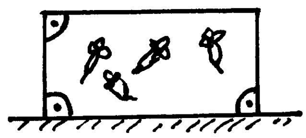
Musterprüfung:

Themen: • Extremwertaufgaben mit quadratischen Funktionen als Zielfunktion

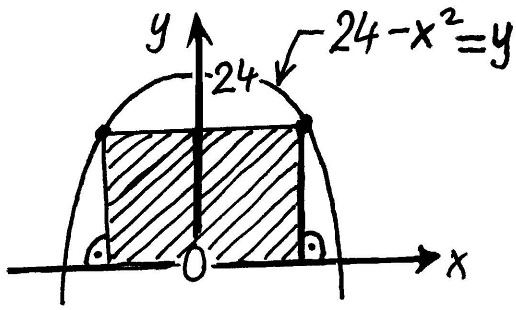
1.) Bestimme das Extremum für
Zielfunktion: $z(x,h) = 2x^2 + xh - 10$
Nebenbedingung: $h = 3 - x$

2.) Von zwei Zahlen ist eine um 8 kleiner als das Doppelte der anderen Zahl. Für welche Zahlen ist ihr Produkt am kleinsten?

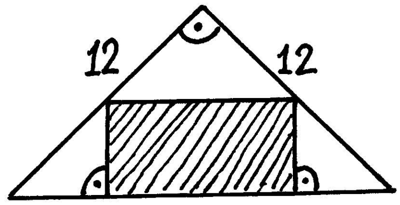
3.) Mit einem 48m langen Drahtzaun soll eine möglichst grosse Weidefläche eingezäunt werden. Die eingezäunte Fläche soll rechteckig sein, wobei eine Rechteckseite entfällt, weil eine Hauswand als Abgrenzung genutzt werden soll. Wie gross ist die maximale Weidefläche?



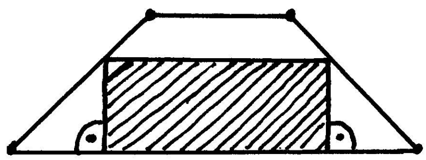
4.) Wie gross ist der grösstmögliche Umfang des Rechtecks (schraffiert!) mit einer Seite auf der x-Achse und zwei Eckpunkten auf der Parabel $p: y = 24 - x^2$?



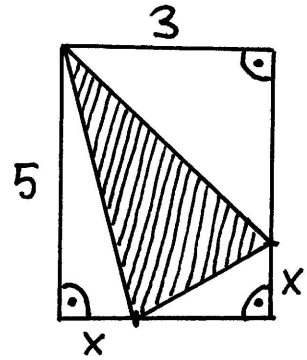
5.) Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck (halbes Quadrat!) wird ein Rechteck einbeschrieben. Wie gross ist die grösstmögliche Fläche des Rechtecks, wenn die Katheten des Dreiecks 12 cm messen?



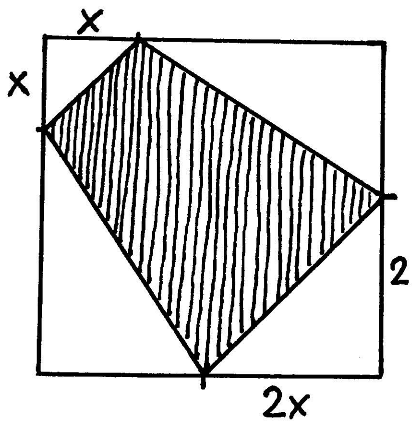
6.) Wie gross ist der grösstmögliche Flächeninhalt des schraffierten Rechtecks? Die Basiswinkel des gleichschenkligen Trapezes sind 45° und seine Grundlinien messen 18 und 6cm.



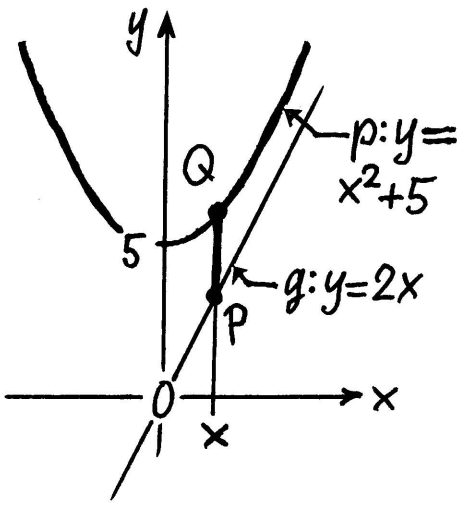
7.) Für welchen Wert von x hat das schraffierte Dreieck einen minimalen Flächeninhalt und wie gross ist dieser minimale Flächeninhalt?



8.) Für welchen Wert von x hat das gleichschenklige Trapez minimalen Flächeninhalt? Die Seitenlänge des Quadrats misst 12cm. Wie gross ist der minimale Flächeninhalt des Trapezes?



9.) Gegeben sind eine Gerade $g: y = 2x$ und eine Parabel $p: y = x^2 + 5$. Bestimme den Wert von x für welchen die Strecke $\overline{PQ}$ minimal wird. Dabei sind P und Q Punkte mit der gleichen x-Koordinate und es gilt $P \in g$ und $Q \in p$.
Wie gross ist die minimale Strecke $\overline{PQ}$?



Lösungen:

1.) $z(x,h) = 2x^2 + xh - 10 \rightarrow z(x) = 2x^2 + x(3-x) - 10$
$= 2x^2 + 3x - x^2 - 10 = x^2 + 3x - 10.$

a	b	c
1	3	-10

$x_0 = -b/(2a) = -3/(2\cdot 1) = \underline{\underline{-3/2}}$

$y_0 = c - b^2/(4a) = -10 - 3^2/(4\cdot 1) = \underline{\underline{-12.25}}$

$h_0 = 3 - x = \underline{4.5}$

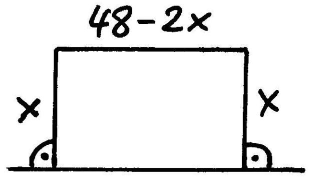
2.) $x\cdot(2x-8) = z(x),\ y = 2x^2 - 8x$

a	b	c
2	-8	0

$x_0 = -b/(2a) = 8/(2\cdot 2) = 2$

Antw.: Die Zahlen heissen $\underset{\uparrow x}{\underline{\underline{2}}}$ und $\underset{\uparrow 2x-8}{\underline{\underline{-4}}}$

3.)



$z(x) = x\cdot(48-2x) = 48x - 2x^2$

a	b	c
-2	48	0

$x_0 = -b/(2a)$
$= -48/(2\cdot(-2))$
$= 12$

$z(12) = 12\cdot(48 - 2\cdot 12)\,m^2$

$\max(z) = \underline{\underline{288 m^2}}$

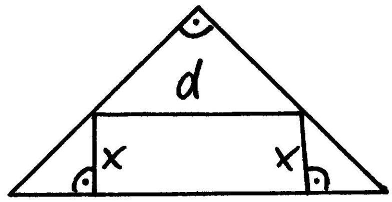
4.) $z = 4x + 2y = 4x + 2(24 - x^2) = -2x^2 + 4x + 48$

a	b	c
-2	4	48

$x_0 = -b/(2a) = -4/(2\cdot(-2)) = 1$

$z(x_0) = -2\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 48 = \underline{\underline{50}}$

5.) Grundlinie: $\sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$.
$d = 12\sqrt{2} - 2x,\ z(d,x) = d\cdot x$
$\rightarrow z(x) = 12\sqrt{2}\,x - 2x^2$



a	b	c
-2	$12\sqrt{2}$	0

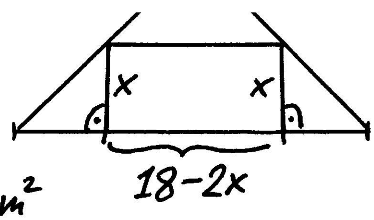
$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12\sqrt{2}}{2\cdot(-2)} = 3\sqrt{2}$

$z(3\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} - 2\cdot(3\sqrt{2})^2\,cm^2 = \underline{\underline{36 cm^2}}$

6.) $z(x) = x\cdot(18-2x) = 18x - 2x^2$

a	b	c
-2	18	0

$x_0 = -b/(2a) =$
$-18/(-4) = 4.5$



$z(4.5) = 18\cdot 4.5 - 4.5^2\cdot 2 = 40.5 \rightarrow \underline{\underline{40.5 cm^2}}$

7.) $z = 15 - 5x/2 - (3/2)(5-x) - (x/2)\cdot(3-x)$
$= (x^2 - 5x + 15)/2$

a	b	c
1/2	-5/2	15/2

$x_0 = -b/(2a) = \underline{5/2}$

$y_0 = c - b^2/(4a) = 15/2 - 25/(4\cdot 2) = \underline{\underline{35/8}}$

Antw.: Der minimale Flächeninhalt ist $35/8 = \underline{4.375}$. Es ist dann $\underline{\underline{x = 2.5}}$

8.) $z(x) = 12^2 - x^2/2 - (1/2)\cdot(2x)^2 - (12-x)\cdot(12-2x)$
$= 144 - 2.5x^2 - (144 - 36x + 2x^2) = 36x - 4.5x^2$

a	b	c
-4.5	36	0

$x_0 = -b/(2a) = -36/(2\cdot(-4.5))$
$x_0 = \underline{4}$

$y_0 = c - b^2/(4a) = 0 - 36^2/(4\cdot(-4.5)) = \underline{\underline{72}}$

Antw.: Für $\underline{\underline{x = 4}}$ erhält man einen minimalen Flächeninhalt von $\underline{\underline{72}}$.

9.) $z = x^2 + 5 - 2x = x^2 - 2x + 5$, $x_0 = -b/(2a) =$
$+2/(2\cdot 1) = 1 \rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$, $z(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 5 = \underline{\underline{4}}$

Antw.: Die minimale Streckenlänge erhält man für $\underline{\underline{x = 1}}$. Sie misst $\underline{\underline{4}}$.