UniLU Musterprüfung A

A.1: Bestimme die Lösungsmenge von
$$\lg(2\cdot 5^x)=x$$

A.2: Für welchen Wert von a verlaufen die Geraden g_1 und g_2 mit den Geradengleichungen
$$g_1:\ 2ax-4y=7$$
$$g_2:\ 6x-5y=3$$
parallel?

A.3: Der Punkt $A\binom{2}{17}$ liegt auf dem Graphen von $y=a^x$. Wie gross ist a?

A.4: Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet $g: y=6x-q$. Bestimme den Parameter q so, dass g die Normalparabel $p: y=x^2$ berührt.

A.5: Für welche Werte von a gilt
$$\int_a^{a+1} x\,dx=\frac{7}{2}\ ?$$

B.1: Die Gerade g schneidet den Graphen von $f(x)=x^3$ an den Stellen $x_1=2$ und $x_2=3$.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g.

b) Bestimme die von g und vom Graphen von f eingeschlossene Fläche (Flächeninhalt = ?)

B.2: Die kubische Funktion $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ hat zwei Extrema $E_1\binom{-1}{5}$ und $E_2\binom{3}{-27}$. Bestimme die Parameter a, b, c und d.

B.3: Zwei Funktionen sind gegeben wie folgt: $f_1(x)=x^{-3}$ und $f_2(x)=ax$. Bestimme den Parameter a so, dass die Graphen der Funktionen sich im ersten Quadranten senkrecht schneiden. Bestimme den Schnittpunkt im ersten Quadranten.

B.4: Die Fläche, die von den Graphen zweier Funktionen $f_1(x) = cx^2$ und $f_2(x) = 8 - cx^2$ eingeschlossen wird, hat einen Flächeninhalt von $128/3$. Wie gross ist dann c?

B.5: Die Gerade t berührt den Graphen von $f(x) = x^2 - 4x$ an der Stelle $x = 4$. Die Gerade n schneidet den Graphen an derselben Stelle $x = 4$ senkrecht. Bestimme die Funktionsgleichungen von t und n.

Musterlösungen A

A.1: $\lg 2 + x \lg 5 = x \rightarrow x = \lg 2 / (1 - \lg 5) = \underline{\underline{1}}$

A.2: $\left| \begin{array}{l} y = \frac{ax}{2} - \frac{7}{4} \\ y = \frac{6x}{5} - \frac{3}{5} \end{array} \right| \rightarrow \frac{a}{2} = \frac{6}{5} \rightarrow \underline{\underline{a = \frac{12}{5} = 2.4}}$

A.3: $17 = a^2 \rightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{17} = 4.123}}$

A.4: $x^2 = 6x - q \rightarrow x^2 - 6x + q = 0 \rightarrow$

Diskriminante: $D = 36 - 4q = 4(9 - q) = 0$

$\rightarrow \underline{\underline{q = 9}}$

A.5: $\int_a^{a+1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^{a+1} = \frac{(a+1)^2 - a^2}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow$

$2a + 1 = 7 \rightarrow \underline{\underline{a = 3}}$

B.1: $P_1\binom{2}{8}$ und $P_2\binom{3}{27} \rightarrow m = \frac{27-8}{3-2} = 19$

a) $P_1\binom{2}{8} \in g: 8 = 19 \cdot 2 + q \rightarrow q = -30$

$\underline{\underline{g: y = 19x - 30}}$

b) $A = \int_2^3 [19x - 30 - x^3]\,dx = \left[\frac{19}{2}x^2 - 30x - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_2^3$

$= \frac{171}{2} - 90 - \frac{81}{4} - [38 - 60 - 4] = -\frac{99}{4} - (-26) = \underline{\underline{5/4}}$

B.2: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\left| \begin{array}{l} -a + b - c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = -27 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}$

II − I $\rightarrow 28a + 8b + 4c = -32$

$7a + 2b + c = -8$ V

III + V $\rightarrow 10a + 2c = -8 \rightarrow 5a + c = -4 \rightarrow c = -5a - 4$

$\rightarrow$ III $-2a - 2b - 4 = 0 \rightarrow a + b + 2 = 0$

$\rightarrow$ IV $22a + 6b - 4 = 0 \rightarrow 11a + 3b - 2 = 0$

$-3a - 3b - 6 = 0 \quad \cdot(-3)$

$\left. \begin{array}{l} 8a - 8 = 0 \rightarrow a = 1 \\ b = -a - 2 = -3 \\ c = -5a - 4 = -9 \\ d = a - b + c + 5 = 0 \end{array} \right\}$

$\underline{\underline{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -9 \\ d = 0 \end{array}}}$

B.3: $f_1 \cap f_2: \frac{1}{x^3} = ax \rightarrow x = a^{-1/4}$

$f_1'(x) = \frac{-3}{x^4}, \; f_2'(x) = a$

$f_1'(a^{-1/4}) \cdot f_2'(a^{-1/4}) = -3a \cdot a = -1 \rightarrow \underline{\underline{a = 1/\sqrt{3}}}$

$f_1(a^{-1/4}) = a^{3/4} = (3^{-1/2})^{3/4} = 3^{-3/8} = 0.6623 \rightarrow \underline{\underline{S\begin{pmatrix}1.147\\0.662\end{pmatrix}}}$

B.4: $f_1 \cap f_2: cx^2 = 8 - cx^2 \rightarrow x = \pm 2/\sqrt{c}$

$$2\int_{-2/\sqrt{c}}^{2/\sqrt{c}} (4 - cx^2)\,dx = 128/3 = 2\left(4x - \frac{cx^3}{3}\right)\Big|_{-2/\sqrt{c}}^{2/\sqrt{c}} \rightarrow$$

$$\frac{8}{\sqrt{c}} - \frac{8}{3\sqrt{c}} - \left(\frac{-8}{\sqrt{c}} + \frac{8}{3\sqrt{c}}\right) = \frac{32}{3\sqrt{c}} = \frac{64}{3} \rightarrow \underline{\underline{c = 1/4}}$$

B.5: $f'(x) = 2x - 4, \; f'(4) = 4, \; f(4) = 0$

$t: y = 4x + q_t \rightarrow B\binom{4}{0} \in t: 0 = 4 \cdot 4 + q_t \rightarrow \underline{\underline{t: y = 4x - 16}}$

$n: y = -(x/4) + q_n \rightarrow B\binom{4}{0} \in n: 0 = -(4/4) + q_n \rightarrow \underline{\underline{n: y = 1 - x/4}}$