UniLU Musterprüfung B

A.1: Bestimme die Lösungsmenge von

$$4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$

A.2: Für welche Werte von a hat das System von linearen Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} 5x - 4ay = 11 \\ 3x - 8y = 7 \end{array} \right|$$

keine Lösung?

A.3: Die Punkte $A\binom{-1}{1/2}$ und $B\binom{2}{4}$ liegen auf dem Graphen von $f(x) = c \cdot a^x$. Bestimme die Parameter a und c.

A.4: Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet $g: y = mx - 8$. Bestimme die Steigung m so, dass g die Normalparabel $p: y = x^2$ berührt.

A.5: Für welche Werte von a gilt

$$\int_0^a x \cdot (a-x)\,dx = 36 \text{ ?}$$

B.1: Die Normalparabel $p: y = x^2$ wird von der Geraden $g: y = \frac{x}{2} + q$ senkrecht geschnitten.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g.

b) Bestimme den Flächeninhalt der von p und g eingeschlossenen Fläche.

B.2: Die kubische Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Koordinatenursprung. Die Wendetangente $t_w: y = -15x + 1$ berührt den Graphen von f an der Stelle $x = 1$. Bestimme die Parameter a, b, c und d.

B.3: Zwei Funktionen sind gegeben wie folgt: $f_1(x) = ax^2$ und $f_2(x) = a(2a^2 - x^2)$, wobei $a > 0$. Bestimme den Parameter a so, dass die Graphen der Funktionen sich im ersten Quadranten senkrecht schneiden. Bestimme auch den Schnittpunkt im ersten Quadranten.

B.4: Zwei Funktionen sind gegeben wie folgt: $f_1(x) = 2c^2 - x^2$ und $f_2(x) = x^2$. Bestimme den Formparameter c so, dass die Graphen von f_1 und f_2 eine Fläche mit Flächeninhalt 576 einschliessen.

B.5: Die Gerade t berührt den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x = 16$. Die Gerade n schneidet den Graph an derselben Stelle $x = 16$ senkrecht. Bestimme Funktionsgleichungen für t und n.

Musterlösungen B

A.1: $u=2^x\ ,\ u^2=(2^x)^2=4^x \rightarrow (u^2-12u+32)=(u-8)\cdot$
$(u-4)=0 \rightarrow u_1=2^{x_1}=8=2^3 \rightarrow \underline{\underline{x_1=3}}$
$u_2=2^{x_2}=4=2^2 \rightarrow \underline{\underline{x_2=2}}$

A.2: $\begin{vmatrix} 5x-4ay=11 \\ 3x-8y=7 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} y=\frac{5}{4a}x-\frac{11}{4a} \\ y=\frac{3}{8}x-\frac{7}{8} \end{vmatrix} \rightarrow \frac{5}{4a}=\frac{3}{8} \rightarrow \underline{\underline{a=10/3}}$

$-11/(4a)=-33/40 \neq -7/8 \rightarrow$ <u>keine</u> Lösung!

A.3: $\begin{vmatrix} c/a=1/2 \\ ca^2=4 \end{vmatrix} \rightarrow c=\frac{a}{2}=\frac{4}{a^2} \rightarrow a^3=8 \rightarrow a=2$
$\underline{\underline{c=a/2=1}}$

A.4: $g\cap p:\ x^2=mx-8 \rightarrow x^2-mx+8=0 \rightarrow$
Diskriminante: $D=m^2-4\cdot 1\cdot 8=m^2-32=0$
$\rightarrow m=\pm\sqrt{32}=\underline{\underline{\pm 4\sqrt{2}}},\ \underline{\underline{m_1=5.657,\ m_2=-5.657}}$

A.5: $\int_0^a (ax-x^2)dx=\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}=36$
$\rightarrow \underline{\underline{a=6}}$

B.1: $p: y'=2x \rightarrow y'=2x=-2 \rightarrow x=-1$
a) $p: y(-1)=1 \rightarrow P\binom{-1}{1}\in g: 1=\frac{-1}{2}+q \rightarrow q=\frac{3}{2}$
$\underline{\underline{g: y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}}$
b) $p\cap g: x^2=(x+3)/2 \rightarrow 2x^2-x-3=(x+1)\cdot(2x-3)=0$
$\rightarrow x_1=-1$ und $x_2=3/2 \rightarrow A=\int_{-1}^{3/2}\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{2}-x^2\right)dx=$
$\left(\frac{3}{2}x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{3/2}=\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{16}-\frac{9}{8}\right)-\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{125}{48}=2.604}}$

B.2: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \rightarrow f(0)=d=0$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow f'(1)=3a+2b+c=-15$
$f''(x)=6ax+2b=2(3ax+b) \rightarrow f(1)=2(3a+b)=0 \rightarrow b=-3a$
$f(1)=a+b+c=-14 \qquad \begin{vmatrix} 3a+2b+c=-15 \\ a+b+c=-14 \end{vmatrix}\Big\}-$
$2a+b=2a-3a=-a=-1$
$\underline{\underline{a=1,\ b=-3a=-3,\ c=-14-a-b=-14-1+3=-12,\ d=0}}$

$\underline{B.3:}$ $f_1 \cap f_2: ax^2 = a(2a^2 - x^2) \rightarrow x = \pm a$

$f_1' = 2ax$, $f_2' = -2ax \rightarrow 2ax \cdot (-2ax) = -4a^2x^2 = -1$

$\rightarrow 2ax = \pm 1$, wenn $x = \pm a \rightarrow 2a^2 = 1 \rightarrow a = (\pm)\sqrt{1/2}$

$\rightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{1/2} = 0.7071}}$, weil $a > 0$

$f_1(\sqrt{1/2}) = \sqrt{1/2} \cdot (\sqrt{1/2})^2 = \sqrt{2}/4 \rightarrow \underline{\underline{S\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/4\end{pmatrix} \rightarrow S\begin{pmatrix}0.7071 \\ 0.3536\end{pmatrix}}}$

$\underline{B.4:}$ $f_1 \cap f_2: 2c^2 - x^2 = x^2 \rightarrow x = \pm c$

$2\int_{-c}^{c} (c^2 - x^2)\,dx = 576 \rightarrow \left(c^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-c}^{c} = 288$

$c^3 - \frac{c^3}{3} - \left(-c^3 + \frac{c^3}{3}\right) = \frac{4}{3}c^3 = 288 \rightarrow c^3 = 216 \rightarrow \underline{\underline{c = \pm 6}}$

$\underline{B.5:}$ $f(16) = \sqrt{16} = 4$, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) \rightarrow f'(16) = 1/(2\sqrt{16}) = 1/8$

$t: y = \frac{x}{8} + q_t \rightarrow P\begin{pmatrix}16 \\ 4\end{pmatrix} \in t: 4 = \frac{16}{8} + q_t = 2 + q_t \rightarrow q_t = 2$

$\rightarrow \underline{\underline{t: y = \frac{x}{8} + 2}}$

$n: y = -8x + q_n \rightarrow P\begin{pmatrix}16 \\ 4\end{pmatrix} \in n: 4 = -8 \cdot 16 + q_n \rightarrow q_n = 132$

$\rightarrow \underline{\underline{n: y = -8x + 132}}$