UniLU Musterprüfung C

A.1: Bestimme die Lösungsmenge von

$$x \cdot \lg(4 \cdot 3^x) = 12$$

A.2: Für welche Werte von a hat das System von linearen Gleichungen

$$\left| \begin{array}{l} (a+1)x - 3y = 5 \\ (a-4)x + 2y = 13 \end{array} \right|$$

A.3: Die Punkte $A\binom{2}{5}$ und $B\binom{3}{18}$ liegen auf dem Graphen von $f(x) = c \cdot x^a$. Bestimme die Parameter a und c.

A.4: Die Funktionsgleichung der Geraden g lautet $g\colon y = -\frac{x}{2} + q$. Bestimme den y-Achsenabschnitt q so, dass g die Normalparabel senkrecht schneidet. Für die Normalparabel gilt $p\colon y = x^2$.

A.5: Für welche Werte von a gilt

$$\int_1^a \frac{x^2 + a^2}{x^2}\,dx = 24 \;?$$

B.1: Die Gerade $g\colon y = x + q$ schneidet die Normalparabel an der Stelle $x = 3$.

a) Bestimme die Funktionsgleichung von g.

b) Bestimme den Flächeninhalt der von g und der Normalparabel eingeschlossenen Fläche.

Für die Normalparabel gilt $p\colon y = x^2$.

B.2: Der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ geht durch den Koordinatenursprung und hat Wendepunkte $W_1\binom{-2}{20}$ und $W_2\binom{2}{20}$.

Bestimme

a) die Parameter a, b und c.

b) Extrema.

B.3: Zwei Funktionen sind gegeben wie folgt:
$f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = 2ax - x^3$, wobei $a > 0$.
Bestimme den Parameter a so, dass die Graphen von f_1 und f_2 sich im ersten Quadranten senkrecht schneiden. Bestimme auch den Schnittpunkt im ersten Quadranten.

B.4: Zwei Funktionen sind gegeben wie folgt:
$k_1 : f(x) = cx$ und $k_2 : f(x) = x^4$.
a) Skizziere die Funktionen für $c = 3$.
b) Bestimme den Formparameter c so, dass die Graphen von k_1 und k_2 eine Fläche mit Flächeninhalt 30'000 einschliessen.

B.5: Die Gerade t berührt den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2$ im Wendepunkt. Die Gerade n schneidet den Graphen von f im Wendepunkt senkrecht. Bestimme Funktionsgleichungen für t und n.

Musterlösungen C

A.1: $x\cdot(\lg 4 + x\cdot\lg 3) = 12 \rightarrow x^2\cdot\lg 3 + x\cdot\lg 4 - 12 = 0$

$\rightarrow x = (-\lg 4 \pm \sqrt{(\lg 4)^2 - 4\cdot\lg 3\cdot(-12)})/(2\lg 3)$

$x_1 = 4.4237 \rightarrow 4.424\cdot\lg(4\cdot 3^{4.424}) = 12.002$ ✓

$\underline{\underline{x_2 = -5.6855}} \rightarrow (-5.69)\cdot\lg(4\cdot 3^{-5.69}) = 12.02$ ✓

A.2: $\begin{vmatrix} (a+1)x - 3y = 5 \\ (a-4)x + 2y = 13 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} y = \frac{a+1}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = \frac{4-a}{2}x + \frac{13}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \frac{a+1}{3} = \frac{4-a}{2}$

$\rightarrow \underline{\underline{a=2}}$ und es ist $-5/3 \neq 13/2$

A.3: $\begin{vmatrix} 5 = c\cdot 2^a \\ 18 = c\cdot 3^a \end{vmatrix} \rightarrow c = 5/2^a = 18/3^a \rightarrow \frac{3^a}{2^a} = \left(\frac{3}{2}\right)^a = \frac{18}{5}$

$\rightarrow a = \lg(18/5)/\lg(3/2) = \underline{\underline{3.159}}\,,\ c = 5/2^a = \underline{\underline{0.560}}$

A.4: $m_g = -1/2\,,\ p: y' = 2x = -1/(-1/2) = 2 \rightarrow x = 1$

$p: y(1) = 1 \rightarrow P\binom{1}{1} \in g: 1 = \frac{-1}{2} + q \rightarrow \underline{\underline{q = 3/2}}$

A.5: $\int_1^a \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)dx = \left(x - \frac{a^2}{x}\right)\Big|_1^a = (a-a) - (1-a^2) = a^2 - 1 = 24$

$\rightarrow \underline{\underline{a = +5}}$

B.1: $g: y(3) = 9 = 3 + q$

a) $q = 6 \rightarrow \underline{\underline{g: y = x+6}}$

b) $g \cap p: x^2 = x + 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = (x-3)\cdot(x+2) = 0$

$A = \int_{-2}^{3}[x + 6 - x^2]dx = \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{3} = \frac{9}{2} + 18 - 9$

$-\left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) = \frac{27}{2} - \left(\frac{-22}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{125}{6} = 20.833}}$

B.2: a) $O\binom{0}{0} \in f: \underline{c = 0}$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx\,,\ f''(x) = 12ax^2 + 2b = 2(6ax^2 + b)$

$f''(2) = 2(24a + b) = 0 \rightarrow b = -24a$

$f(2) = 16a - 96a = -80a = 20 \rightarrow \underline{\underline{a = -1/4}}$

$b = -24a = \underline{\underline{6}}$

b) $f'(x) = -x^3 + 12x = x(12 - x^2) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2\sqrt{3}, x_3 = -2\sqrt{3}$

$\rightarrow \underline{\underline{T\binom{0}{0}}}\,,\ f(\pm 2\sqrt{3}) = 6\cdot 12 - \frac{12^2}{4} = 36 \rightarrow \underline{\underline{H_1\binom{-2\sqrt{3}}{36} \text{ und } H_2\binom{2\sqrt{3}}{36}}}$

B.3: $f_1 \cap f_2 : 2ax - x^3 = x^3 \rightarrow 2x(a - x^2) = 0$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{a},\ f_1'(x) = 3x^2,\ f_2'(x) = 2a - 3x^2$

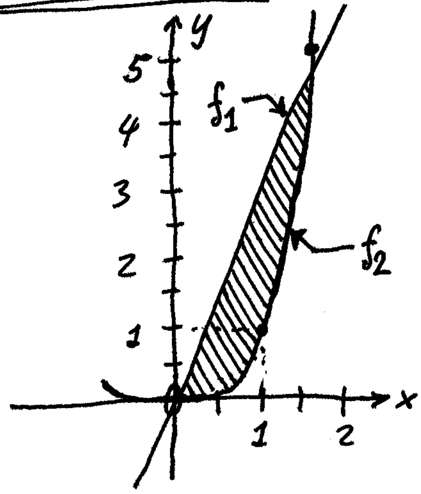
$f_1'(a) \cdot f_2'(a) = 3a \cdot (2a - 3a) = -3a^2 = -1 \rightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{3}/3 = 0.577}}$

$f_1(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/9 \longrightarrow \underline{\underline{S\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/9\end{pmatrix} \rightarrow S\begin{pmatrix}0.5774 \\ 0.1925\end{pmatrix}}}$

B.4:

x	$f_1(x) = 3x$	$f_2(x) = x^4$
$-1/2$	-1.5	0.0625
0		0
$1/2$		0.0625
1		1
$3/2$		5.0625
2	6	16

(a)



b) $f_1 \cap f_2 : cx = x^4 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[3]{c}$

$$\int_0^{\sqrt[3]{c}} [cx - x^4]\,dx = \left(c\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt[3]{c}} = \frac{c}{2}\cdot c^{2/3} - \frac{c^{5/3}}{5} = \frac{3}{10}c^{5/3}$$

$\rightarrow c^{5/3} = 100'000 = 10^5 \rightarrow c = (10^5)^{3/5} = 10^3 = \underline{1000}$

B.5: $f(x) = x^3 - 6x^2,\ f'(x) = 3x^2 - 12x,\ f''(x) = 6x - 12 = 0$

$\rightarrow x_W = 2,\ f(2) = -16 \rightarrow W\begin{pmatrix}2 \\ -16\end{pmatrix},\ f'(2) = -12$

$t: y = -12x + q \rightarrow W\begin{pmatrix}2 \\ -16\end{pmatrix} \in t: -16 = -12\cdot 2 + q \rightarrow q = 8$

$\underline{\underline{t: y = -12x + 8}} \longrightarrow n: y = \frac{x}{12} + b \rightarrow W\begin{pmatrix}2 \\ -16\end{pmatrix} \in n: -16 = \frac{1}{6} + b$

$\rightarrow b = -97/6 \rightarrow \underline{\underline{n: y = \frac{x}{12} - \frac{97}{6}}}$