ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2012

Mathematik I (Analysis)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass in einem Parallelogramm stets die Beziehung

$$e^2 + f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

gilt, wobei e und f die Diagonalen und a, b, c und d die Seiten des Parallelogramms sind.

b) Überprüfen Sie, ob die komplexe Folge $a_n = \dfrac{2(4+5i)^n + 3}{(4+5i)^{n+1} + 6^{n+2}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \to \infty$ (in Normalform).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Einer Kugel mit Radius 1 wird ein gerader Kreiskegel eingeschrieben. Bestimmen Sie die Höhe des Kegels mit maximaler Mantelfläche. Wie gross ist dieses Maximum?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Vermehrung von Bakterien erfolgt unter günstigen Bedingungen exponentiell. Der Bakterienstamm α verdoppelt sich in 3 h, der Bakterienstamm β verzehnfacht sich in einem halben Tag.

a) Welcher Stamm hat die grössere Wachstumsrate? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

b) Um 01.00 Uhr besteht der Stamm α aus 10'000 Bakterien, der Stamm β besteht um 02.00 Uhr aus 13'000 Bakterien. Um welche Zeit werden beide Stämme gleich viele Bakterien zählen?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ae^x(x+b)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit der Parameter a und b den Inhalt des Flächenstückes, das vom Graphen der Funktion f(x) und von der x-Achse im dritten und vierten Quadranten eingeschlossen wird. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Funktion f(x).

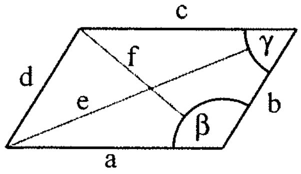
b) Die Tangente an den Graphen der Funktion f(x) an der Stelle x = 0 hat die Gleichung y − 6x = 3. Bestimmen Sie die Parameter a und b.

Lösungen Mathematik I (Analysis) Herbst 2012

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{8}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Aufgabe 1

a) Mit dem Cosinussatz:



(I) $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)$ **1 P**

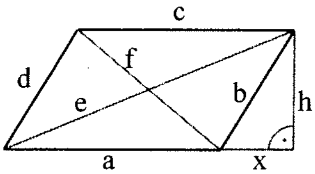
(II) $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\gamma)$ **1 P**

Aus (I) & (II) folgt:

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta) + b^2 + c^2 - 2bc\cos(\gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta) + d^2 + c^2 - 2bc\underbrace{\cos(180° - \beta)}_{-\cos(\beta)} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta) + d^2 + c^2 + 2ab\cos(\beta) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \qquad \text{QED} \end{aligned}$$

3 P

a) Variante mit Pythagoras



(I) $e^2 = (a + x)^2 + h^2$

(II) $f^2 = (c - x)^2 + h^2$

(III) $h^2 = b^2 - x^2$ bzw. $h^2 = d^2 - x^2$

2 P

Aus (I) & (III) bzw. (II) & (III) folgt:

(IV) $e^2 = (a + x)^2 + b^2 - x^2$

(V) $f^2 = (c - x)^2 + d^2 - x^2$

1 P

Aus (IV) & (V) folgt:

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= (a + x)^2 + b^2 - x^2 + (c - x)^2 + d^2 - x^2 \\ &= a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 + d^2 - x^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \qquad \text{QED} \end{aligned}$$

2 P

b) Zähler und Nenner durch $(4 + 5i)^n$ teilen:

$$a_n = \frac{2 + \frac{3}{(4 + 5i)^n}}{(4 + 5i) + \frac{6^{n+2}}{(4 + 5i)^n}} = \frac{2 + \frac{3}{(4 + 5i)^n}}{(4 + 5i) + 36\left(\frac{6}{4 + 5i}\right)^n}.$$ **2 P**

Da $|4 + 5i| = \sqrt{41} > 6$, ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{4 + 5i}\right)^n = 0$; die Folge a_n ist somit konvergent. **1 P**

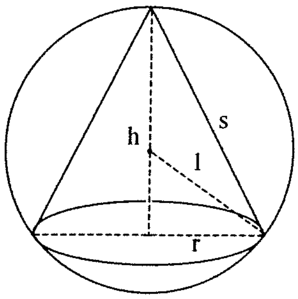
Grenzwert:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{(4 + 5i)^n}}{(4 + 5i) + 36 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6}{4 + 5i}\right)^n} = \frac{2}{4 + 5i}$$ **1 P**

Grenzwert in Normalform:

$$a = \frac{2}{(4 + 5i)} \cdot \frac{(4 - 5i)}{(4 - 5i)} = \frac{8 - 10i}{16 + 25} = \frac{8}{41} - \frac{10}{41}i$$ **1 P**

Aufgabe 2



Aus geometr. Überlegungen: $1 \le h \le 2$

Kegelmantel: $M = \pi r s$ **1 P**

Nebenbedingungen: $1 = r^2 + (h-1)^2 \Rightarrow r = \sqrt{2h - h^2}$ **2 P**

$s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow s = \sqrt{(2h - h^2) + h^2} = \sqrt{2h}$ **2 P**

Vereinfachung: $M(h) = \pi\sqrt{2h - h^2}\sqrt{2h} = \pi\sqrt{4h^2 - 2h^3}$ **1 P**

Extremalstellen: $M'(h) = 0 \Rightarrow 0 = \pi \dfrac{8h - 6h^2}{2\sqrt{4h^2 - 2h^3}}$ **2 P**

$\Rightarrow h = 0$ (Min) oder $h = \dfrac{4}{3}$ (Max) **1 P**

Es folgt: $r = \sqrt{\dfrac{8}{9}}$ und $s = \sqrt{\dfrac{8}{3}} \Rightarrow M = \pi\sqrt{\dfrac{8}{9}}\sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{8\pi\sqrt{3}}{9}$ **1 P**

Aufgabe 3

a) Sei t die Zeit in Stunden.

Stündliche Wachstumsrate des Stammes α: $2^{\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 1.26$ **1 P**

Stündliche Wachstumsrate des Stammes β: $10^{\left(\frac{1}{12}\right)} \approx 1.21$ **1 P**

Der Stamm α hat somit die grössere Wachstumsrate. **1 P**

b) Sei t die Zeit in Stunden ($t = 0$: 01.00 Uhr).

Stamm α: $A(t) = 10'000 \cdot 2^{\left(\frac{t}{3}\right)}$ **1 P**

Stamm β: $B(t) = 13'000 \cdot 10^{\left(\frac{t-1}{12}\right)}$ **1 P**

$A(t) = B(t)$: $10'000 \cdot 2^{\left(\frac{t}{3}\right)} = 13'000 \cdot 10^{\left(\frac{t-1}{12}\right)}$

Es folgt: $\left(\frac{2^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{10^{\left(\frac{1}{12}\right)}}\right)^t = \frac{13}{10} \cdot 10^{\left(\frac{-1}{12}\right)}$ **2 P**

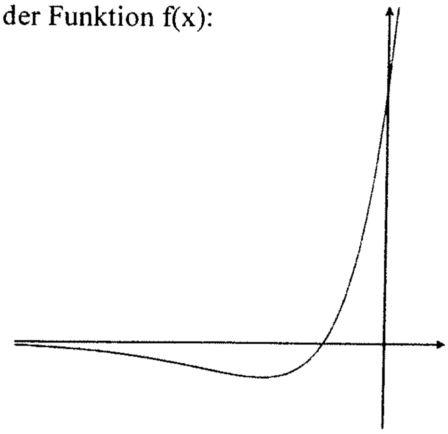
$$(1.03994...)^t = 1.07303...$$

$$t = \frac{\ln(1.07303...)}{\ln(1.03994...)} \approx 1.8$$ **2 P**

Beide Stämme werden um ca. 02.48 Uhr gleich viele Bakterien zählen. **1 P**

Aufgabe 4

a) Skizze des Graphen der Funktion f(x):



Nullstelle: $x = -b$

1P

Berechnung des Flächenstückes A mittels partieller Integration:

$$A = \lim_{c \to -\infty} \int_c^{-b} ae^x (x+b)\,dx$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \left[ae^x (x+b)\Big|_c^{-b} - \int_c^{-b} ae^x\,dx \right]$$ 2 P

$$= \lim_{c \to -\infty} \left[ae^x (x+b) - ae^x \right]_c^{-b}$$ 1 P

$$= \lim_{c \to -\infty} \left[-ae^{-b} - ae^c (c+b) + ae^c \right]$$

$$= -ae^{-b}$$ 1 P

b) Die Ableitung der Funktion f(x) ist $f'(x) = ae^x (x+b) + ae^x$. 1 P

Die Tangente geht durch den Punkt P(0|3) und hat an der Stelle x = 0 die Steigung $m = 6$:

$$\left.\begin{aligned} f(0) = 3 \quad &\Rightarrow \quad 3 = ab \\ f'(0) = 6 \quad &\Rightarrow \quad 6 = ab + a \end{aligned}\right\} \text{3 P}$$

Es folgt: $a = 3$ und $b = 1$ 1 P