Übungen

Themen:
- Ausklammern
- Kürzen

1.) Es sollen möglichst viele Faktoren ausgeklammert werden.

a) $bx - by + bz$

b) $a^2 - ax + 3ay$

c) $a^2b - 3ab^2 + 5ab$

d) $18a^3b^2 - 24a^2b^4 + 12a^4b^3 - 6a^2b^2$

2.) Es soll ein Faktor ausgeklammert werden, so dass in der Klammer keine Bruchterme vorkommen, z.B

$$\frac{b}{3} + \frac{2}{a} - \frac{5}{2} = \frac{1}{6a}(2ab + 12 - 15a)$$

a) $\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{b}{4}$

b) $\frac{1}{5} - \frac{a}{15} + \frac{b}{10}$

c) $\frac{a}{3b} - \frac{b}{2a} + \frac{c}{6ab}$

d) $\frac{5a}{2b} - \frac{2b}{3c} + \frac{7ab}{4c}$

3.) Aus dem Term

a) $-a+b$ soll -1 ausgeklammert werden

b) $-2a+3b-5c$ soll -1 ausgeklammert werden

c) $-6a+4b-8z$ soll -2 ausgeklammert werden

d) $-a^2b+3ab^2-7ab$ soll $-ab$ ausgeklammert werden.

4.) Ausklammern „mit Gewalt"

Aus dem Term

a) $a^2 - ab$ soll a^2

b) $2x^2 - 3ax$ soll 2

c) $3ax - 2ab + 5bx$ soll ab

d) $4x^3 - 3ax^2 + 8bx + 11$ soll $4x^2$

ausgeklammert werden.

5.) Aus den Termen

a) $4(a+b)-b(a+b)$

b) $(3+x)(a-b)-(4-y)(a-b)$

c) $(x+2y)\cdot(a-b+c)-(c+2a-3)(a-b+c)$

d) $(y-2z)\cdot(a-3)+(2z-y)\cdot(b+2)$

sollen Klammerausdrücke ausgeklammert werden.
Das Ergebnis soll, falls möglich, vereinfacht werden.

6.) Ausklammern und vereinfachen!

a) $(a+3b)^2-(a+3b)\cdot(a-b)$

b) $(x-2y)^2-3(x-2y)+(x+2y)(x-2y)$

c) $(3a-b)(a+2b)-(a+2b)^2-(a+2b)(3a+b)$

d) $2(3a+2b)^2(2a-3b)+(3a+2b)\cdot(2a-3b)^2+(3a+2b)(2a-3b)$

7.) Faktorisiere!

a) $ax-cy+ay-cx$

b) $ax-cy+by-bx-ay+cx$

c) $ax^2+ax-ay+cx-cy+cx^2$

d) $2az-bx-ay+cx+2cz-2bz+ax+by-cy$

8.) Welche Terme lassen sich faktorisieren?

a) $ax-ay+3a$

b) $ax-2ay+3y$

c) $ax-by+bx-ay$

d) $ma-nb+mb+na$

Falls möglich, zerlege den Term in Faktoren!

9.) Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Lösungsvariablen x von

a) $x(x+3)=0$

b) $(x-2)\cdot(x+5)=0$

c) $(x-a)\cdot(x-b+c)=0$

d) $(x^2-2x)\cdot(x-3a)=0$

10.) Zerlege in ein Produkt von zwei Klammerausdrücken, z.B.
$x-3x+2=(x-2)\cdot(x-1)$

a) x^2-5x
b) $x^2+7x+10$
c) x^2-3cx
d) x^4-13x^2+36
e) x^2-225

11.) Zerlege in möglichst viele Faktoren

a) x^4-16y^4
b) x^8-y^8
c) x^4-13x^2+36
d) x^5-5x^3+4x

12.) Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Lösungsvariablen x von

a) $x^2-16=0$
b) $x^2-9x+18=0$
c) $2x^2-7x-15=0$
d) $x^5-26x^3+25x=0$

13.) Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Lösungsvariablen x von

a) $x^2-2ax+a^2=0$
b) $x^3-4b^2x=0$
c) $x^2+3ax-10a^2=0$
d) $x^2-(2a+3b)x+6ab=0$
e) $x^2+(a+\frac{1}{a})x+1=0$

14.) Zerlege den Term in möglichst viele Faktoren und mache die Probe

a) $3x^3-24x^2+45x$
b) $a^2-3ab-6bc+2ac$
c) $a^2+ac+ce-ab-be+ae$
d) $6ac+3a^2+2ae+4ce-2be-3ab$
e) $b^2c+8abd+4a^2c-8a^2d-2b^2d-4abc$
f) $-9a+ax^2+2bx^2-18b$
g) $2b+6ac+2ad+3c-2-4a-3bc+d-bd$

15.) Bestimme Definitionsbereich* und behebbare Definitionslücken** bezüglich der Variablen x der Bruchterme

a) $\frac{x+1}{x^2}$

b) $\frac{x^2}{x+3}$

c) $\frac{x^2-1}{x+1}$

d) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

e) $\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$

f) $\frac{x^2}{x}$

g) $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$

h) $\frac{x}{x-a}$

i) $\frac{x^2+4}{x^2-4}$

j) $\frac{x^2+4}{x^4-16}$

k) $\frac{3}{x^3-144x}$

l) $\frac{3-x}{x^2+x-12}$

m) $\frac{x+1}{x^3-x^2-2x}$

n) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$

o) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2x-3}$

16.) Kürze folgenden Bruchterm

a) $\frac{2x+2}{2x}$

b) $\frac{ax-ay}{ax+az}$

c) $\frac{5p}{p^2-p}$

d) $\frac{6ax-6az}{27ax+27az}$

e) $\frac{2x^2+14x+24}{3x^2+24x+48}$

f) $\frac{2a^2+4ac-10bc-5ab}{2a^2-5ab-4ac+10bc}$

g) $\frac{a^2+5ab+6b^2}{a^2+6ab+9b^2}$

h) $\frac{2ad+ac-bc-2bd}{2ad-2bc-4bd+ac}$

17.) Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Lösungsvariablen x der Gleichung mit Formvariable(n) wie folgt:

a) $x-a=ax$

b) $ax-3=5-bx$

c) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$

d) $(ax-3)\cdot(bx+5)=0$

e) $b(ax+5)=2$

f) $\frac{ax+1}{cx-1}=3$

g) $(ax-3)(\frac{x}{a}+4)=0$

h) $ax-bx+5=ax+4bx$

i) $3x-a=(2x-a)-(b-x)$

---

* $\mathbb{D}=\mathbb{Q}\setminus\{x$ für welche der Zähler null wird$\}$

** Definitionslücken, die wegfallen beim Kürzen.

18.) Für die Oberfläche eines Quaders mit Kantenlängen a, b und c gilt

$$\text{Oberfläche} = S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

Löse die Gleichung auf nach

a) a

b) b

c) c

19.) Eine Formel aus der Elektrizitätslehre lautet

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Löse die Formel auf nach R und R_1.

Zusatz

Z.1) Quadratische Ergänzung.

Bei der quadratischen Ergänzung **werden** in einer quadratischen Gleichung der quadratische und der lineare Term ersetzt durch das Quadrat eines Binoms und einen konstanten Term wie folgt: (Beispiel!)

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad | :3$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{2}{3}x} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}_{x^2 + \frac{2}{3}x + \boxed{\frac{1}{9}}} - \boxed{\frac{1}{9}} - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow \underline{\underline{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}}}$$

Durch quadratische Ergänzung soll die quadratische Gleichung

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

b) $3x^2 - 16x + 5 = 0$

c) $2x^2 + 11x - 21 = 0$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$

in die Form $(x + b)^2 = c$ gebracht werden.

Versuche die Lösungsmenge zu ermitteln!

Musterlösungen

1. a) $b[x-y+z]$
   b) $a[a-x+3y]$
   c) $ab[a-3b+5]$
   d) $6a^2b^2[3a-4b^2+2a^2b-1]$

2. a) $\frac{1}{12}[4-6a+3b]$
   b) $\frac{1}{5}\left[1-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right]=\frac{1}{30}[6-2a+3b]$
   c) $\frac{1}{6ab}[2a^2-3b^2+c]$
   d) $\frac{1}{12bc}[30ac-8b^2+21ab^2]$

3. a) $(-1)\cdot(a-b)$
   b) $(-1)\cdot[2a-3b+5c]$
   c) $(-2)\cdot[3a-2b+4z]$
   d) $(-ab)[a-3b+7]$

4. a) $a^2\left[1-\frac{b}{a}\right]$
   b) $2\left[x^2-\frac{3}{2}ax\right]$
   c) $ab\cdot\left[\frac{3x}{b}-2+\frac{5x}{a}\right]$
   d) $4x^2\left[x-\frac{3}{4}a+2\frac{b}{x}+\frac{11}{4x^2}\right]$

5. a) $(a+b)(4-b)$
   b) $(a-b)(x+y-1)$
   c) $(a-b+c)\cdot(3-2a-c+x+2y)$
   d) $(y-2z)(a-b-5)$

6. a) $4b(a+3b)$
   b) $(x-2y)(2x-3)$
   c) $(a+2b)\cdot(-a-4b)=-(a+2b)(a+4b)$
   d) $(2a-3b)(3a+2b)(8a+b+1)$

7. a) $(a-c)(x+y)$
   b) $(a-b+c)(x-y)$
   c) $(x^2+x-y)(a+c)$
   d) $(a-b+c)(x-y+2z)$

8. a) $a(x-y+3)$
   b) nein!
   c) $(a+b)\cdot(x-y)$
   d) nein!

9. a) $x_1=0$ und $x_2=-3$
   b) $x_1=2$ und $x_2=-5$
   c) $x_1=a$ und $x_2=b-c$
   d) $x_1=0$, $x_2=2$ und $x_3=3a$

10. a) $(x-0)\cdot(x-5)$
    b) $(x+5)\cdot(x+2)$
    c) $(x-0)\cdot(x-3c)$
    d) $(x^2-9)(x^2-4)$
    e) $(x+15)\cdot(x-15)$

11. a) $(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)$
    b) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
    c) $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$
    d) $x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

12. a) $x_1=4$ und $x_2=-4$
    b) $x_1=6$ und $x_2=3$
    c) $x_1=5$ und $x_2=-3/2$
    d) $x_1=0, x_2=1, x_3=-1, x_4=5, x_5=-5$

13. a) $x = a$
b) $x_1 = 0, x_2 = 2b, x_3 = -2b$
c) $x_1 = 2a, x_2 = -5a$
d) $x_1 = 2a, x_2 = 3b$
e) $x_1 = -a, x_2 = -1/a$

14. a) $3x(x-3)(x-5)$
b) $(a-3b)(a+2c)$
c) $(a+e)(a-b+c)$
d) $(3a+2e)(a-b+2c)$
e) $(c-2d)(2a-b)^2$
f) $(x+3)(x-3)(a+2b)$
g) $(2a-b+1)(3c+d-2)$

15.

Teil	$\mathbb{D}$	Behebbare Definitions-lücke	Teil	$\mathbb{D}$	Behebbare Definitions-lücke	Teil	$\mathbb{D}$	Behebbare Definitions-lücke
a	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$		f	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	bei $x=0$	k	$\mathbb{Q}\setminus\{-12,0,12\}$	
b	$\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$		g	$\mathbb{Q}\setminus\{-1,1\}$	bei $x=-1$	l	$\mathbb{Q}\setminus\{-4,3\}$	bei $x=3$
c	$\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$	bei $x=-1$	h	$\mathbb{Q}\setminus\{a\}$	falls $a=0$ bei $x=0$	m	$\mathbb{Q}\setminus\{-1,0,2\}$	bei $x=-1$
d	$\mathbb{Q}$		i	$\mathbb{Q}\setminus\{-2,2\}$		n	$\mathbb{Q}\setminus\{-1,2\}$	
e	$\mathbb{Q}\setminus\{-5,2\}$	bei $x=2$	j	$\mathbb{Q}\setminus\{-2,2\}$		o	$\mathbb{Q}\setminus\{-1,3\}$	bei $x=-1$

16. a) $(x+1)/x$
b) $(x-y)/(x+z)$
c) $5/(p-1)$
d) $2(x-z)/(9(x+z))$
e) $2(x+3)/[3(x+4)]$
f) $(a+2c)/(a-2c)$
g) $(a+2b)/(a+3b)$
h) $(a-b)/(a-2b)$

17. a) $x = a/(1-a)$ wenn $a \neq 1$, sonst keine Lösung!
b) $x = 8/(a+b)$ wenn $a \neq -b$, " " " !
c) $x = ab/(a+b)$ " $a \neq -b$, " " " !
d) $x_1 = 3/a$ und $x_2 = -5/b$
e) $x = (2-5b)/(ab)$ wenn $a \neq 0$ und $b \neq 0$
f) $x = 4/(3c-a)$, wenn $a \neq 3c$, sonst keine Lösung!
g) $x_1 = 3/a$ und $x_2 = -4a$, wenn $a \neq 0$
h) $x = 1/b$ wenn $b \neq 0$, sonst keine Lösung!
i) Keine Lösung wenn $b \neq 0$, sonst x beliebig

18. a) $a = [\frac{1}{2}S - bc]/(b+c)$, (b) $b = [\frac{1}{2}S - ac]/(a+c)$, (c) $c = [\frac{1}{2}S - ab]/(a+b)$

19.) $R = R_1R_2/(R_1+R_2)$ und $R_1 = R_2R/(R_2-R)$

Z.1. a) $(x-4)^2 = 4$, (b) $(x-\frac{8}{3})^2 = \frac{49}{9}$, (c) $(x+\frac{11}{4})^2 = \frac{289}{16}$, (d) $(x-\frac{1}{12})^2 = \frac{25}{144}$