

Aufgaben und Lernziele zu den Winkelfunktionen

1. Berechnung der Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck.

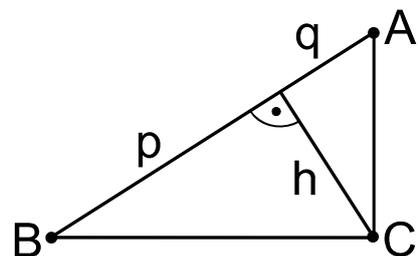
- 1.1. Wie gross sind die Winkel im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten
- $a = 3$ und $b = 4$?
 - $a = 5$ und $b = 12$?
- 1.2. Wie gross sind die Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Kathete
- $a = 5$ und der Hypotenuse $c = 13$?
 - $b = 4$ und der Hypotenuse $c = 7$?

2. Berechnung von Winkeln und Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck.

- 2.1. Berechne die fehlenden Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck, wenn
- $a = 5$, $\alpha = 30^\circ$
 - $c = 7$, $\alpha = 40^\circ$
 - $c = 4$, $\beta = 50^\circ$
 - $b = 4$, $\alpha = 60^\circ$
- 2.2. Berechne die Höhe h_c eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn
- $a = 4$, $\alpha = 40^\circ$
 - $c = 7$, $\alpha = 50^\circ$
 - $b = 3$, $\alpha = 35^\circ$
- 2.3. Berechne die Höhe
- eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $s = 6$.
 - h_c eines gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkeln $a = b = 5$ und Basiswinkeln $\alpha = \beta = 55^\circ$.
 - gleichschenkligen Trapezes mit Basiswinkeln $\alpha = \beta = 70^\circ$ und den Grundlinien $a = 9$ und $c = 5$.

- 2.4. Berechne die fehlenden Seiten und Innenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks ABC , wenn

- $a = 6$ und $p = 3$
- $q = 4$ und $h = 6$
- $p = 40$ und $q = 10$



Merke: Beim rechtwinkligen Dreieck gilt der Höhensatz $p \cdot q = h^2$.

- 2.5. Eine steile Bergstrasse hat eine Steigung von 13%. Wie gross ist der Neigungswinkel der Bergstrasse?
- 2.6. Von einem Punkt P im Abstand $5r$ vom Mittelpunkt eines Kreises mit Radius r werden zwei Tangenten an den Kreis gelegt. Wie gross ist der Schnittwinkel der beiden Tangenten?

2.7. Von einem Rhombus kennt man die Seite s und eine Diagonale. Berechne die Innenwinkel und die andere Diagonale, wenn $s = \overline{AB} = 23$ und $e = \overline{AC} = 30$.

2.8. Berechne die Länge der Winkelhalbierenden w_α eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten $a = 27$ und $b = 23$.

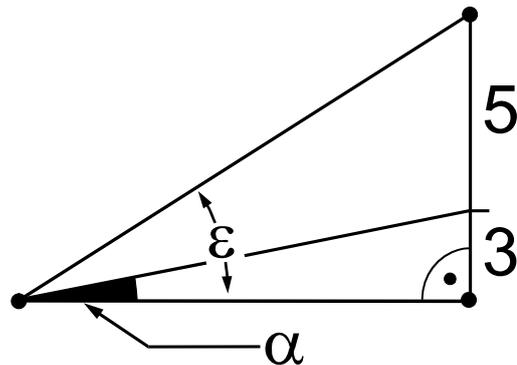
2.9. Berechne den Schnittwinkel der beiden

- a) äusseren
- b) inneren

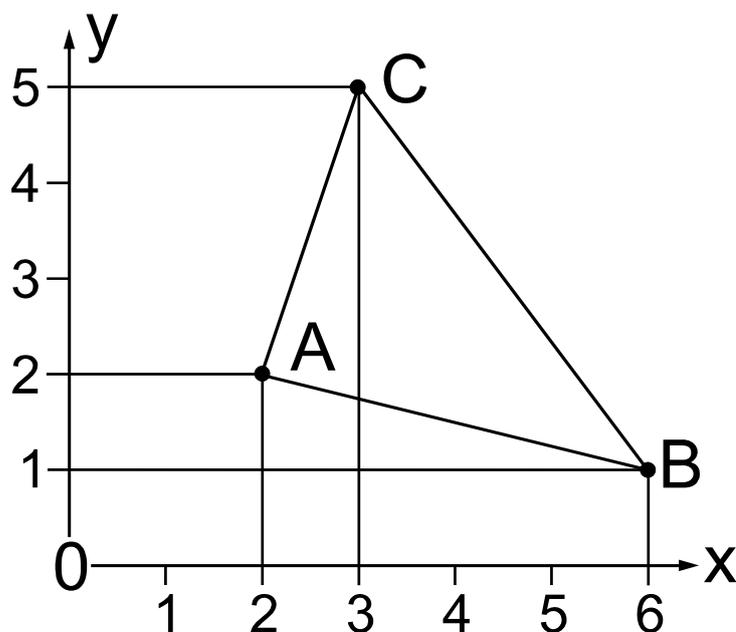
Tangenten an zwei Kreise mit Radien $r_1 = 2$ und $r_2 = 3$, wenn für den Abstand der Kreismittelpunkte M_1 und M_2 folgendes gilt: $\overline{M_1 M_2} = 8$.

2.10. Berechne die Länge der Sehne und die Höhe eines Kreissegments eines Einheitskreises mit Zentriwinkel 114° .

2.11. Berechne den Winkel ε , wenn $\alpha = 12^\circ$.



2.12. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks ABC.



3. Berechnung der Lösungsmenge von goniometrischen Gleichungen der Art $\sin(nx + b) = c$, $\cos(nx + b) = c$ und $\tan(nx + b) = c$.

3.1. Berechne Lösungen im Bereich $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$ von

- a) $\sin \alpha = \cos 43^\circ$
- b) $\sin 2\alpha = \sin 66^\circ$
- c) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$
- d) $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- e) $\tan 3\alpha = 2$
- f) $\sin(\alpha - 40^\circ) = \cos 48^\circ$
- g) $\cos(2\alpha + 46^\circ) = \frac{1}{2}$
- h) $\sin(2\alpha - 60^\circ) = \cos 46^\circ$
- i) $\tan(2\alpha - 28^\circ) = 1/\tan(50^\circ)$
- j) $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$
- k) $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Musterlösungen:

- 1.1. a) $\alpha = \arctan(3/4) = 36.87^\circ$; $\beta = 90^\circ - \alpha = 53.13^\circ$.
b) $\alpha = \arctan(5/12) = 22.62^\circ$; $\beta = 90^\circ - \alpha = 67.38^\circ$.
- 1.2. a) $\alpha = \arcsin(5/13) = 22.62^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha = 67.38^\circ$.
b) $\alpha = \arccos(4/7) = 55.15^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha = 34.85^\circ$.
- 2.1. a) $b = 5/\tan 30^\circ = 8.66$ und $c = 5/\sin 30^\circ = 10$.
b) $a = 7 \cdot \sin 40^\circ = 4.50$, $b = 7 \cdot \cos 40^\circ = 5.36$.
c) $a = 4 \cdot \cos 50^\circ = 2.57$ und $b = 4 \cdot \sin 50^\circ = 3.06$.
d) $a = 4 \cdot \tan 60^\circ = 6.93$ und $c = 4/\cos 60^\circ = 8$.
- 2.2. a) $h_c = 4 \cdot \sin(90^\circ - 40^\circ) = 3.064$.
b) $h_c = 7 \cdot \cos 50^\circ \cdot \sin 50^\circ = 3.447$.
c) $h_c = 3 \cdot \sin 35^\circ = 1.721$.
- 2.3. a) $h = 6 \cdot \sin 60^\circ = 5.196$
b) $h_c = 5 \cdot \sin 55^\circ = 4.096$
c) $h_c = \frac{1}{2} (9 - 5) \cdot \tan 70^\circ = 5.495$.
- 2.4. a) $\beta = \arccos(p/a) = \arccos(1/2) = 60^\circ$, $\alpha = 90^\circ - \beta = 30^\circ$, $b = a/\tan \alpha = 6/\tan 30^\circ = 10.392$, $c = a/\sin \alpha = 6/\sin 30^\circ = 12$
b) $\alpha = \arctan(h/q) = \arctan(3/2) = 56.310^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha = 33.69^\circ$, $b = q/\cos \alpha = 4/\cos 56.310^\circ = 7.211$, $a = b \cdot \tan \alpha = 7.211 \cdot \tan 56.310^\circ = 10.817$, $c = b/\cos \alpha = 7.211/\cos 56.310^\circ = 13$
c) $h = \sqrt{p \cdot q} = 20$, $\alpha = \arctan(h/q) = \arctan 2 = 63.43^\circ$, $\beta = \arctan(h/p) = \arctan(1/2) = 26.57^\circ$, $c = p + q = 50$, $b = c \cdot \cos \alpha = 22.361$, $a = c \cdot \sin \alpha = 44.721$
- 2.5. $\arctan(13/100) = 7.407^\circ$

2.6. $2 \arcsin(1/5) = 23.074^\circ$

2.7. $\alpha = \gamma = 2 \arccos(15/23) = 98.59^\circ$, $\beta = \delta = 180^\circ - \alpha = 81.41^\circ$, $\overline{BD} = 2 \cdot 23 \cdot \sin(\alpha/2) = 34.871$

2.8. $w_\alpha = b / \cos(\frac{1}{2} \arctan(a/b)) = 23 / \cos(\frac{1}{2} \arctan(27/23)) = 25.33$

2.9. a) $\alpha_1 = 2 \arcsin((r_2 - r_1) / \overline{M_1 M_2}) = 2 \arcsin((3 - 2)/8) = 14.36^\circ$

b) $\alpha_2 = 2 \arcsin((r_2 + r_1) / \overline{M_1 M_2}) = 2 \arcsin((3 + 2)/8) = 77.36^\circ$

2.10. $s = 2r \cdot \sin(\alpha/2) = 2 \cdot 1 \cdot \sin(114^\circ/2) = 1.6773$

$h = r(1 - \cos(\alpha/2)) = 1 \cdot (1 - \cos(114^\circ/2)) = 0.4554$

2.11. $8/\tan \beta = 3/\tan \alpha \rightarrow \beta = \arctan(8 \cdot (\tan \alpha)/3) = \arctan(8 \cdot (\tan 12^\circ)/3) = 29.55^\circ$

2.12. $\alpha = \arctan((5 - 2)/(3 - 2)) + \arctan((2 - 1)/(6 - 2)) = \arctan 3 + \arctan \frac{1}{4} = 85.60^\circ$, $\beta = \arctan((5 - 1)/(6 - 3)) - \arctan \frac{1}{4} = \arctan(4/3) - \arctan \frac{1}{4} = 39.09^\circ$, $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 55.30^\circ$

3.1. a) $\alpha \in \{47^\circ, 133^\circ\}$ (b) $\alpha \in \{33^\circ, 57^\circ, 213^\circ, 237^\circ\}$ (c) $\alpha \in \{120^\circ, 240^\circ\}$ (d) $\alpha \in \{15^\circ, 165^\circ, 195^\circ, 345^\circ\}$ (e) $\alpha \in \{20^\circ, 80^\circ, 140^\circ, 200^\circ, 260^\circ, 320^\circ\}$ (f) $\alpha \in \{82^\circ, 178^\circ\}$ (g) $\alpha \in \{7^\circ, 127^\circ, 187^\circ, 307^\circ\}$ (h) $\alpha \in \{52^\circ, 98^\circ, 232^\circ, 278^\circ\}$ (i) $\alpha \in \{34^\circ, 124^\circ, 214^\circ, 304^\circ\}$ (j) $\alpha \in \{10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, 290^\circ\}$ (k) $\alpha \in \{10^\circ, 110^\circ, 130^\circ, 230^\circ, 250^\circ, 350^\circ\}$