werden für jede Aufgabe 8 Punkte erteilt, so dass ein Total von 32 Punkten erreicht werden kann.

1. x m^2 der Sorte A
y m^2 der Sorte B



$x \geq 800$
$y \geq 0$
$x + y \leq 3000$
$5x + 2y \geq 10\,000$ 2
$z = 4x + y$ minimal (Zielfunktion) 1

Zeichnung 2

$P(1333^1/_3 / 1666^2/_3)$ ==>
$1333^1/_3$ m^2 Sorte A, $1666^2/_3$ m^2 Sorte B,
0 m^2 Sorte C 2

minimale Anschaffungskosten = 65 000.– 1 **8**

2. $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 1$
Für $x \geq 1$ ist f(x) immer positiv, für x = 0 negativ ==> grösste Nullstelle zwischen 0 und 1 1

x	f(x)	f'(x)
1	2	13
0.8462	0.3538	8.5594
0.8048	0.0216	7.5246
0.802	0.0001	7.4551
0.8019	2.17 E –9	7.4547
0.8019		

Newton (mit 1 beginnen) 2
Tabelle 3

k = 0,80193 2 **8**

3. gute und vollständige Skizze 2

stereometrische Lösung: Schnittebene parallel einer Tangentialebene τ:

	Beschreibung der Bestimmung von τ und der Schnittebene α	2	
	Parabelachse	1	
	Scheiteltangente	1	
	allgemeiner Punkt mit Tangente	2	**8**
oder rechnerisch:	gute und vollständige Skizze	2	
	z.Bsp. T an der Achse spiegeln==>T*(2/–3/4) und		
	Achsenrichtung $\overrightarrow{ST^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$	1	
	Parabelachse $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$	1	
	Richtung der Scheiteltangente oder direkt aus spezieller Disposition $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	
	Scheiteltangente $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	
	allgemeiner Punkt mit Tangente (Beschreibung)	2	**8**

4. Baum mit Nichttreffer und Treffer für B 2

unendliche geom. Reihe: $(1-p)p + (1-p)^4p + \ldots$ 2

$$\frac{(1-p)p}{1-(1-p)^3} = \frac{10}{39}$$ 1

==> $10p^2 + 9p - 9 = 0$ ==> $p_1 = 0.6$ 2

$p_2 = -1.5$ keine Lösung 1 **8**