ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Rektorat/Zulassungsstelle

Schriftliche Aufnahmeprüfungen **Herbst 2011**

MATHEMATIK I (Analysis)

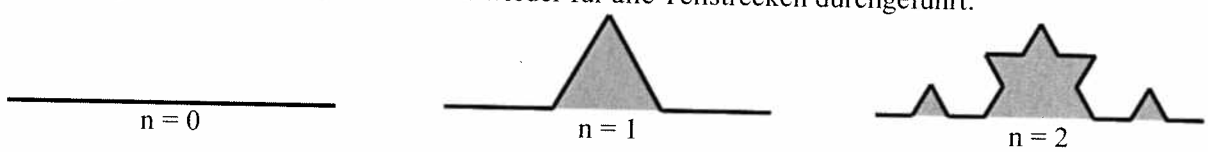
Kandidaten-Nummer:	....
NAME:	....
Vorname:	....

Die Resultate müssen den **vollständigen Lösungsweg** und **alle Zwischenresultate** enthalten. *(Beschluss der Aufnahmeprüfungskommission vom 15.9.2000)*

Aufgabe 1 (7 + 7 Punkte): Zwei unabhängige Kurzaufgaben

a) Der Graph der Parabel 3. Grades $g(x) = x^3 + bx^2 + d$ mit b und $d \in \mathbb{R}$ schneidet die x-Achse in $x = -1$ und berührt sie an der Stelle $x = q$. Skizzieren Sie den Funktionsgraphen und bestimmen Sie b und d. Hinweis: Beginnen Sie mit einem geeigneten Ansatz für g(x).

b) Die Kochkurve geht von einem geraden Streckenstück der Länge 1 aus (siehe Figur n = 0): man teilt dieses Segment in drei gleichlange Teilstrecken und errichtet auf der mittleren ein gleichseitiges Dreieck. Diese Konstruktion wird immer wieder für alle Teilstrecken durchgeführt:



Berechnen Sie die Länge der Kochkurve sowie die graue Fläche jeweils für n = 8 und für $n \to \infty$.

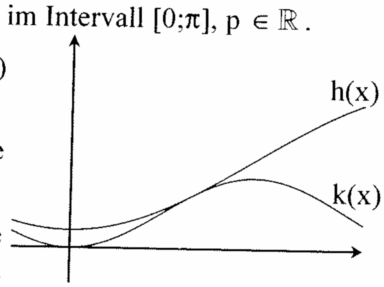
Aufgabe 2 (10 Punkte): Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x$. Im Punkt $A\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ mit $x_0 < 0$ auf dem Graphen von f(x) wird die Tangente gelegt. Die Tangente begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck im zweiten Quadranten. Bestimmen Sie die maximale Dreiecksfläche.

Aufgabe 3 (11 Punkte): Gegeben sind $h(x) = p - \cos(x)$ und $k(x) = \sin^2(x)$ im Intervall $[0;\pi]$, $p \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Parameter p, so dass die Graphen von h(x) und k(x) sich in einem Punkt innerhalb des angegebenen Intervalls berühren.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $k(x) = \sin^2(x)$. Wenden Sie dabei die partielle Integration und eine trigonometrische Identität an.

c) Bestimmen Sie die von den zwei Graphen eingeschlossene Fläche zwischen der y-Achse und der Vertikalen, die durch das Maximum von k(x) geht. (Wenn Sie die Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, dann setzen Sie p = 1.75.)



Aufgabe 4 (10 Punkte): Gegeben ist die Funktion $q(x) = -\dfrac{x^2 - 2ax}{a^k}$ mit den Parametern $a, k \in \mathbb{R}^+$.

a) Setzen Sie zunächst a = 3. Bestimmen Sie den Parameter k, so dass der Graph von q(x) die x-Achse in einem Winkel von 60° schneidet.

b) Sei a nun ein beliebiges Element von $\mathbb{R}^+$. Die Fläche, die von der x-Achse und von der Funktion q(x) im ersten Quadranten begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie k, so dass das dadurch entstandene Rotationsvolumen unabhängig von der Wahl von a ist.

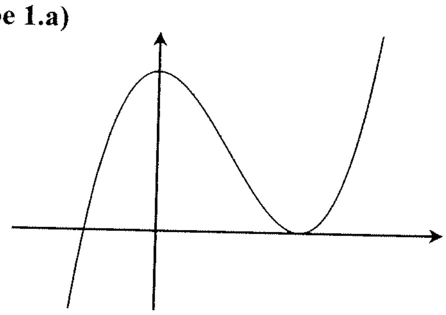
Dieses Aufgabenblatt ist mit der Arbeit abzugeben!

Lösungen Mathematik (Analysis) Herbst 2011

Von maximal 45 Punkten werden 40 für die Note 6 verlangt.

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1+\frac{p}{8}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Aufgabe 1.a)
Skizze:



(1P)

- Ansatz: $g(x) = (x+1)(x-q)^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 + bx^2 + d = x^3 + (1-2q)x^2 + (q^2-2q)x + q^2$ **(2P)**

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} b = 1-2q & \text{(I)} \\ 0 = q^2 - 2q & \text{(II)} \\ d = q^2 & \text{(III)} \end{array}\right\} \textbf{(1P)}$$

- Aus (II) folgt: $q = 2$ oder $q = 0$ **(1P)**
- Zwei Lösungen: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ oder $g(x) = x^3 + x^2$ **(2P)**

Aufgabe 1.b)

- Länge: $L_0 = 1,\ L_1 = \frac{4}{3},\ L_2 = \frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ **(2P)**

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad L_8 = \left(\frac{4}{3}\right)^8 \approx 9.989 \\ \Rightarrow \quad L_\infty \to \infty \end{array}\right\} \textbf{(1P)}$$

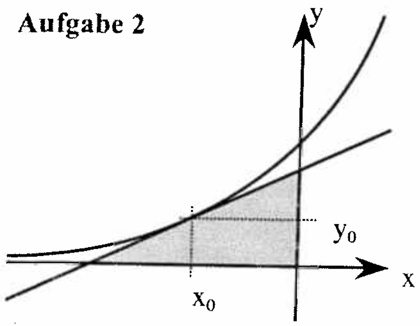
- Fläche: $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{36},\ F_2 = F_1(1+\frac{4}{9}),\ F_3 = F_1(1+\frac{4}{9}+\frac{16}{81})$ **(1P)**

$\Rightarrow$ Geometrische Reihe mit Quotient $q = \frac{4}{9}$: $\quad F_n = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$ **(1P)**

Für $n = 8$: $\quad F_8 = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^8}{1-\frac{4}{9}} \approx 0.08647$ **(1P)**

Für $n \to \infty$: $\quad F_\infty = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{20} \approx 0.08660$ **(1P)**

Aufgabe 2



- Allgemeine Geradengleichung: $y = mx + q$
- Steigung der Tangente: $m = f'(x_0) = e^{x_0}$ **(1P)**
- Geradengleichung: $y = e^{x_0}x + q$ **(1P)**
- Bestimmung von q: $A\left(x_0 \middle| e^{x_0}\right)$ einsetzen $e^{x_0} = e^{x_0}x_0 + q \quad \Rightarrow \quad q = e^{x_0}(1 - x_0)$ **(1P)**
- Geradengleichung der Tangente: $y = e^{x_0}x + e^{x_0}(1 - x_0)$ **(1P)**

- Höhe h des Dreiecks: $h = q = e^{x_0}(1 - x_0)$ **(1P)**
- Basis b des Dreiecks: $y = 0$ in die Tangentengleichung einsetzen $\Rightarrow \quad b = 1 - x_0$ **(1P)**
- Fläche F des Dreiecks: $F = \frac{1}{2}hb = \frac{1}{2}e^{x_0}(1 - x_0)^2$ **(1P)**

- $F' = \dfrac{dF(x_0)}{dx_0} = 0$: $0 = \frac{1}{2}e^{x_0}(1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}e^{x_0} \cdot 2(1 - x_0)(-1)$ **(1P)**

  $0 = \frac{1}{2}e^{x_0}\left(x_0^2 - 1\right)$

  $x_0 = \pm 1$ **(1P)**

- Maximale Dreiecksfläche (mit $x_0 = -1$, da $x_0 < 0$ sein muss): $F = 2e^{-1} \approx 0.7358$ **(1P)**
  ($x_0 = 1$ liefert mit $F = 0$ ein Minimum der Fläche.)

Aufgabe 3.a)

- Ableitungen: $h'(x) = \sin(x),\ k'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ **(1P)**
- h(x) und k(x) haben im Berührungspunkt die gleiche Steigung:

$$h'(x) = k'(x)$$

$$\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \textbf{(1P)}$$

$$\frac{1}{2} = \cos(x)$$

$$x = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472 \qquad \textbf{(1P)}$$

- h(x) und k(x) berühren sich in $x = \frac{\pi}{3}$:

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = k\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$p - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \textbf{(1P)}$$

$$p - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$p - \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \quad p = \frac{5}{4} \qquad \textbf{(1P)}$$

Aufgabe 3.b)

Stammfunktion von $\sin^2(x)$: partielle Integration und trigonometrische Identität

$$\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx \qquad \textbf{(1P)}$$

$$\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \left(1 - \sin^2(x)\right)dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx \qquad \textbf{(1P)}$$

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x$$

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right) \qquad \textbf{(1P)}$$

Aufgabe 3.c) mit p = 1.25

- Maximum von $k(x)$: $x = \frac{\pi}{2}$
- $F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(h(x) - k(x)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1.25 - \cos(x) - \sin^2(x)\right)dx$ **(1P)**

$$= \left[1.25x - \sin(x) - 0.5x + 0.5\sin(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad *$$

$$= \left[0.75x - \sin(x) + 0.5\sin(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \textbf{(1P)}$$

$$= \left[0.75\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0.5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[0 - \sin(0) + 0.5\sin(0)\cos(0)\right]$$

$$= \left[0.75\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{3\pi - 8}{8} \approx 0.1781 \qquad \left(F = \frac{5\pi - 8}{8} \approx 0.9635 \text{ für } p = 1.75\right) \qquad \textbf{(1P)}$$

Aufgabe 4.a)

- Nullstellen der Funktion: $0 = x^2 - 2ax = x(x-2a) \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0,\ x_1 = 2a$ **(1P)**
- $a = 3:\ q(x) = -\frac{x^2 - 6x}{3^k} \quad \Rightarrow \quad q'(x) = -\frac{2x-6}{3^k}$ **(1P)**
- $\sqrt{3} = \tan(60°) = q'(0) = \frac{6}{3^k}$ **(1P)**

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{3^k}$$

$$\Rightarrow 3^k = \frac{6}{\sqrt{3}}$$ **(1P)**

$$\Rightarrow k = \log_3\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\ln\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)}{\ln(3)} \approx 1.131$$ **(1P)**

Variante: Aus $\sqrt{3} = \frac{6}{3^k}$ folgt: $3^k \cdot \sqrt{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad 3^{k-0.5} = 2$

Also: $k = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} + 0.5 \approx 1.131$

Aufgabe 4.b)

- Rotationsvolumen:

$$V = \pi \int_0^{2a} \left(-\frac{x^2 - 2ax}{a^k} \right)^2 dx$$ **(1P)**

$$= \frac{\pi}{a^{2k}} \int_0^{2a} \left(x^4 - 4ax^3 + 4a^2x^2 \right) dx$$ **(1P)**

$$= \frac{\pi}{a^{2k}} \left[\tfrac{1}{5}x^5 - ax^4 + \tfrac{4}{3}a^2x^3 \right]_0^{2a}$$ **(1P)**

$$= \frac{\pi}{a^{2k}} \left(\tfrac{1}{5}(2a)^5 - a(2a)^4 + \tfrac{4}{3}a^2(2a)^3 \right)$$

$$= \frac{\pi}{a^{2k}} \left(\tfrac{32}{5}a^5 - 16a^5 + \tfrac{32}{3}a^5 \right)$$

$$= \frac{16\pi a^5}{15a^{2k}}$$ **(1P)**

$$\Rightarrow k = 2.5$$ **(1P)**