ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo

Rektorat

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2010**

MATHEMATIK (Analysis)

Kandidaten-Nummer:	....
NAME:	....
Vorname:	....

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten. *(Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000)*

Aufgabe 1: Zwei unabhängige Kurzaufgaben

a) Gegeben ist die Funktion $k(x) = -x^2 + 6x - 5$. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graphen der Funktion k(x), welche durch den Punkt P(6|-1) gehen.

b) Die Funktion $p(x) = \sqrt{ax^2 + \frac{b}{x}}$ hat im Punkt $T(1|y_0)$ die Tangente mit der Gleichung $4y - 5x - 3 = 0$. Bestimmen Sie die Parameter a und b.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

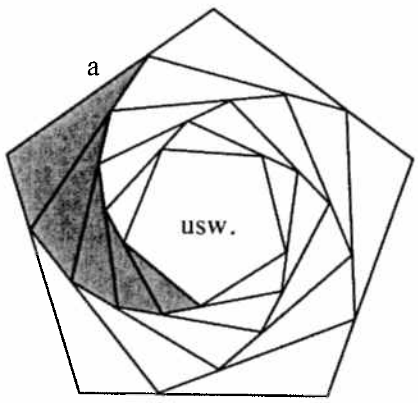
a) Bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendepunkte* des Graphen von h(x). Es werden die exakten Resultate verlangt, inklusive Bestimmung des Typs der Extrema.
(* Die Kontrolle mit der dritten Ableitung wird hingegen nicht verlangt.)

b) Die Fläche A wird vom Graphen der Funktion h(x), von der x-Achse und von der Gerade x = k (k > 1) im ersten Quadranten begrenzt. Es gilt A = 2. Bestimmen Sie k.

Aufgabe 3: Einem regulären Fünfeck (Pentagon) mit der Seite a wird ein zweites Pentagon eingeschrieben, so dass seine Ecken die Seiten des ersten Pentagons im Verhältnis 2:1 teilen. Dieser Vorgang wird unendlich oft wiederholt.

a) Berechnen Sie die Fläche der unendlichen Dreiecksspirale, deren Anfang in der Figur grau markiert ist.

b) Wie viele Dreiecke sind nötig, um mindestens 99.9% der unendlichen Dreiecksspirale abzudecken?



Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 16x}{x^2 - 8x + 16}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der Funktion f(x) und ihre Nullstellen. Beweisen Sie, dass x = 4 die Symmetrieachse des Graphen von f(x) ist.

b) In welchen Punkten schneiden sich der Graph von f(x) und ihre horizontale Asymptote?

c) Bestimmen Sie die Länge der Seiten des Rechtecks mit kleinstem Umfang, das eine Seite auf der horizontalen Asymptote und zwei Ecken auf dem Funktionsgraphen hat.

Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik schriftlich Herbst 2010

Für jede Aufgabe werden 10 Punkte erteilt, sodass ein Total von 40 Punkten erreicht werden kann. Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss

$$N = 1 + \frac{p}{8}$$

wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Aufgabe 1 – Teil a)

1. Lösungsweg

Allgemeine Gleichung der linearen Funktion, die durch P(6|-1) geht:

$$y = m(x-6) - 1 \qquad \textbf{(1P)}$$

Schnittpunkte mit k(x):

$$m(x-6) - 1 = -x^2 + 6x - 5$$

$$x^2 + (m-6)x + (4-6m) = 0 \qquad \textbf{(1P)}$$

Die Diskriminante der quadratischen Gleichung muss Null sein:

$$(m-6)^2 - 4(4-6m) = 0 \qquad \textbf{(1P)}$$

$$m^2 + 12m + 20 = 0$$

$$(m+2)(m+10) = 0$$

Die Steigung ist $m_1 = -2$ oder $m_2 = -10$. **(1P)**

Punkt P(6|-1) in die Gleichungen $y' = -2x + q$ und $y'' = -10x + q$ einsetzen.
Die zwei Tangenten haben folgende Gleichungen: $\mathbf{y' = -2x + 11}$ und $\mathbf{y'' = -10x + 59}$ **(1P)**

2. Lösungsweg

Allgemeiner Punkt auf dem Funktionsgraphen: $Q(x_0 \mid -x_0^2 + 6x_0 - 5)$

Steigung der Gerade durch PQ entspricht k'(x₀): $\frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} = k'(x_0)$ **(1P)**

$$\frac{(-x_0^{\,2} + 6x_0 - 5) - (-1)}{x_0 - 6} = -2x_0 + 6 \qquad \textbf{(1P)}$$

$$-x_0^{\,2} + 6x_0 - 4 = -2x_0^{\,2} + 18x_0 - 36$$

$$x_0^{\,2} - 12x_0 + 32 = 0 \qquad \textbf{(1P)}$$

Es folgt: $x_0' = 4,\ x_0'' = 8$ **(1P)**

Die Tangentialpunkte sind somit $Q'(4 \mid 3), Q''(8 \mid -21)$.

Die zwei Tangenten haben folgende Gleichungen: $\mathbf{y' = -2x + 11}$ und $\mathbf{y'' = -10x + 59}$ **(1P)**

Aufgabe 1 – Teil b)

Die Ableitung von p(x) ist $p'(x)=\frac{2ax-\frac{b}{x^2}}{2\sqrt{ax^2+\frac{b}{x}}}$. **(1P)**

Die Tangente hat die Gleichung $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$.

Die zwei Bedingungen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & p(1)=\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}=2 \\ \text{(II)} & p'(1)=\frac{5}{4} \end{array}\right\} \quad \textbf{(1P)}$$

Aus (I): $\sqrt{a+b}=2 \quad\Rightarrow\quad a+b=4 \quad\Rightarrow\quad b=4-a$ **(1P)**

Aus (II): $\frac{2a-b}{2\sqrt{a+b}}=\frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad 8a-4b=10\sqrt{a+b} \quad\Rightarrow\quad 8a-4b=20$ **(1P)**

(I) in (II): $8a-4(4-a)=20 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a=3,\ b=1}$ **(1P)**

Aufgabe 2 – Teil a)

- Nullstellen: $\ln(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{N(1\,|\,0)}$ **(1P)**
- 1. Ableitung: $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ **(1P)**
- 2. Ableitung: $h''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-\left(1-\ln(x)\right)2x}{x^4}=\dfrac{-x-2x+2x\ln(x)}{x^4}=\dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$ **(1P)**
- Extrema: $1-\ln(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=e$ **(1P)**

  Kontrolle mit $h''(x)$: $h''(e)=\dfrac{2\ln(e)-3}{e^3}=\dfrac{-1}{e^3}<0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Max\left(e\,|\,e^{-1}\right)}$ **(1P)**
- Wendepunkte: $2\ln(x)-3=0 \quad\Rightarrow\quad x=e^{\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{W\left(e^{\frac{3}{2}}\,|\,\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$ **(1P)**

Aufgabe 2 – Teil b)

Stammfunktion von h(x):

Substitution $f(z)=z,\ u(x)=\ln(x),\ u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{x}dx=\int_a^b \ln(x)\frac{1}{x}dx=\int_a^b f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(z)dz=\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\ln(a)}^{\ln(b)}$$ **(2P)**

Bemerkung: mit partieller Integration geht es auch.

Flächeninhalt A = 2:

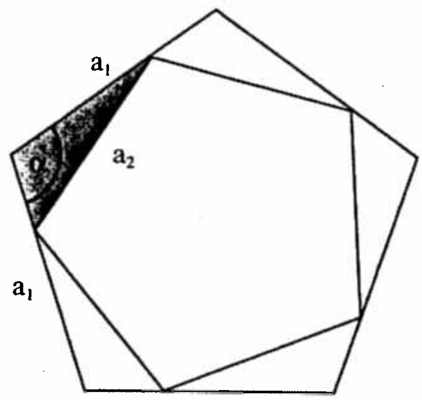
$$2=\int_1^k h(x)dx=\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\ln(1)}^{\ln(k)}=\left[\frac{1}{2}\ln^2(k)\right]-\left[0\right]$$ **(1P)**

$\Rightarrow \quad 4=\ln^2(k)$

$\Rightarrow \quad \pm 2=\ln(k)$

$\Rightarrow \quad \mathbf{k=e^2}$ ($k=e^{-2}$ ist kleiner als 1.) **(1P)**

Aufgabe 3 – Teil a)



- $a_1 := a,\ \alpha = 108°$
- Fläche 1. Dreiecks: $A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin(\alpha) = \frac{a^2}{9}\sin(\alpha)$ **(1P)**
- Bestimmung von a_2 mit dem Cosinus-Satz:

$$a_2^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2\frac{a}{3}\frac{2a}{3}\cos(\alpha) = a^2\frac{5-4\cos(\alpha)}{9}$$ **(1P)**

- Quotient q der geometrischen Folge:

$$q = \frac{a_2}{a} = \sqrt{\frac{5-4\cos(\alpha)}{9}} \approx 0.8324$$ **(1P)**

Fläche der unendlichen Spirale:

- Quotient der geometrischen Folge der Dreiecksflächen: $q^2 = \frac{5-4\cos(\alpha)}{9} \approx 0.6929$ **(1P)**
- $A_\infty = A_1\frac{1}{1-q^2} = \frac{a^2}{9}\sin(\alpha)\cdot\frac{1}{1-\frac{5-4\cos(\alpha)}{9}} = \mathbf{\frac{a^2\sin(\alpha)}{4(1+\cos(\alpha))} \approx 0.3441\,a^2}$ **(2P)**

Aufgabe 3 – Teil b)

$$\begin{aligned} 99.9\%\cdot s_\infty &\le s_n \\ 0.999\cdot A_1\frac{1}{1-q^2} &\le A_1\frac{1-q^{2n}}{1-q^2} \\ 0.999 &\le 1-q^{2n} \\ q^{2n} &\le 0.001 \end{aligned}$$

(1P)

(1P)

Sei m, so dass $q^{2m} = 0.001$

Dann gilt: $m = \log_{(q^2)}(0.001) = \frac{\ln(0.001)}{\ln(q^2)} \approx 18.83$ **(1P)**

$\Rightarrow$ $\mathbf{n = 19}$ **(1P)**

Aufgabe 4 – 1. Lösungsweg

Teil a)

- Funktionsgleichung: $f(x)=\dfrac{2x^2-16x}{x^2-8x+16}=\dfrac{2x(x-8)}{(x-4)^2}$
- Definitionsbereich: $(x-4)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=4 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\{4\}$ **(1P)**
- Nullstellen: $2x(x-8)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x_1=0,\; x_2=8} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{N_1(0\,|\,0),\; N_2(8\,|\,0)}$ **(1P)**
- Symmetrie zur Polgerade x = 4: $f(4+x)\overset{?}{=}f(4-x)$

$$f(4-x)=\frac{2(4-x)\big((4-x)-8\big)}{\big((4-x)-4\big)^2}=\frac{2(4-x)(-x-4)}{(-x)^2}=\frac{2(4-x)(-1)(x+4)}{x^2}=\frac{2(x-4)(x+4)}{x^2}$$

$$f(4+x)=\frac{2(4+x)\big((4+x)-8\big)}{\big((4+x)-4\big)^2}=\frac{2(4+x)(x-4)}{x^2}=f(4-x)$$ **(1P)**

Aufgabe 4 – Teil b)

- Asymptote: y = 2
- Schnittpunkte Funktion–Asymptote:

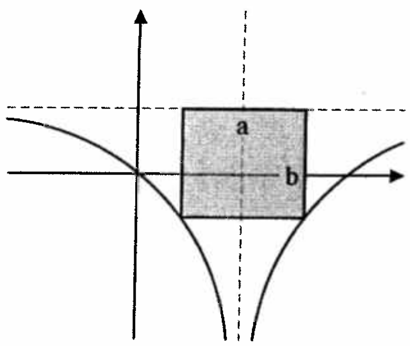
$$\frac{2x^2-16x}{x^2-8x+16}=2$$ **(1P)**

$$2x^2-16x=2x^2-16x+32$$

$$0=32$$

Es existiert also kein Schnittpunkt. **(1P)**

Aufgabe 4 – Teil c)



- Gesuchte Grösse: $U=2(a+b)$
- Nebenbedingungen: $a=2(x-4)$ für $x>4$ **(1P)**

  $b=2-f(x)=2-\dfrac{2x(x-8)}{(x-4)^2}$ **(1P)**

- Umfang durch x beschreiben:

$$U=4(x-4)+2\left(2-\frac{2x(x-8)}{(x-4)^2}\right)=4x-12-4\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$$

Lösung:

$$U'=4-4\frac{(2x-8)(x-4)^2-(x^2-8x)2(x-4)}{(x-4)^4}=4-4\frac{(2x-8)(x-4)-(x^2-8x)2}{(x-4)^3}=4-4\frac{32}{(x-4)^3}$$ **(2P)**

$U'=0 \quad\Rightarrow\quad (x-4)^3=32 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x=4+\sqrt[3]{32}\approx 7.175} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a\approx 6.35,\; b\approx 3.17}$ **(1P)**

Aufgabe 4 – 2. Lösungsweg

Die Funktion kann auch so dargestellt werden: $f(x) = 2 - \frac{32}{(x-4)^2}$

Die Punkte werden in diesem Fall wie folgt verteilt:

Aufgabe 4 – Teil a)

- Funktionsgleichung: $\mathbf{f(x) = 2 - \frac{32}{(x-4)^2}}$ **(1P)**
- Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ **(1P)**
- Nullstellen: $\mathbf{N_1(0|0),\ N_2(8|0)}$ **(1P)**
- Symmetrie zur Polgerade $x = 4$ **(1P)**

Aufgabe 4 – Teil b)

- Schnittpunkte Funktion–Asymptote: $2 - \frac{32}{(x-4)^2} = 2$ **(1P)**

  Es existiert kein Schnittpunkt. **(1P)**

Aufgabe 4 – Teil c)

- Gesuchte Grösse: $U = 2(a+b)$
- Nebenbedingungen: $a = 2(x-4)$ für $x > 4$ **(1P)**

  $b = 2 - f(x) = \frac{32}{(x-4)^2}$ **(1P)**
- Umfang durch x beschreiben:

$$U = 4(x-4) + 2\frac{32}{(x-4)^2} = 4x - 16 + \frac{64}{(x-4)^2}$$

Lösung:

$$U' = 4 + \frac{-64 \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} = 4 - \frac{128}{(x-4)^3}$$ **(1P)**

$U' = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^3 = 32 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a \approx 6.35,\ b \approx 3.17}$ **(1P)**