Bénédict

Musterprüfung

Mathematik

Datum (der Prüfung): ....

Themen:

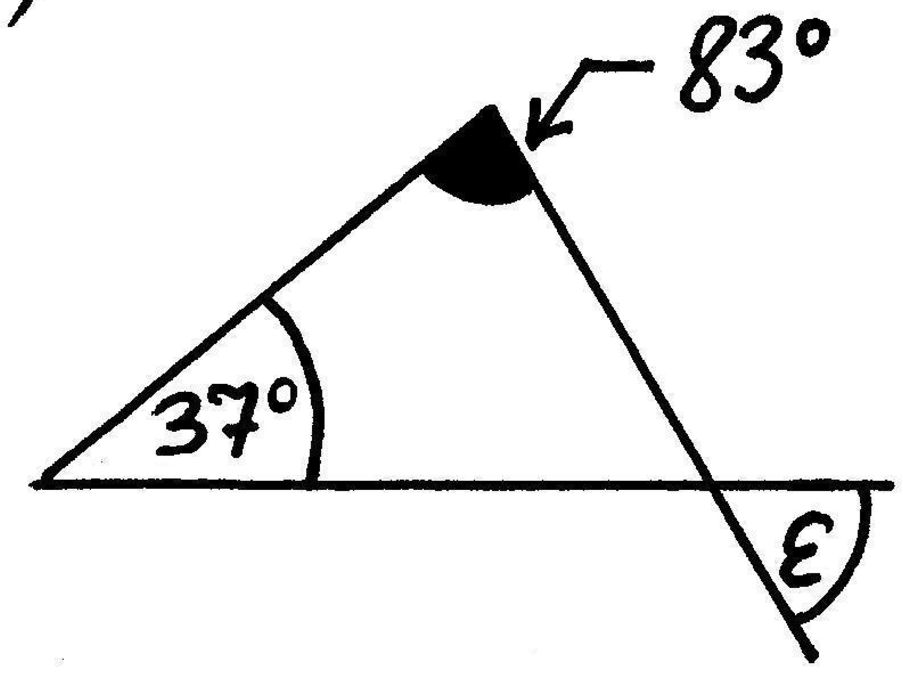
Serie 6:
- Winkel berechnen
- Figuren berechnen (Flächen, "Pythagoras")
- Dreieckskonstruktionen

Serie 8:
- Pythagoras in 3D
- Körper berechnen (Quader Pyramiden)
- Geschwindigkeit

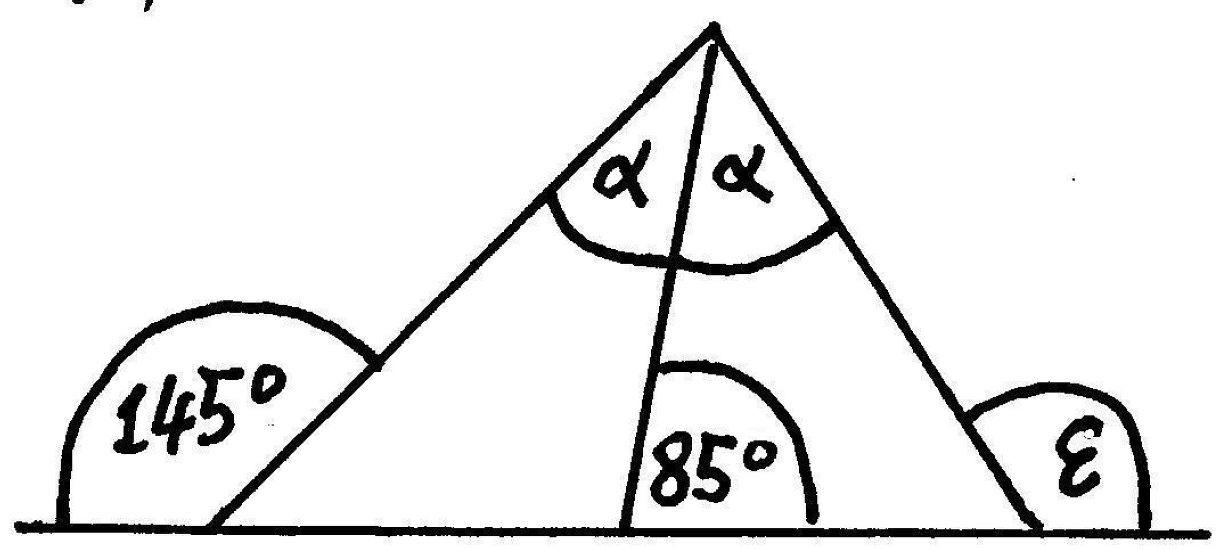
Serie 6

6.1) Berechne ε

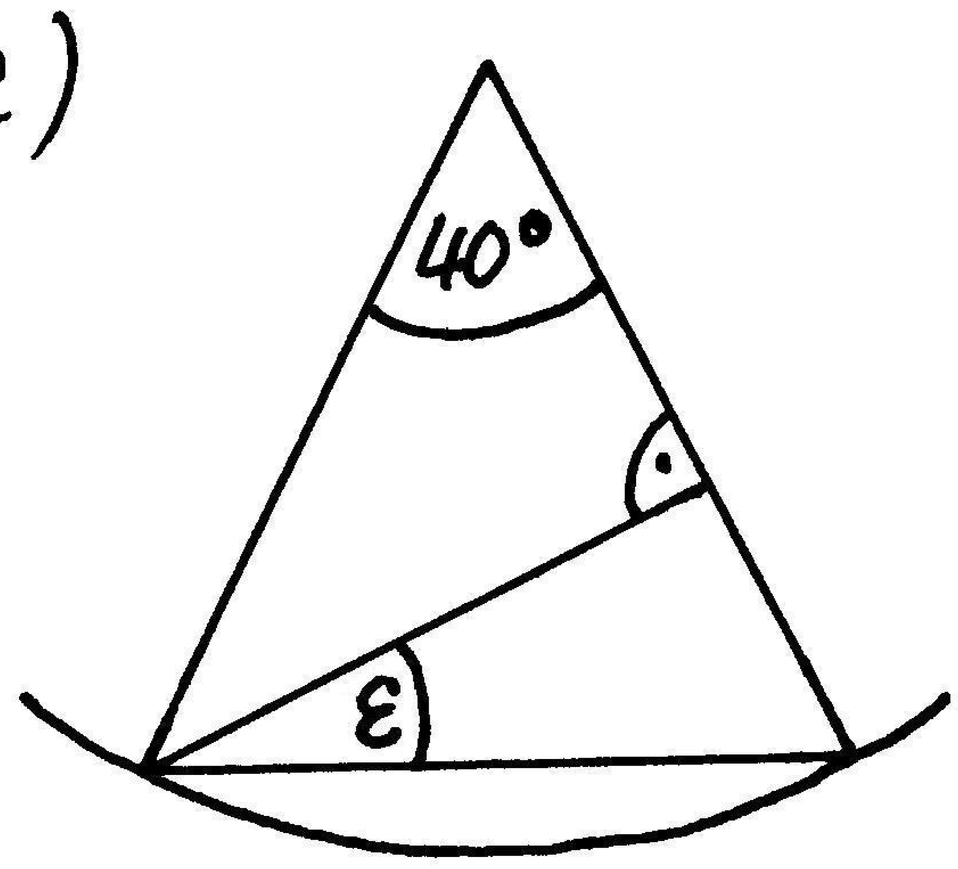
a)



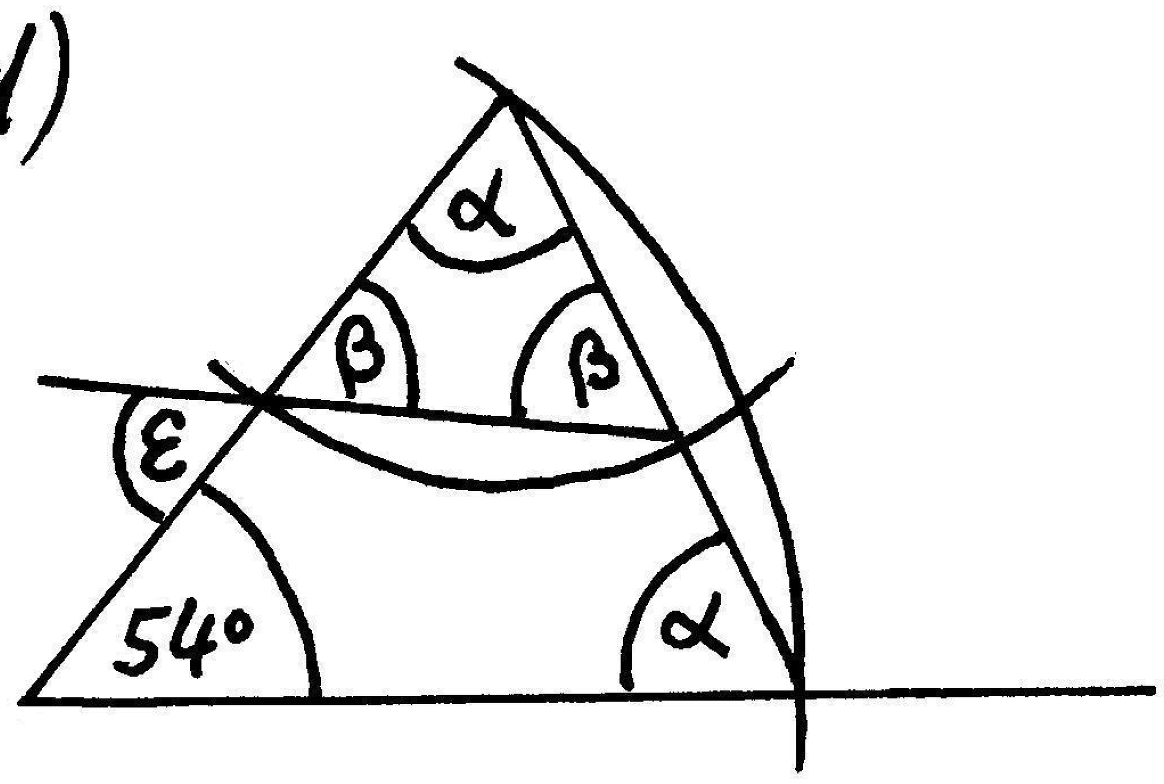
b)



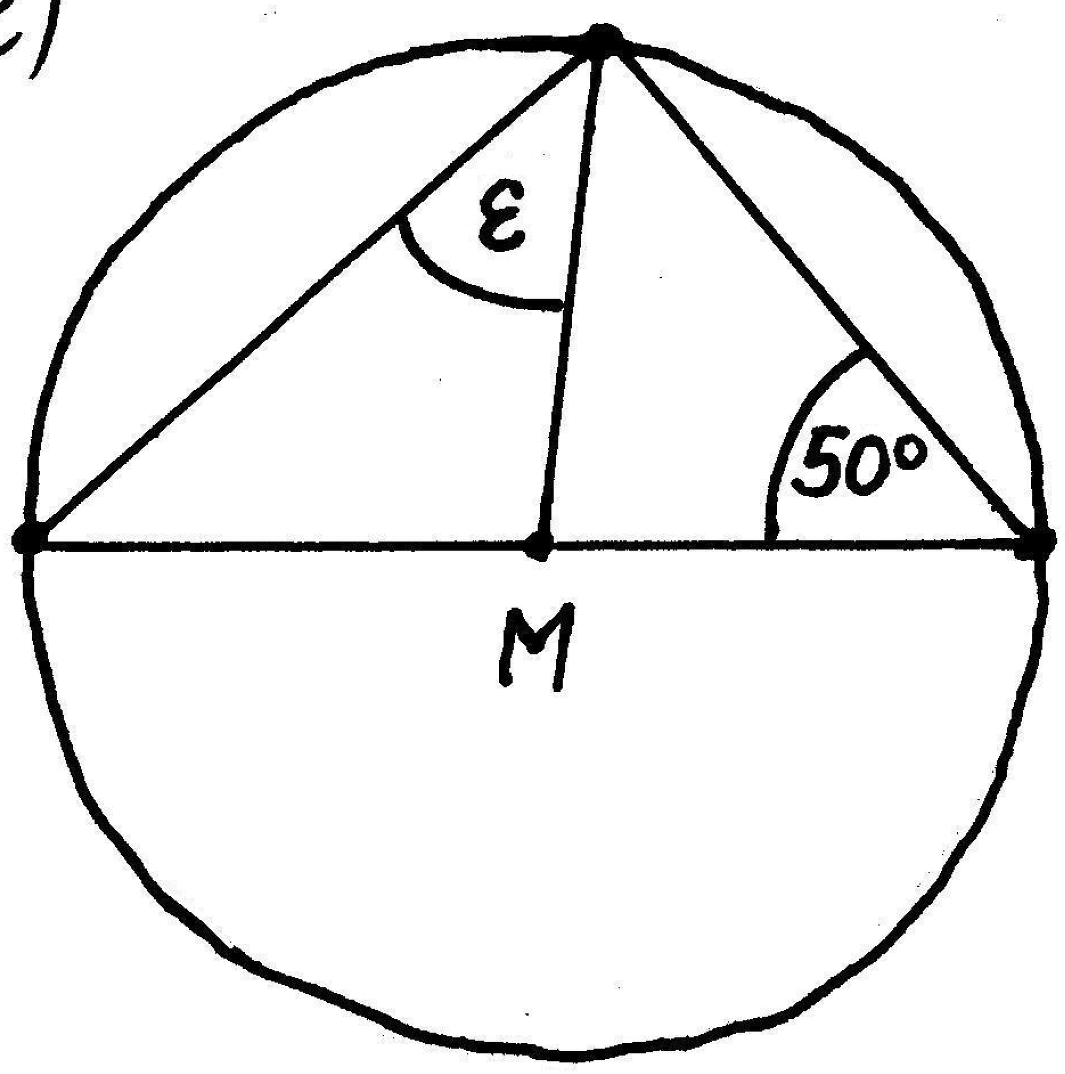
c)



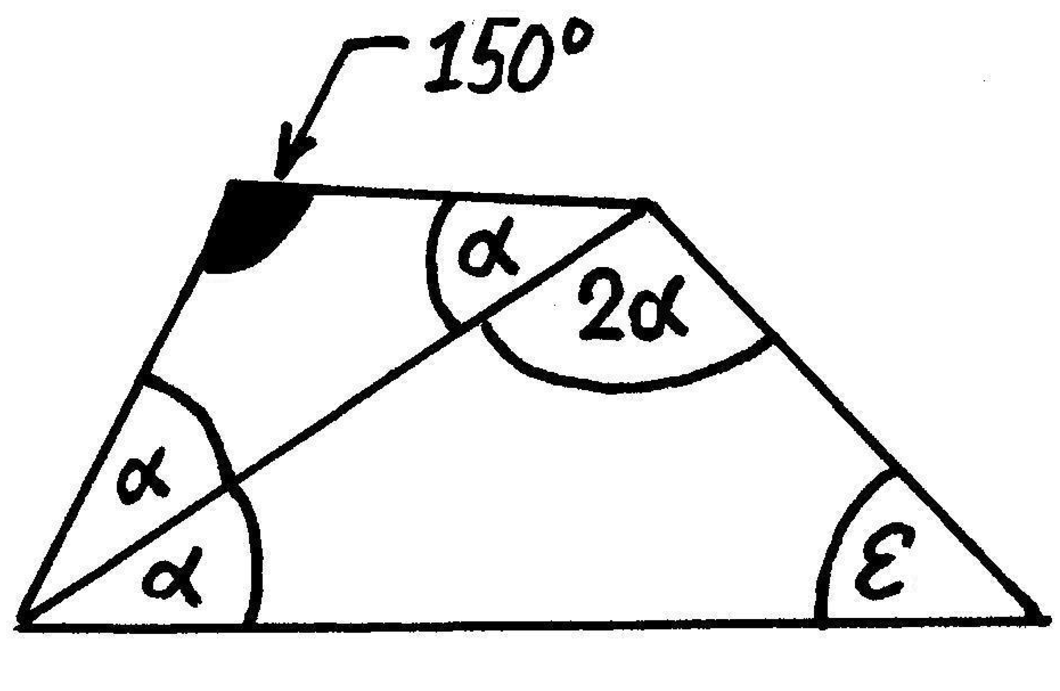
d)



e)



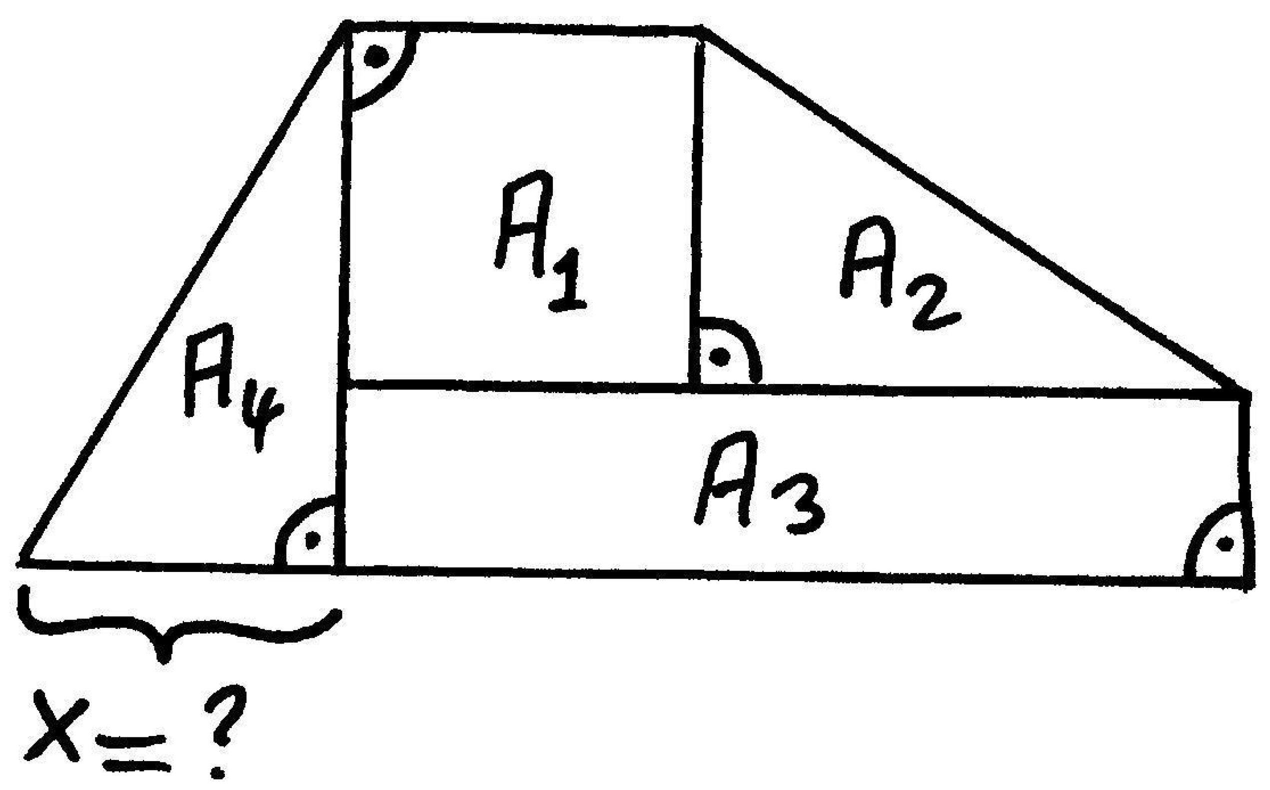
f)



6.2) Bei welchen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt ausserhalb des Dreiecks?

6.3) Ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundlinie 16 cm hat einen Flächeninhalt von 120 cm^2. Wie gross ist sein Umfang?

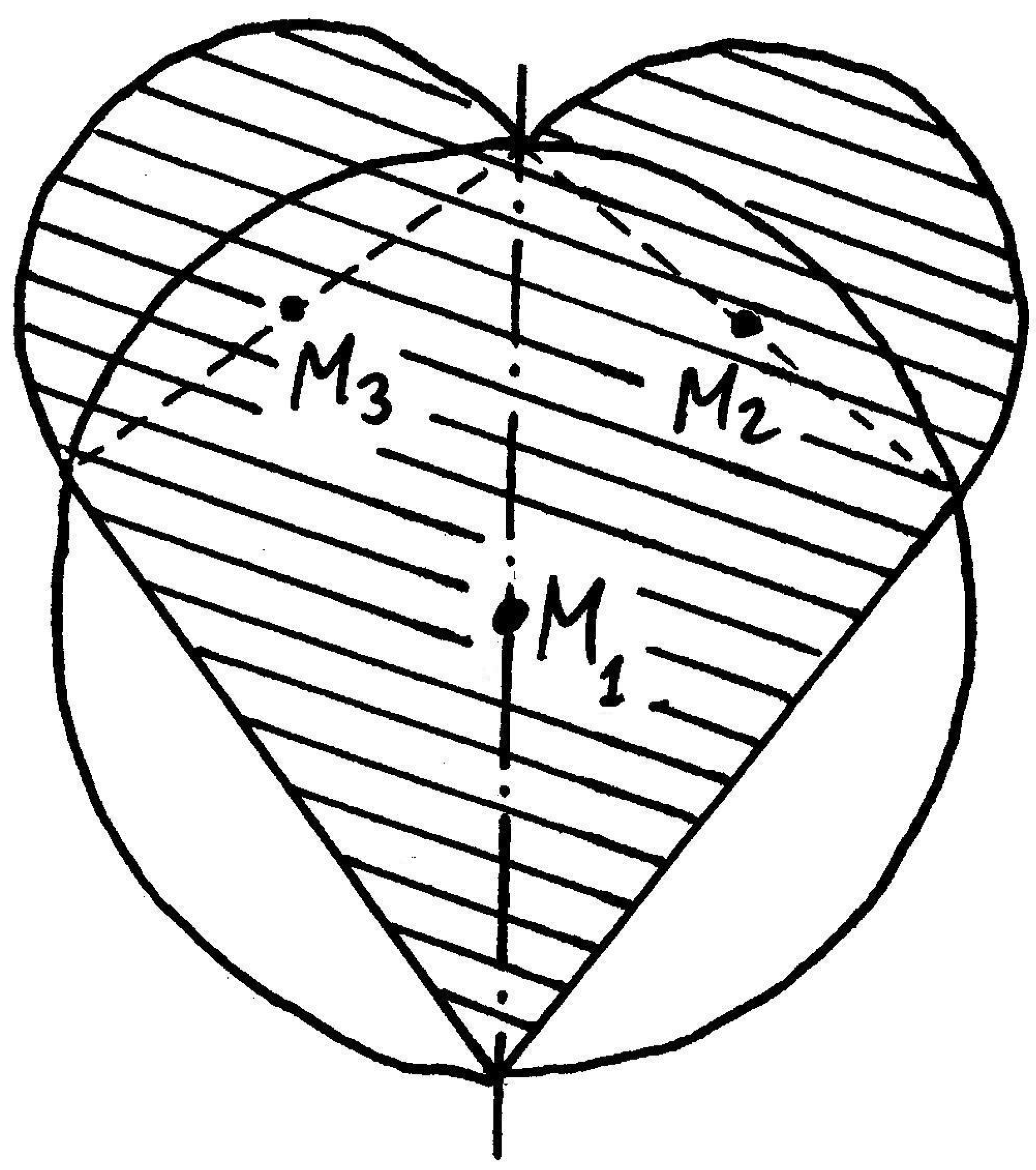
6.4) Das Quadrat, das Rechteck und die beiden rechtwinkligen Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt ($A_1 = A_2 = A_3 = A_4$).



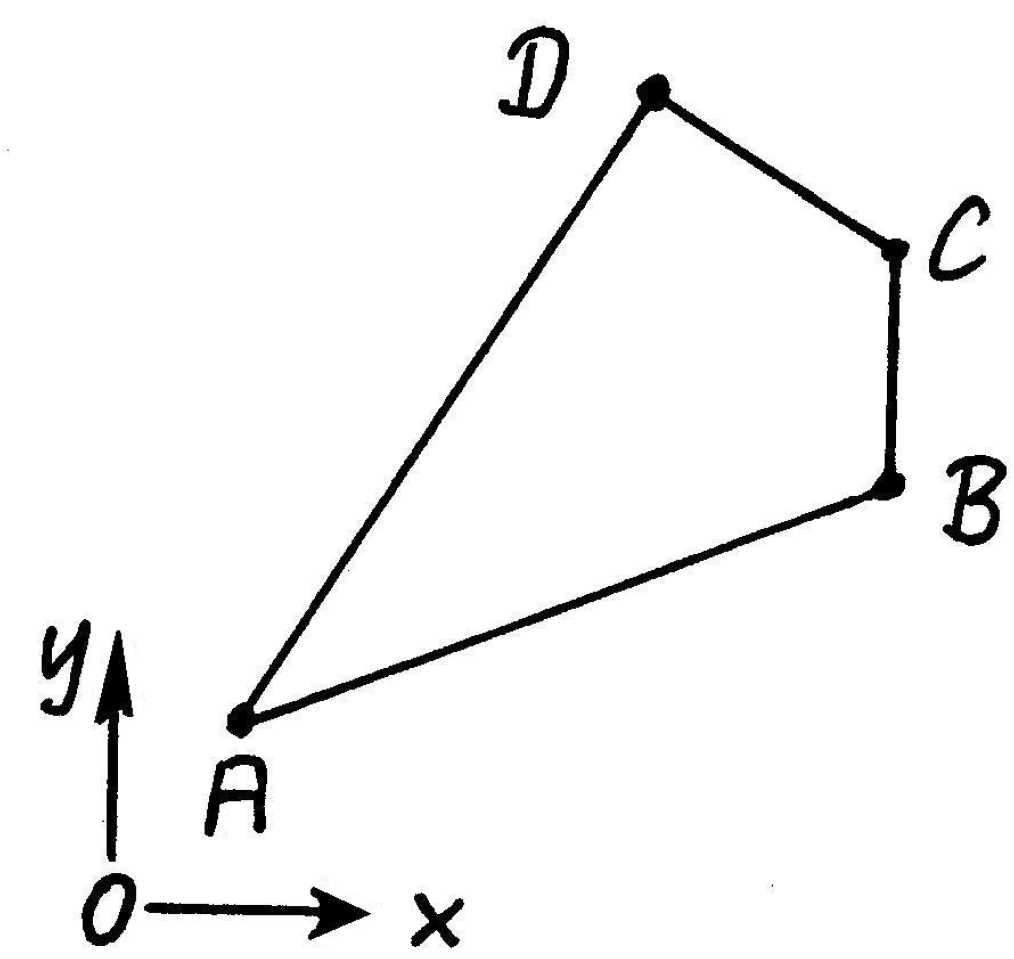
Der Flächeninhalt der vier Figuren zusammen beträgt $144\,cm^2$.
Berechne die Grösse x.

6.5) Wie gross ist die Höhe h_c eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten 8cm und 15cm? Berechne auch die Höhenabschnitte p und q auf der Hypothenuse c.

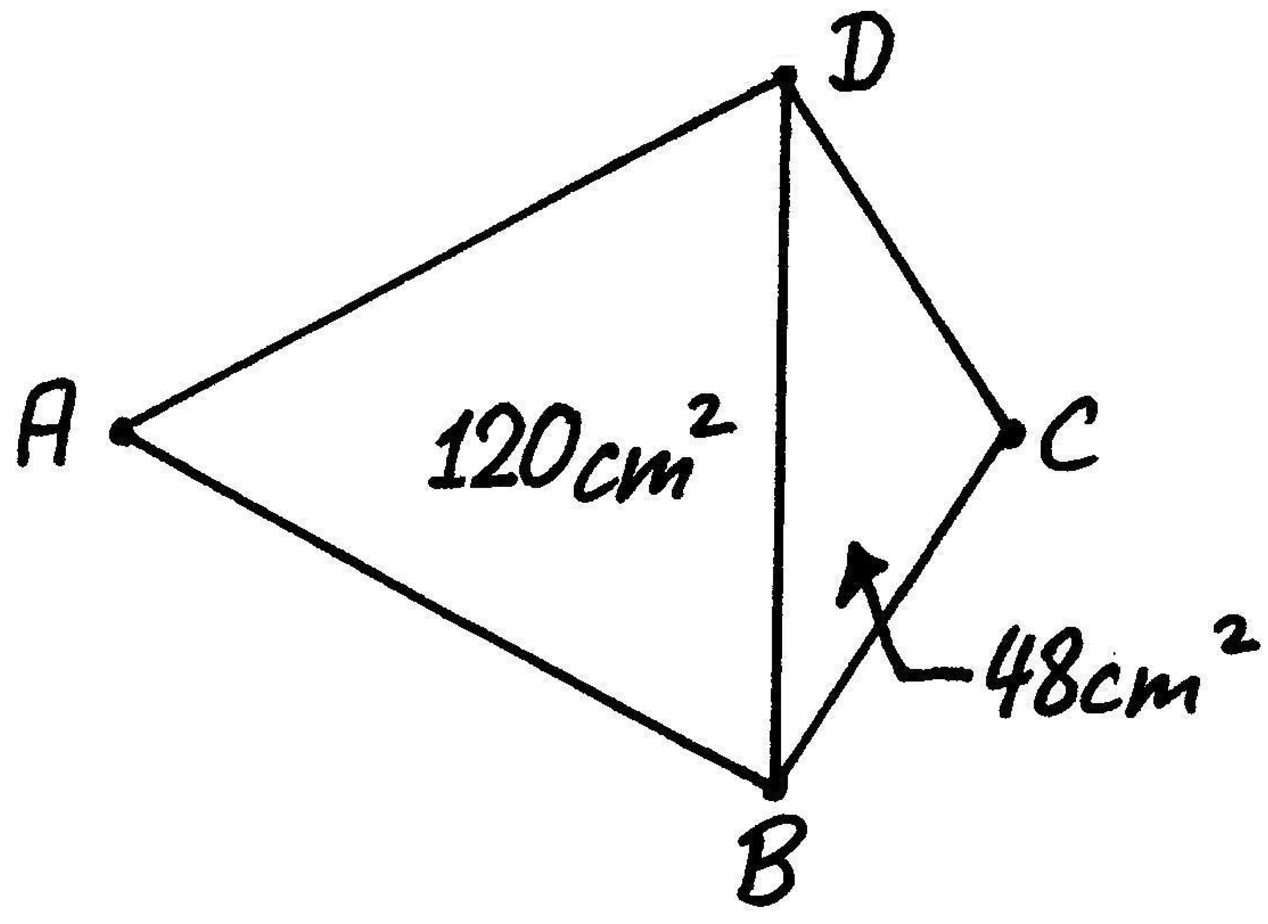
6.6) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der schraffierten herzförmigen Figur. Der Kreisradius ist 5cm und die Radien der beiden Halbkreise sind 3cm lang.



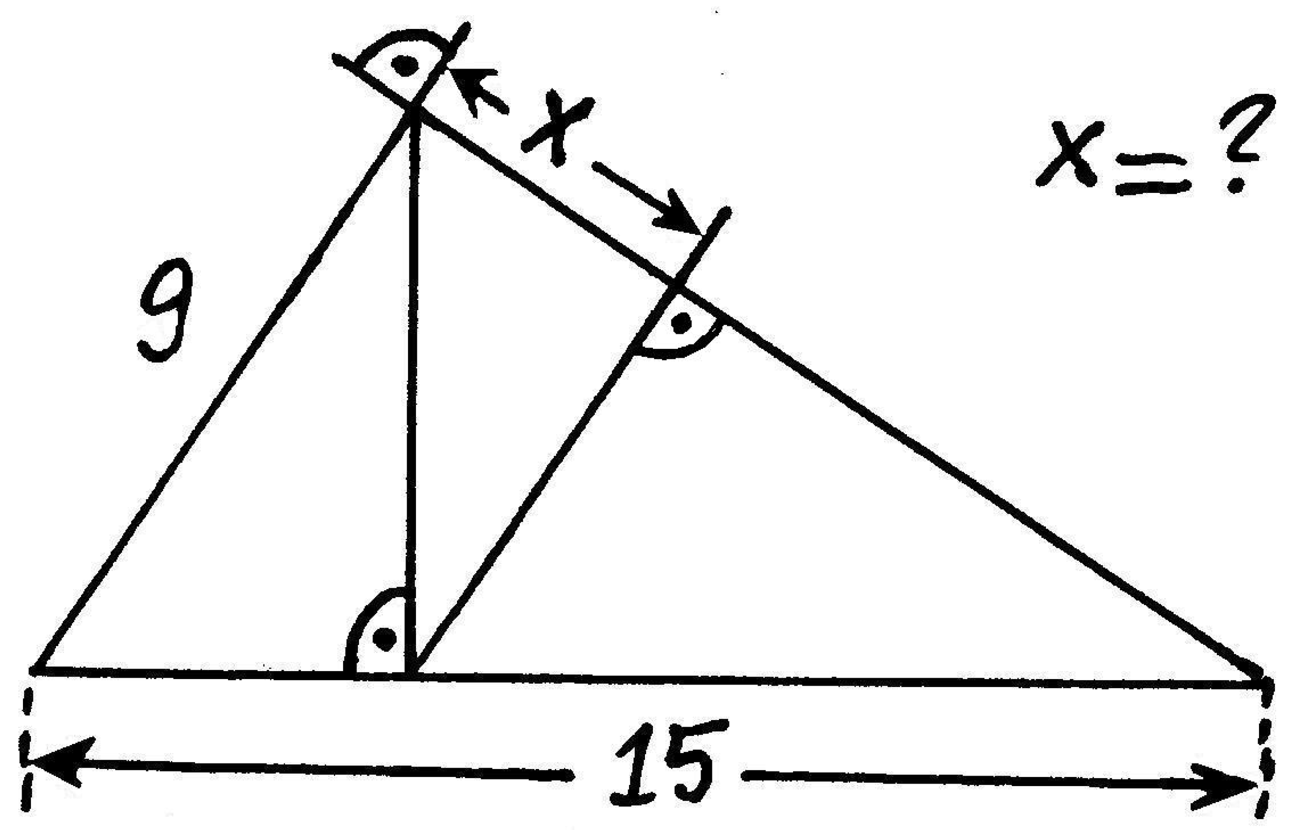
6.7) Berechne Umfang und Flächeninhalt des Vierecks ABCD, wenn $A\binom{2}{4}$, $B\binom{17}{12}$, $C\binom{17}{22}$ und $D\binom{9}{28}$.



6.8) Die Diagonale BD der Länge 16cm des Drachenvierecks ABCD zerteilt dieses in zwei gleichschenklige Dreiecke mit Flächeninhalten $48cm^2$ und $120cm^2$. Wie gross ist der Umfang des Drachenvierecks?

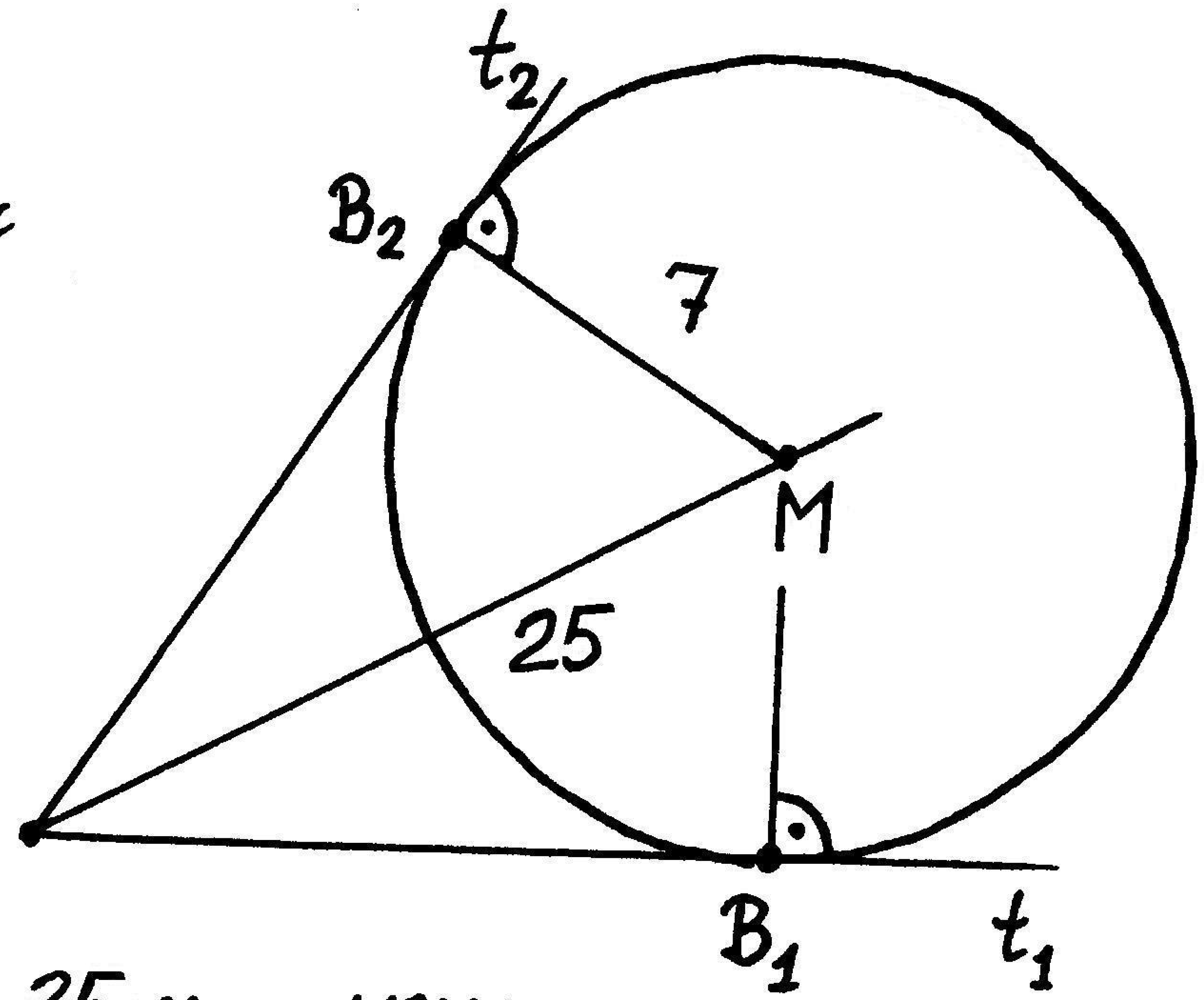


6.9) Berechne die Grösse x. [Längenmasse in cm].



6.10) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man eine Kathete und eine Seitenhalbierende wie folgt: $a = 24cm$ und $s_b = 25cm$. Berechne die fehlenden Seiten b und c des Dreiecks.

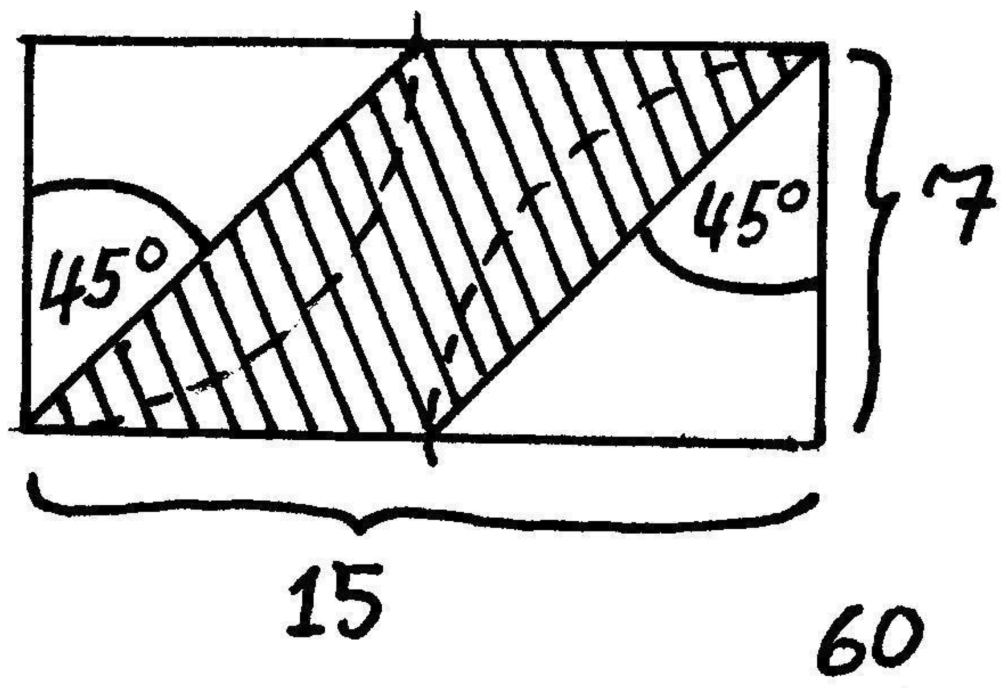
6.11) An einen Kreis mit Radius $r = 7cm$ werden von einem Punkt P aus Tangenten gelegt.



Der Punkt P liegt 25cm vom Kreismittelpunkt M entfernt ($\overline{PM} = 25cm$). Wie weit von P entfernt liegen die Berührungspunkte B_1 und B_2 der Tangenten t_1, resp. t_2? ($\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = ?$).

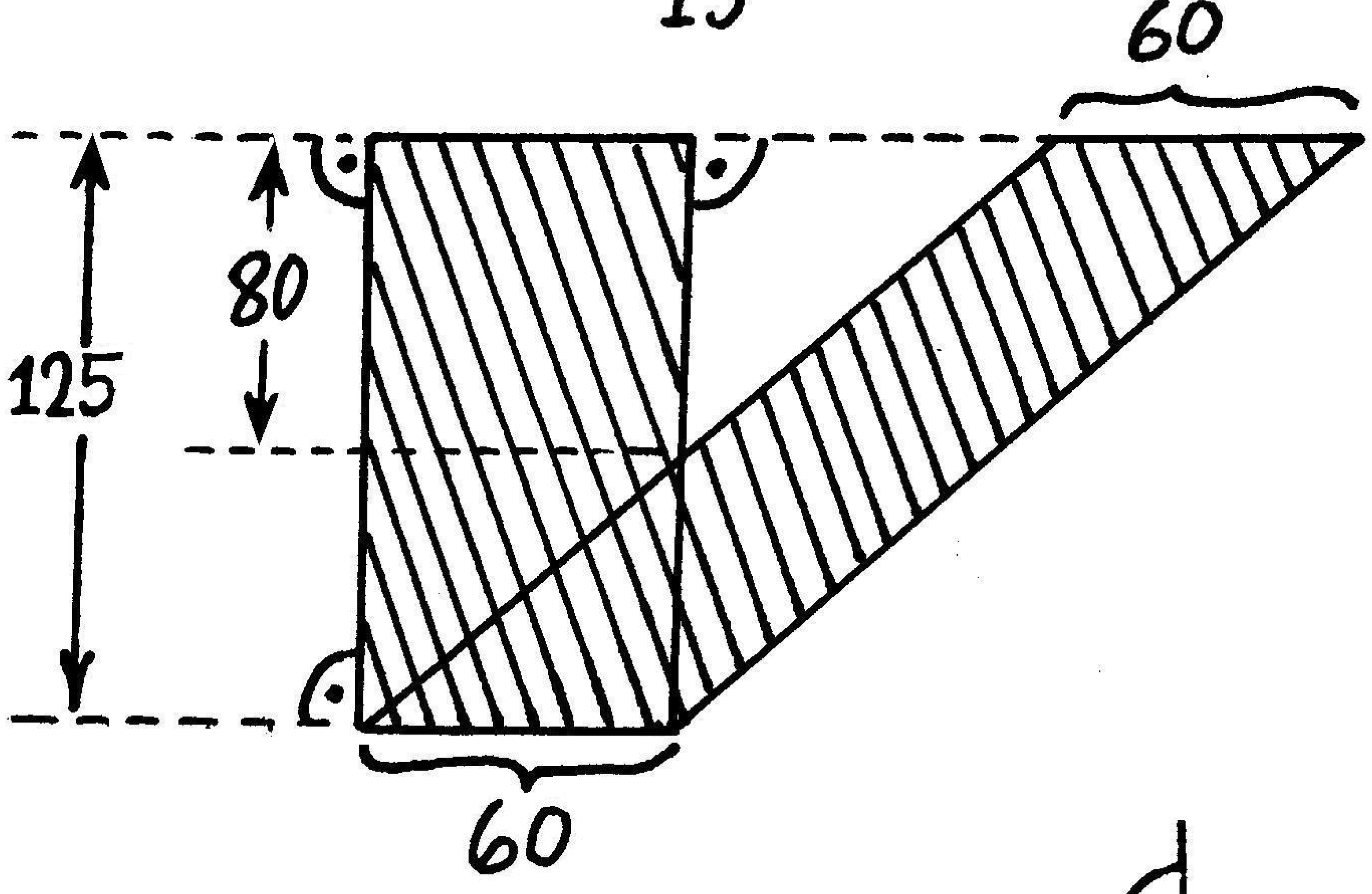
6.12) Berechne den Flächeninhalt des schraffierten Rhombus.

[Längenmasse in cm]



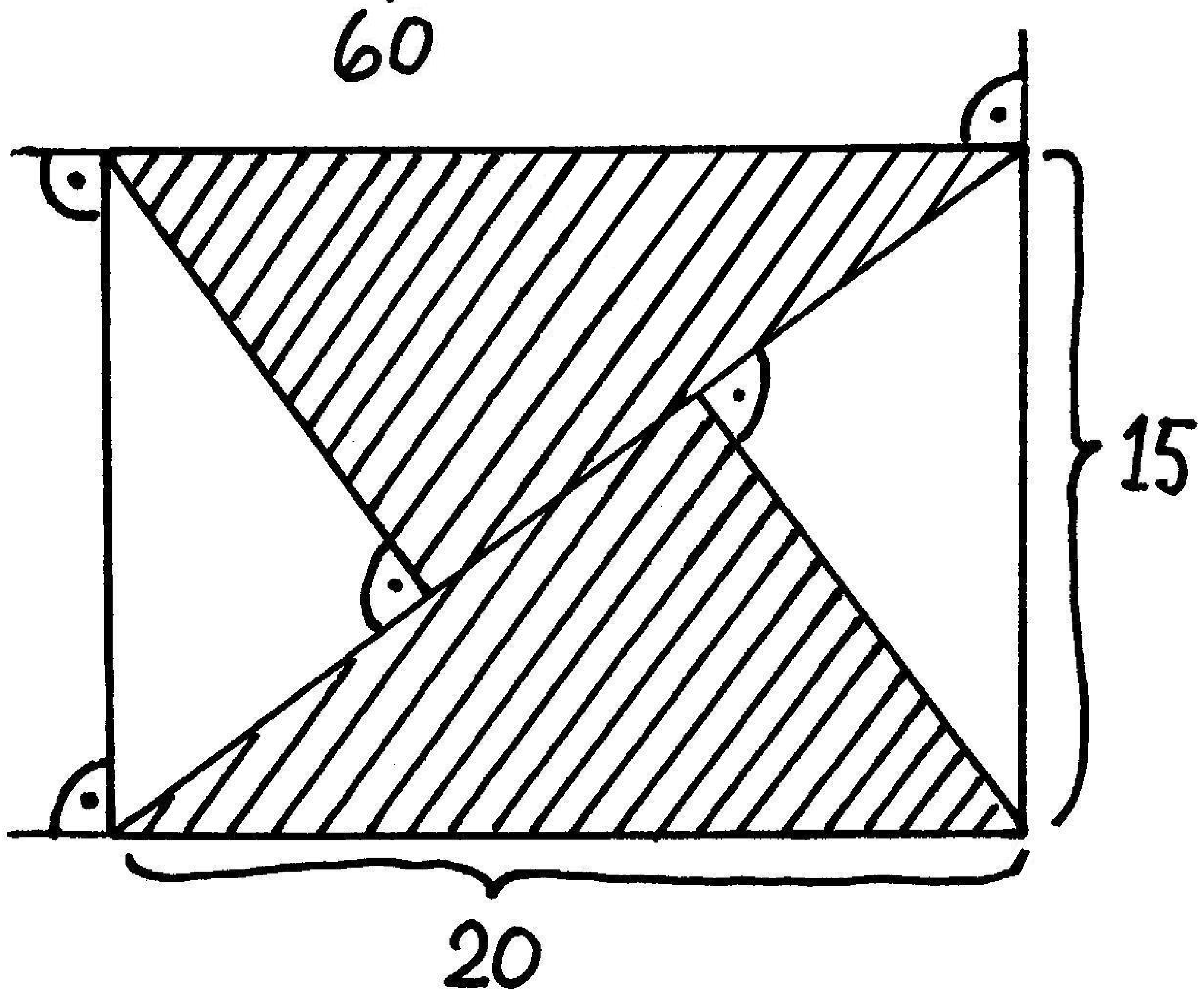
6.13) Berechne die schraffierte Fläche.

[Längenmasse in cm]

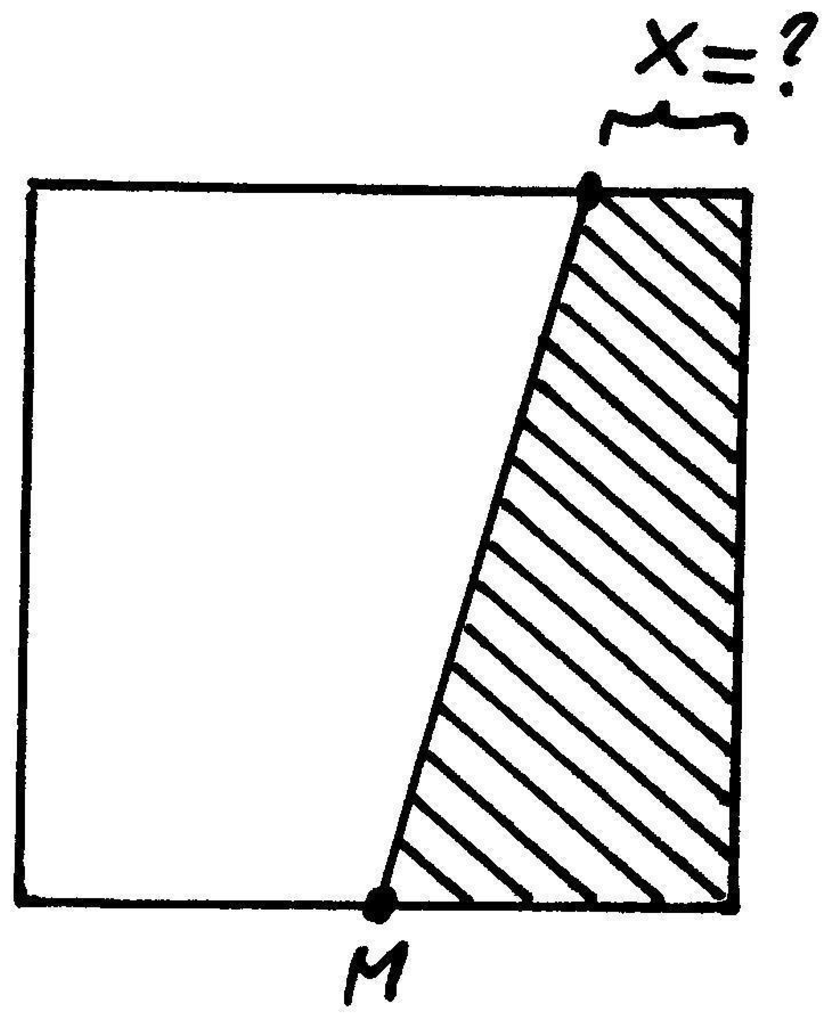


6.14) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

[Längenmasse in cm]

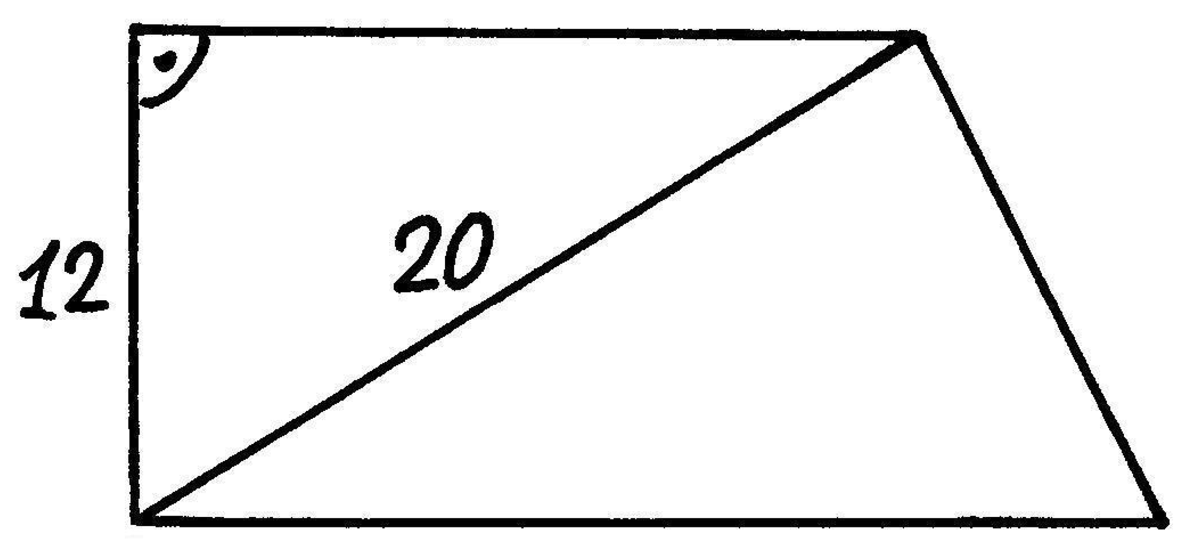


6.15) Berechne die Strecke x so, dass ein Drittel der Fläche des Quadrats mit Seitenlänge 6cm schraffiert ist. M ist ein Mittelpunkt einer Quadratseite.

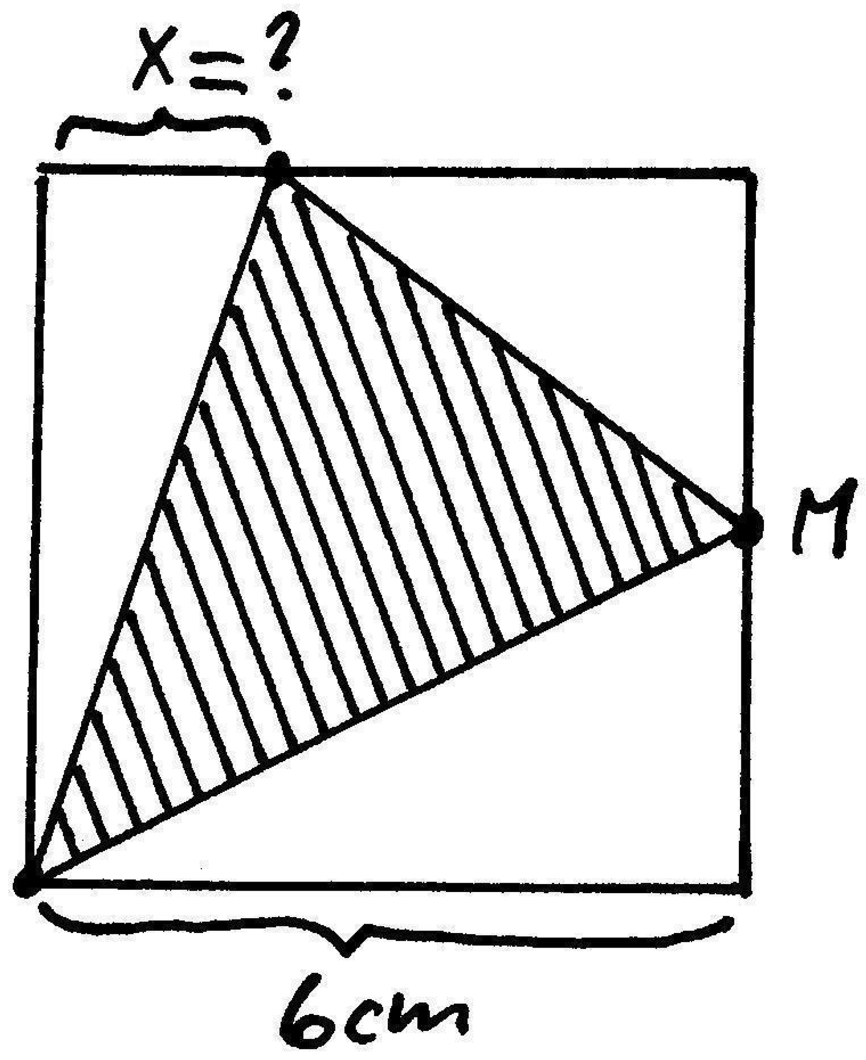


6.16) Berechne den Umfang des rechtwinkligen Trapezes, wenn sein Flächeninhalt 246 cm^2 beträgt.

[Längenmasse in cm]



6.17) Berechne die Strecke x so, dass ein Drittel der Fläche des Quadrats mit Seitenlänge 6cm schraffiert ist. M ist ein Mittelpunkt einer Quadratseite.



6.18) Konstruiere ein Trapez mit Höhe 4cm, Grundlinie $a = 10cm$, Schenkel $d = 5cm$ und Mittellinie $= 8cm$.

6.19) Von einem Trapez kennt man die Seiten a und c, die Höhe h und den Winkel δ. Konstruiere das Trapez, wenn $a = 10cm$, $c = 6cm$, $h = 4cm$ und $\delta = 120°$.

6.20) Konstruiere Dreiecke für welche

a) $b = 5cm$, $h_c = 4cm$ und $s_a = 4cm$
b) $c = 6cm$, $s_b = 5.5cm$ und $\alpha = 60°$
c) $c = 6cm$, $h_c = 5cm$ und $s_a = 5cm$
d) $h_b = 4cm$, $c = 5cm$ und $s_c = 4cm$

Ein Konstruktionsbericht ist nicht erforderlich.

Für (b) und (c) müssen nur spitzwinklige Dreiecke konstruiert werden.

Hausaufgaben

6.1a) $\varepsilon = 180° - 83° - 37° = 60°$

b) $\alpha = 180° - (180° - 145°) - (180° - 85°) = 145° + 85° - 180° = 50° \rightarrow \varepsilon = 85° + \alpha = \underline{\underline{135°}}$

c) $\alpha = \measuredangle$ bei Schenkeln: $\alpha = (180° - 40°)/2 = 70°$; $\varepsilon = \alpha - (90° - 40°) = 70° - 50° = \underline{\underline{20°}}$

d) $\alpha = (180° - 54°)/2 = 63° \rightarrow \varepsilon = \beta = (180° - \alpha)/2 = (180° - 63°)/2 = \underline{\underline{58.5°}}$

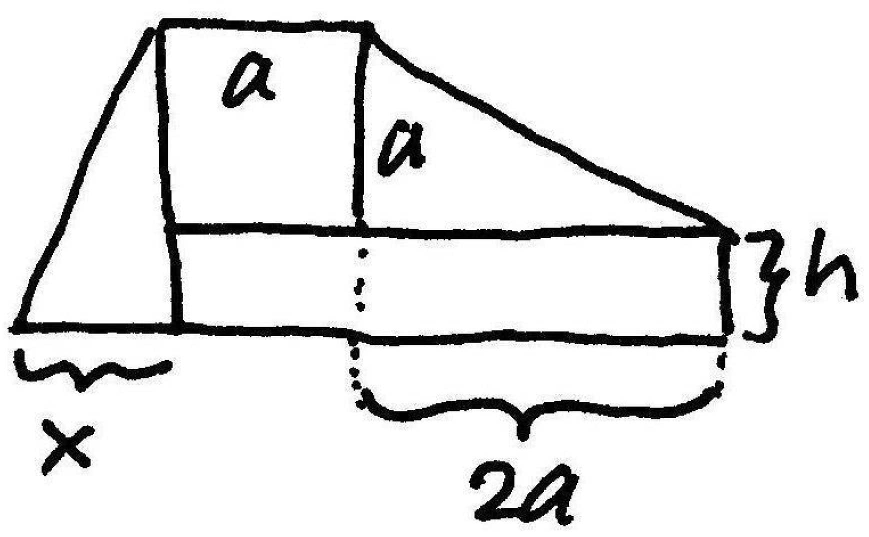
e) $\varepsilon = 90° - 50° = \underline{\underline{40°}}$

f) $\alpha = (180° - 150°)/2 = 15° \rightarrow \varepsilon = 180° - 3\alpha = \underline{\underline{135°}}$

6.2) Bei allen stumpfwinkligen Dreiecken.

6.3) $h_c = 2A/c = 2 \cdot 120\,\text{cm}/16 = 15\,\text{cm}$, $a = b = \sqrt{h_c^2 + c^2/4} = \sqrt{15^2 + 16^2/4}\,\text{cm} = 17\,\text{cm} \rightarrow$
$u = 2a + c = (2 \cdot 17 + 16)\,\text{cm} = \underline{\underline{50\,\text{cm}}}$

6.4) $A_1 = a^2$, $A_2 = \dfrac{a \cdot 2a}{2}$



$A_3 = 3a \cdot h = a^2 \rightarrow$

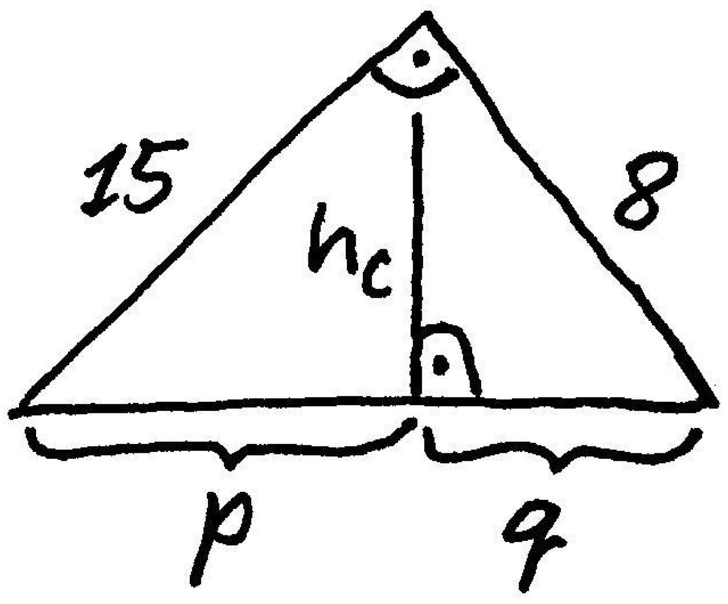
$h = a/3, a + h = (4/3)a$

$A_4 = \dfrac{x \cdot (4a/3)}{2} = a^2 \rightarrow$

$\frac{4}{3}x = 2a \rightarrow x = \frac{3}{2}a$, $4a^2 = 144 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow a = 6$

$x = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \rightarrow x = \underline{\underline{9\,\text{cm}}}$

6.5) $h_c = \dfrac{8 \cdot 15}{\sqrt{8^2+15^2}} = \dfrac{120}{17}$



$\underline{\underline{h_c = 7.06\,cm}}$

$p = \sqrt{15^2 - h_c^2} = \sqrt{225 - 49.827}\,cm$

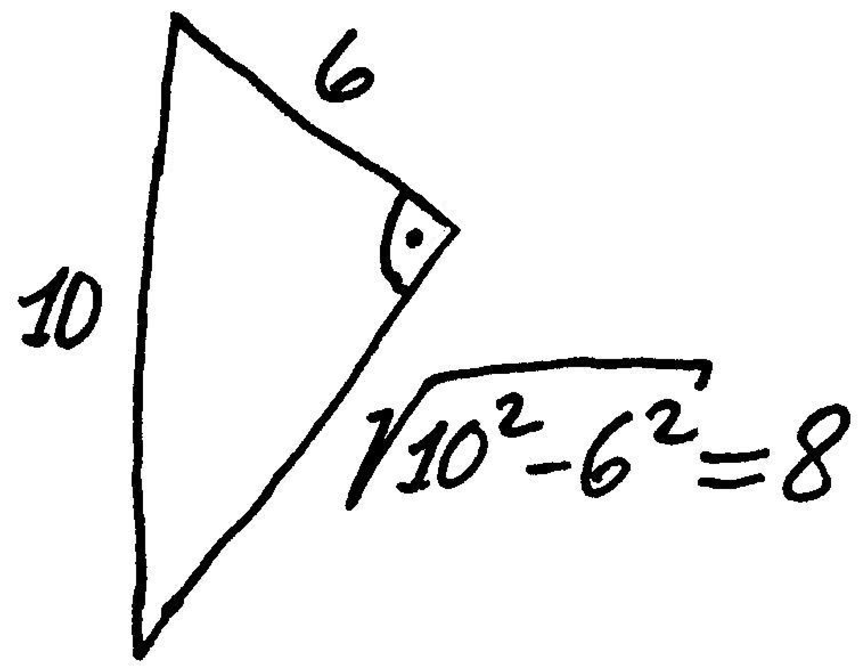
$q = \sqrt{8^2 - h_c^2} = \sqrt{64 - 49.827}\,cm$

$p = \sqrt{175.17}\,cm = 13.24\,cm$

$q = \sqrt{14.17}\,cm = \underline{\underline{3.76\,cm}}$

6.6) $A = (6 \cdot 8 + \pi \cdot 3^2)\,cm^2$

$= \underline{\underline{76.27\,cm^2}}$



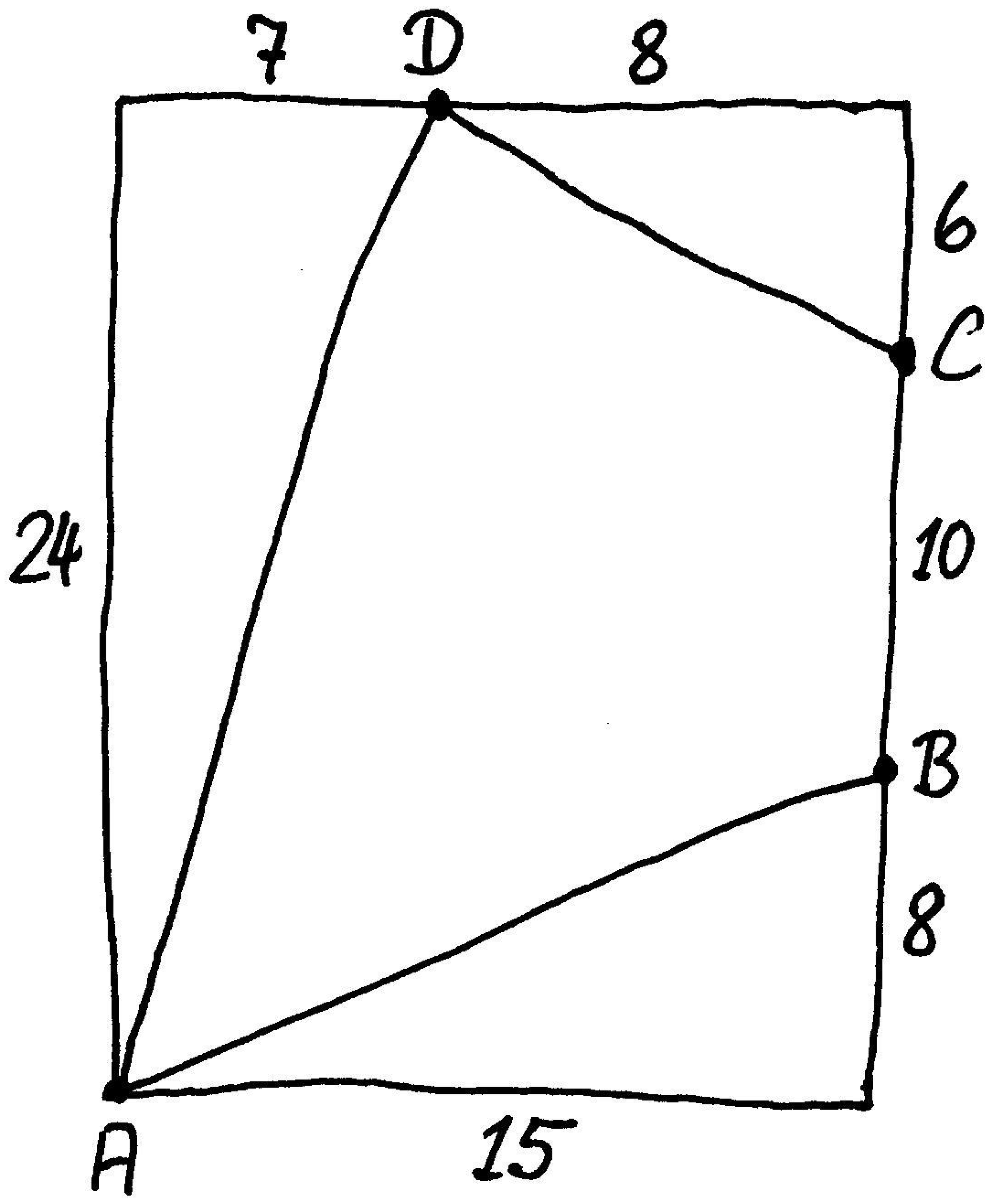
$u = 2 \cdot 8\,cm + 2\pi r =$

$16\,cm + 2\pi \cdot 3\,cm = \underline{\underline{34.85\,cm}}$

6.7) $u = [\sqrt{15^2+8^2} + 10 + \sqrt{6^2+8^2} + \sqrt{24^2+7^2}]\,cm$

$= [17 + 10 + 10 + 25]\,cm$

$u = \underline{\underline{62\,cm}}$

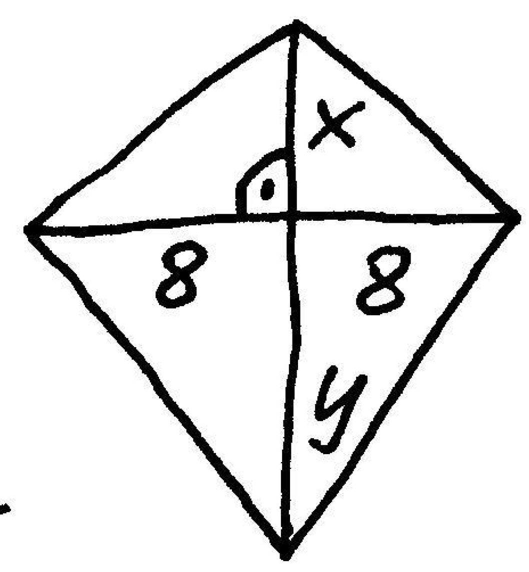


$A = [24 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24]\,cm^2$

$A = \underline{\underline{192\,cm^2}}$

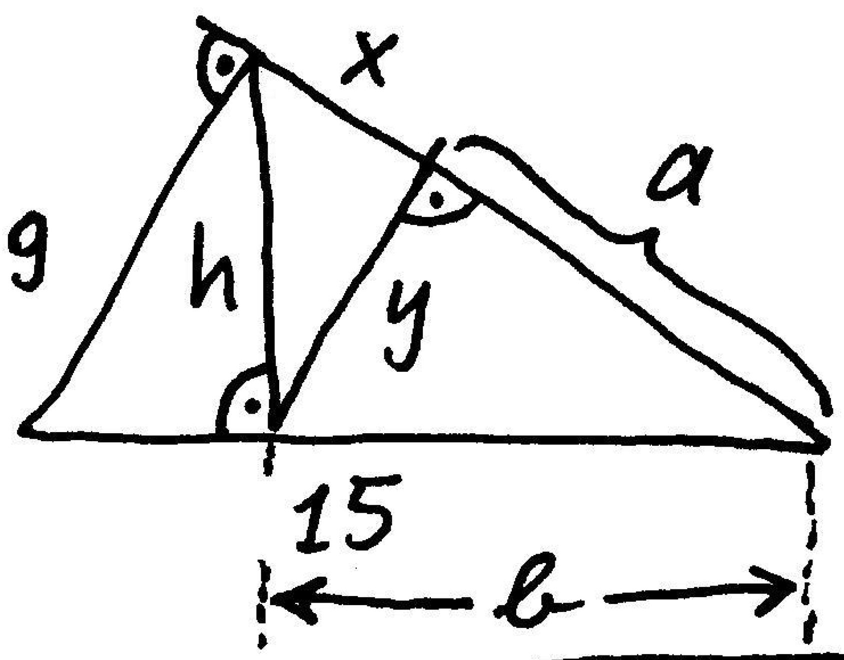
6.8) $8\,cm \cdot x = 48\,cm^2 \rightarrow x = 6\,cm$

$8\,cm \cdot y = 120\,cm^2 \rightarrow y = 15\,cm$



$u = 2[\sqrt{8^2+x^2} + \sqrt{8^2+y^2}] = 2[\sqrt{8^2+6^2} + \sqrt{8^2+15^2}]\,cm = 2[10+17]\,cm = \underline{\underline{54\,cm}}$

6.9) $a+x=\sqrt{15^2-9^2}=12$



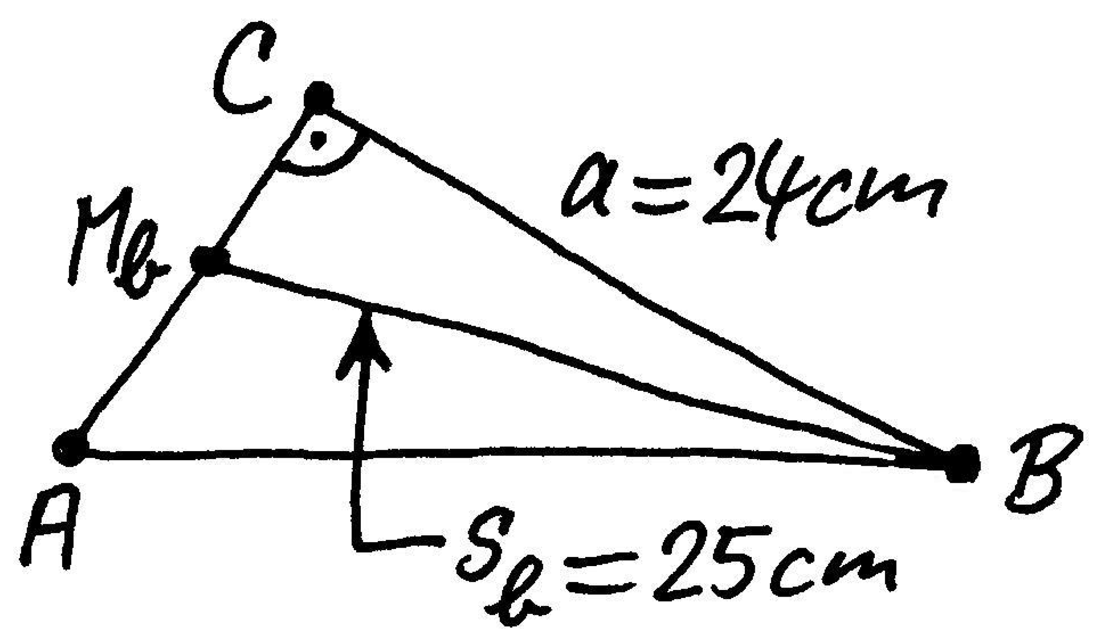
$h=\frac{9\cdot 12}{15}=7.2$

$b=\sqrt{12^2-7.2^2}=9.6$

$y=\frac{b\cdot h}{a+x}=\frac{7.2\cdot 9.6}{12}=5.76 \rightarrow x=\sqrt{h^2-y^2}=$

$\sqrt{7.2^2-5.76^2}=4.32 \rightarrow x=\underline{\underline{4.32cm}}$

6.10) $\frac{b}{2}=\sqrt{25^2-24^2}cm$



$=7cm \xrightarrow{\cdot 2}$

$\underline{\underline{b=14cm}}$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{24^2+14^2}cm=\sqrt{772}cm=27.785cm$

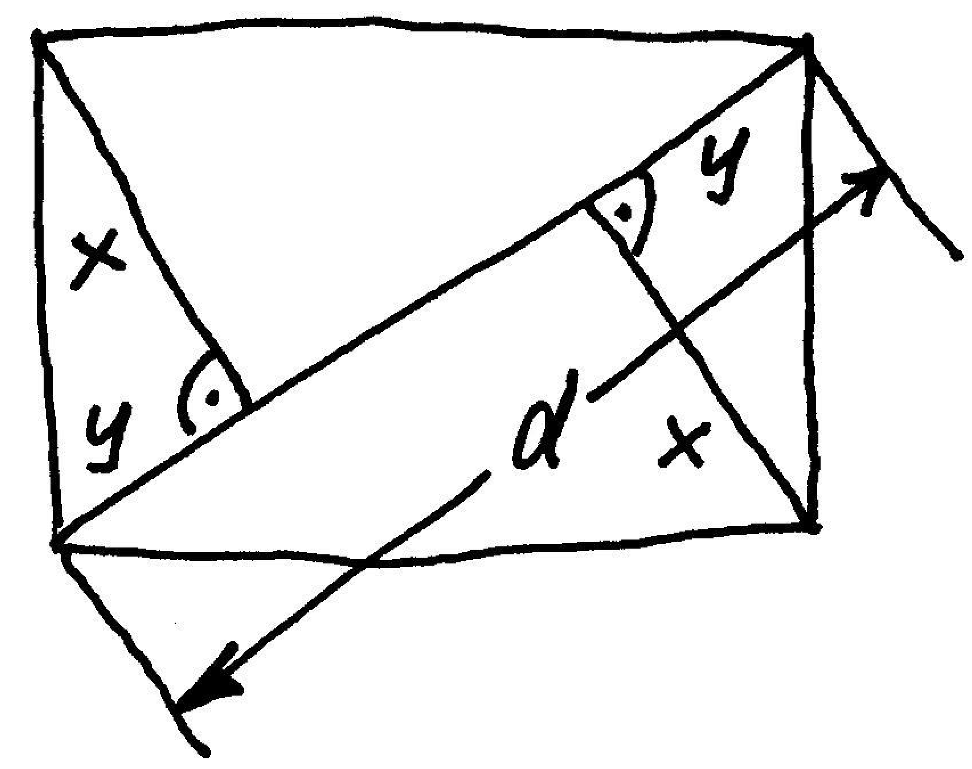
$\underline{\underline{c=27.785cm}}$

6.11) $\overline{PB_1}=\overline{PB_2}=\sqrt{25^2-7^2}cm=\underline{\underline{24cm}}$

6.12) $A=[7\cdot 15-7\cdot 7]cm^2=[7\cdot(15-7)]cm^2=\underline{\underline{56cm^2}}$

6.13) $A=2[60\cdot 125]cm^2-\frac{60\cdot 45}{2}cm^2=\underline{\underline{13'650cm^2}}$

6.14) $d=\sqrt{20^2+15^2}=25$



$x=\frac{20\cdot 15}{25}=12$

$y=\sqrt{15^2-x^2}=9$

$A=[20\cdot 15cm^2-x\cdot y]=$

$[20\cdot 15-12\cdot 9]cm^2$

$\underline{\underline{A=192cm^2}}$

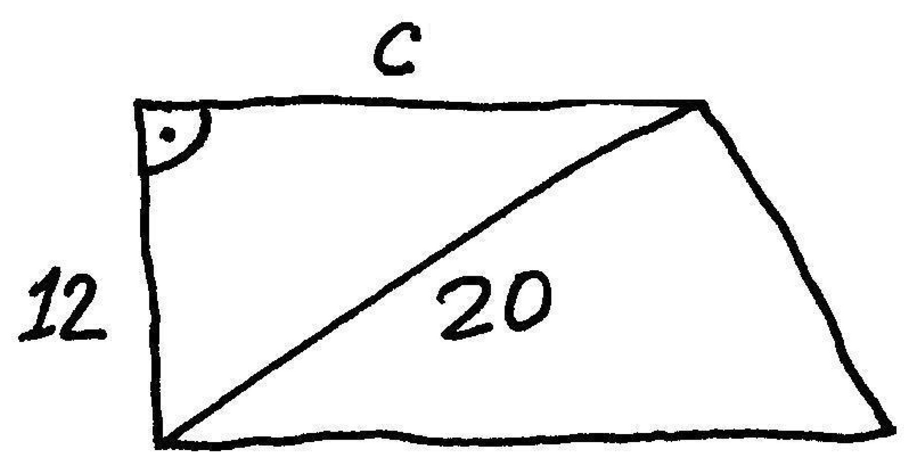
$u=2\cdot[20cm+x+y]=2\cdot[20+12+9]cm=\underline{\underline{82cm}}$

6.15) $\frac{3+x}{2}\cdot 6=\frac{6^2}{3}\rightarrow 3\cdot(3+x)=12\xrightarrow{:3} 3+x=4\xrightarrow{-3} x=1$

$\rightarrow \underline{\underline{x=1cm}}$

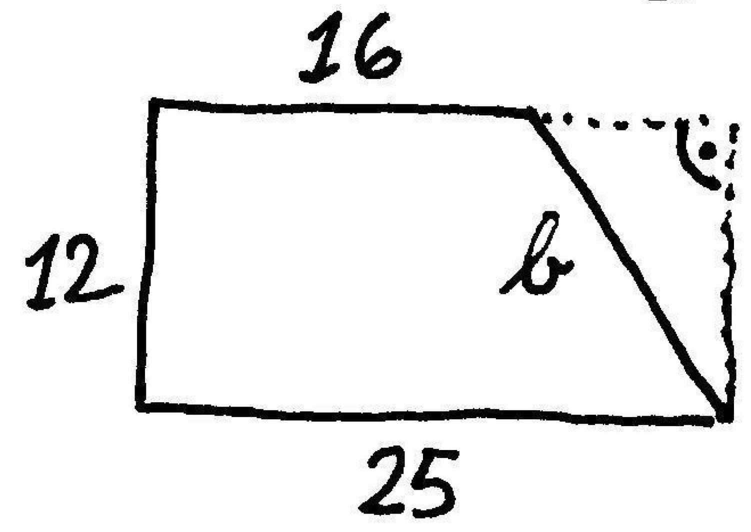
6.16)

$c = \sqrt{20^2 - 12^2}\,cm$
$= 16cm$



$m = \frac{a+c}{2} = \frac{a}{2} + 8cm$
$= A/h = (246/12)\,cm = 20.5cm \xrightarrow{-8cm} \frac{a}{2} = 12.5cm$
$\xrightarrow{\cdot 2} a = 25cm$

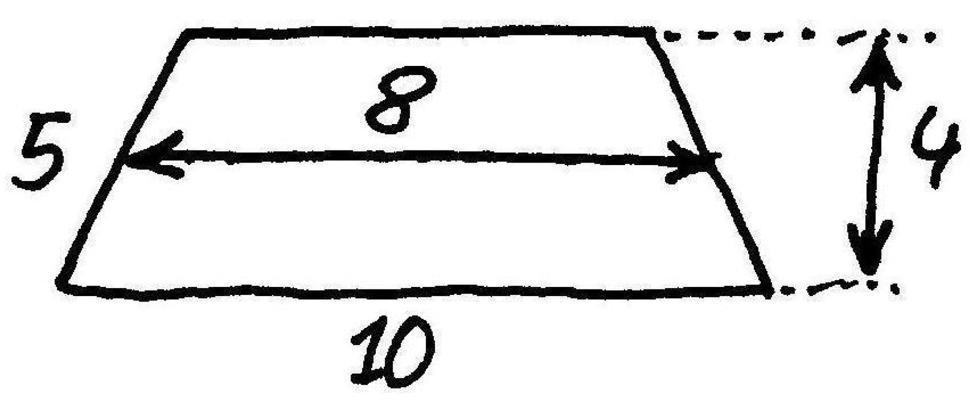
$b = \sqrt{12^2 + 9^2}\,cm = 15cm$

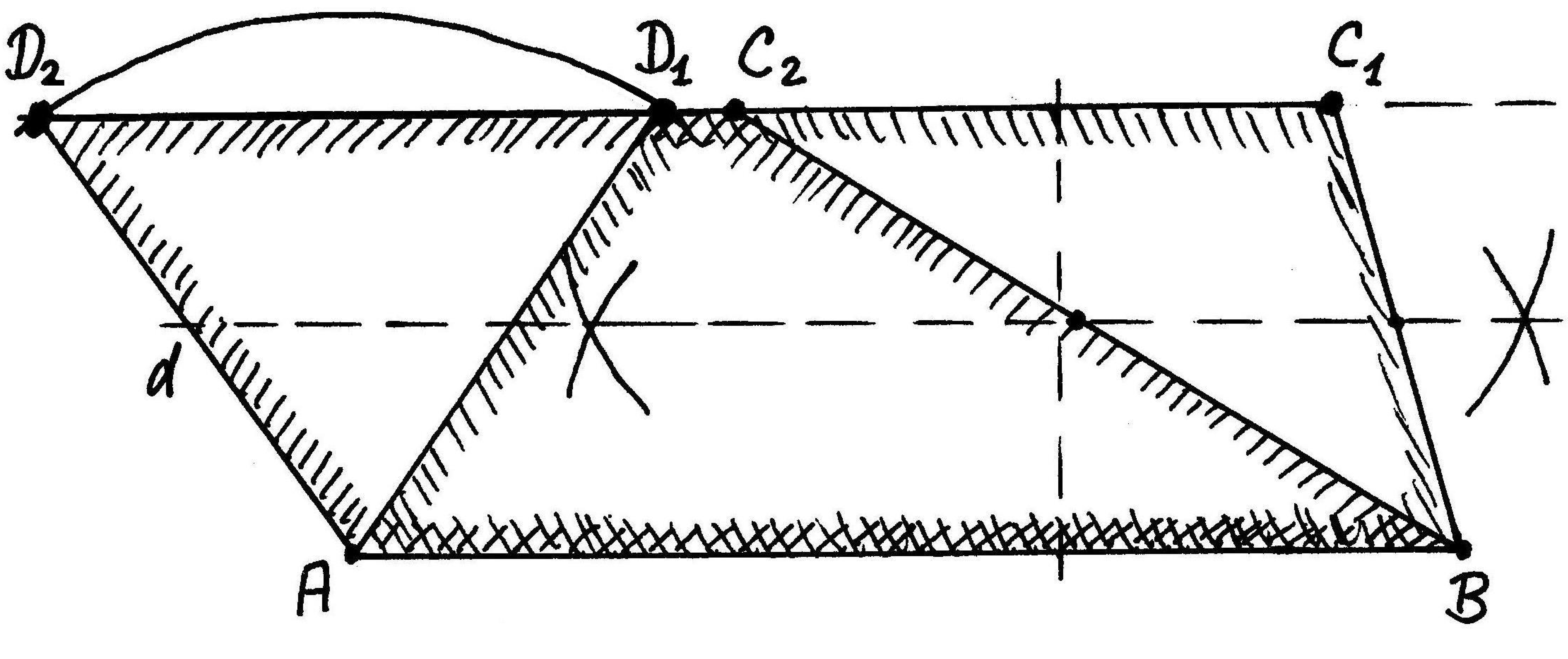


$u = [25 + 15 + 16 + 12]\,cm$
$\underline{\underline{u = 68cm}}$

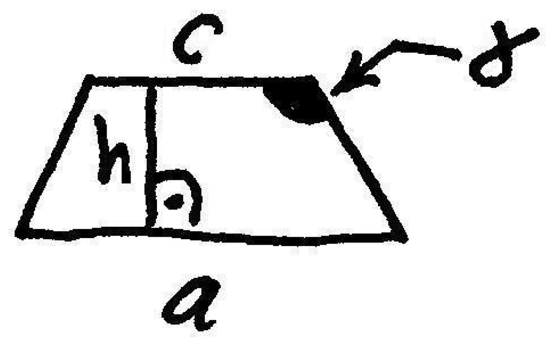
6.17) $\frac{6^2}{3} = 12 = 36 - \frac{6 \cdot 3}{2} - \frac{6x}{2} - \frac{3 \cdot (6-x)}{2} = 36 -$
$\frac{18 + 6x + 3 \cdot (6-x)}{2} = 36 - \frac{18 + 6x + 18 - 3x}{2} = 36 -$
$\frac{36+3x}{2} \longrightarrow \frac{24}{2} = \frac{72}{2} - \frac{36+3x}{2} \rightarrow 24 = 72 - 36 - 3x$
$\rightarrow 24 = 36 - 3x \longrightarrow 3x = 12 \xrightarrow{:3} x = 4 \rightarrow$
$\underline{\underline{x = 4cm}}$

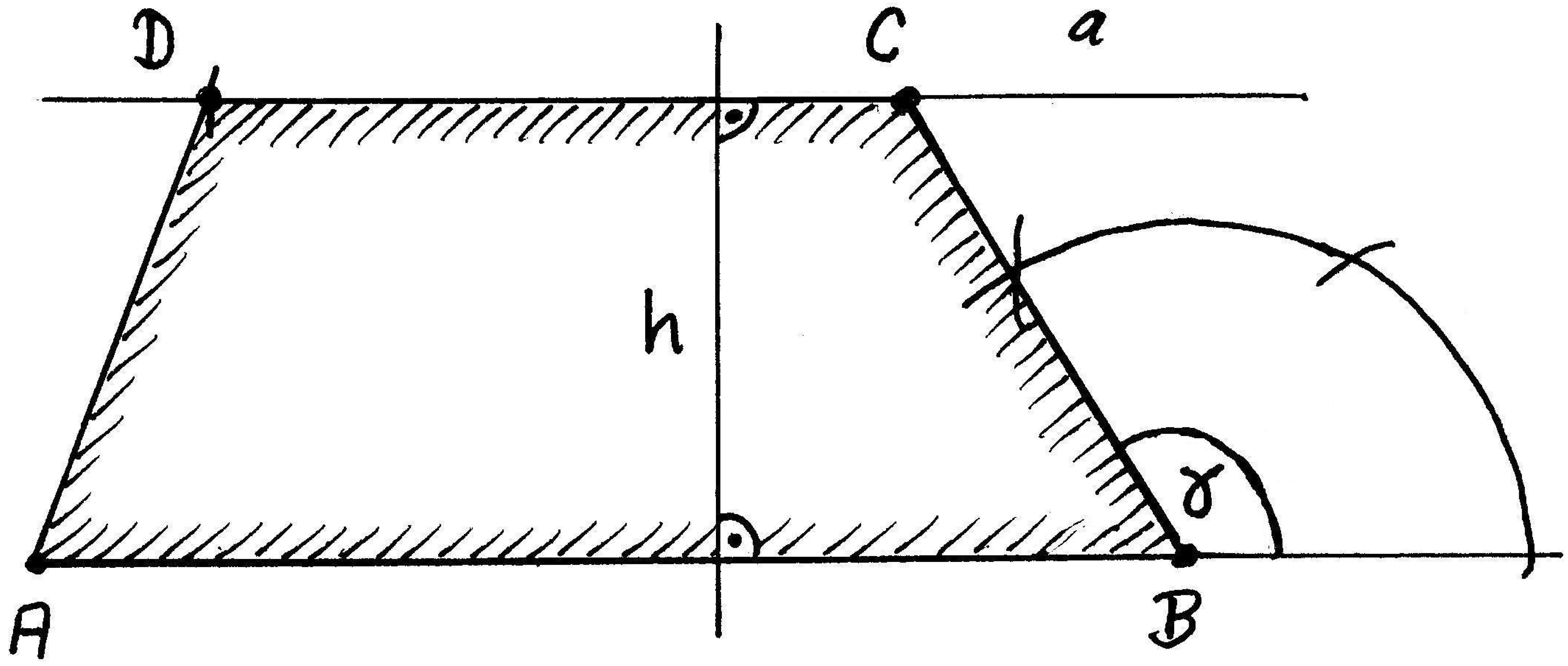
6.18)



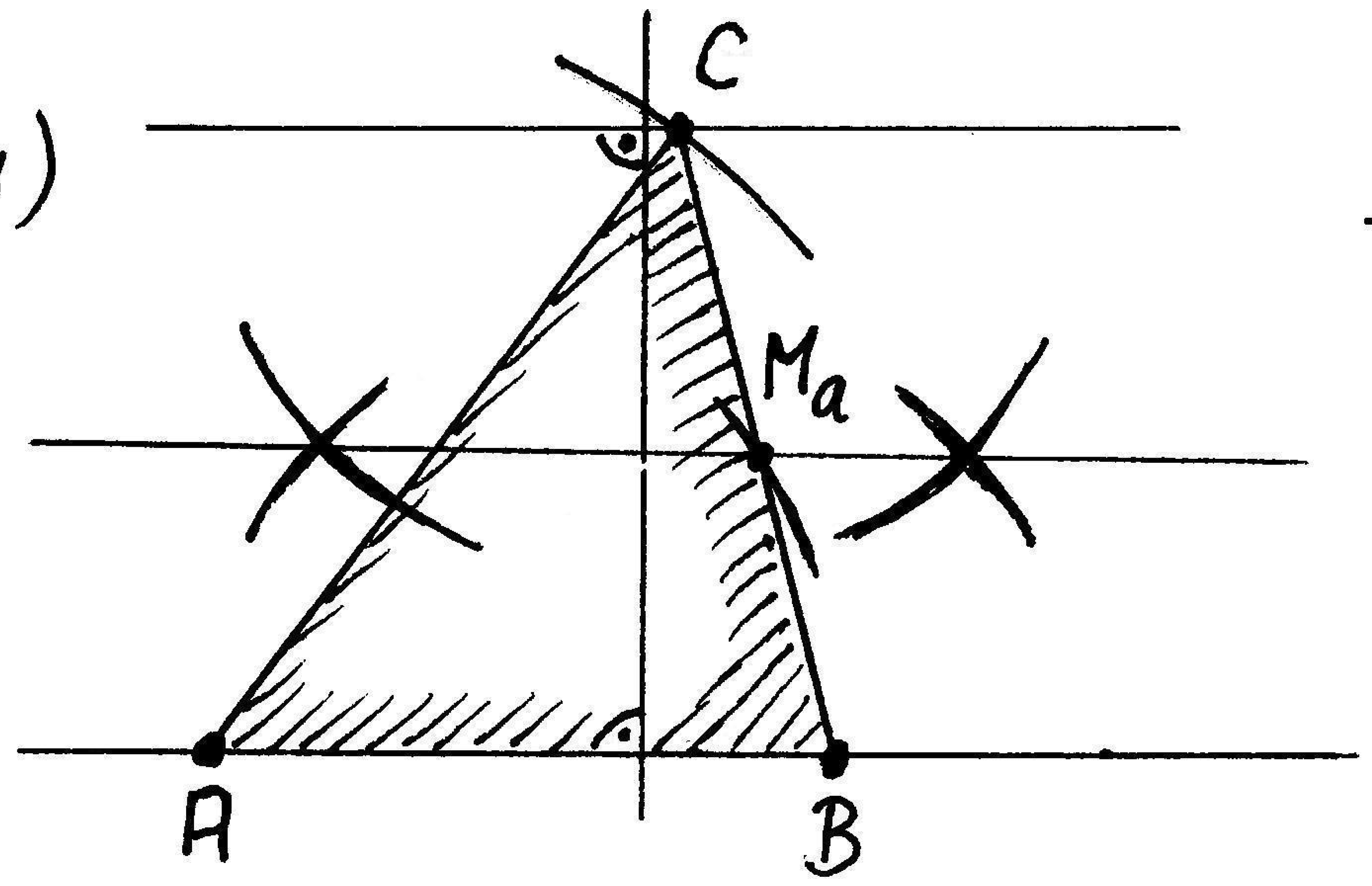


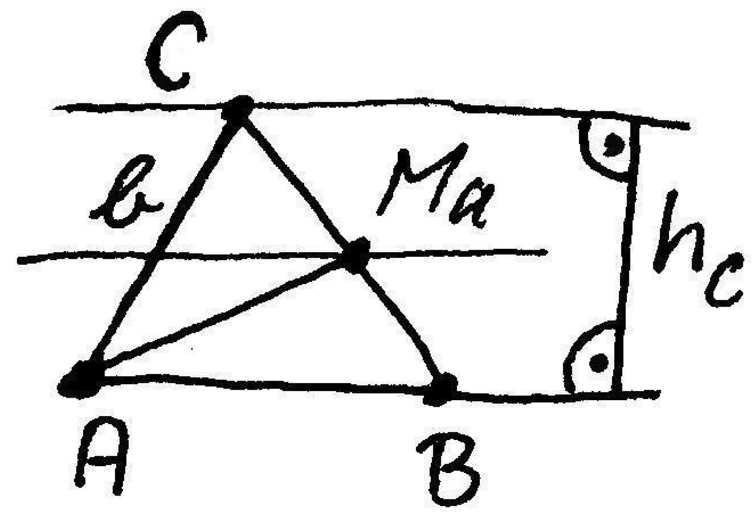
6.19)



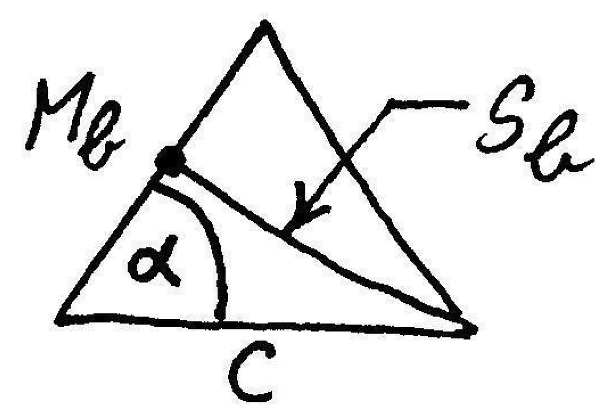


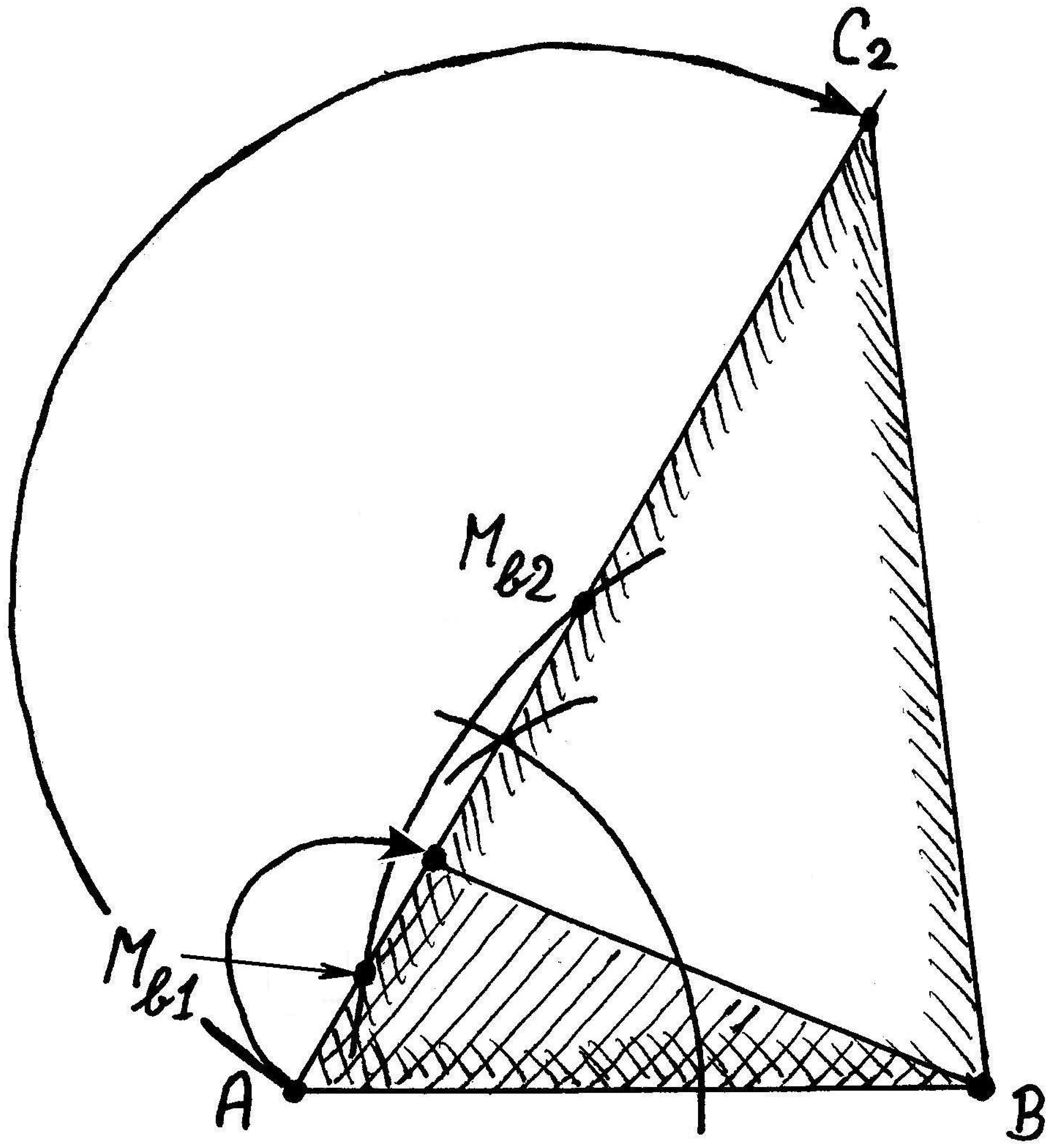
6.20a)



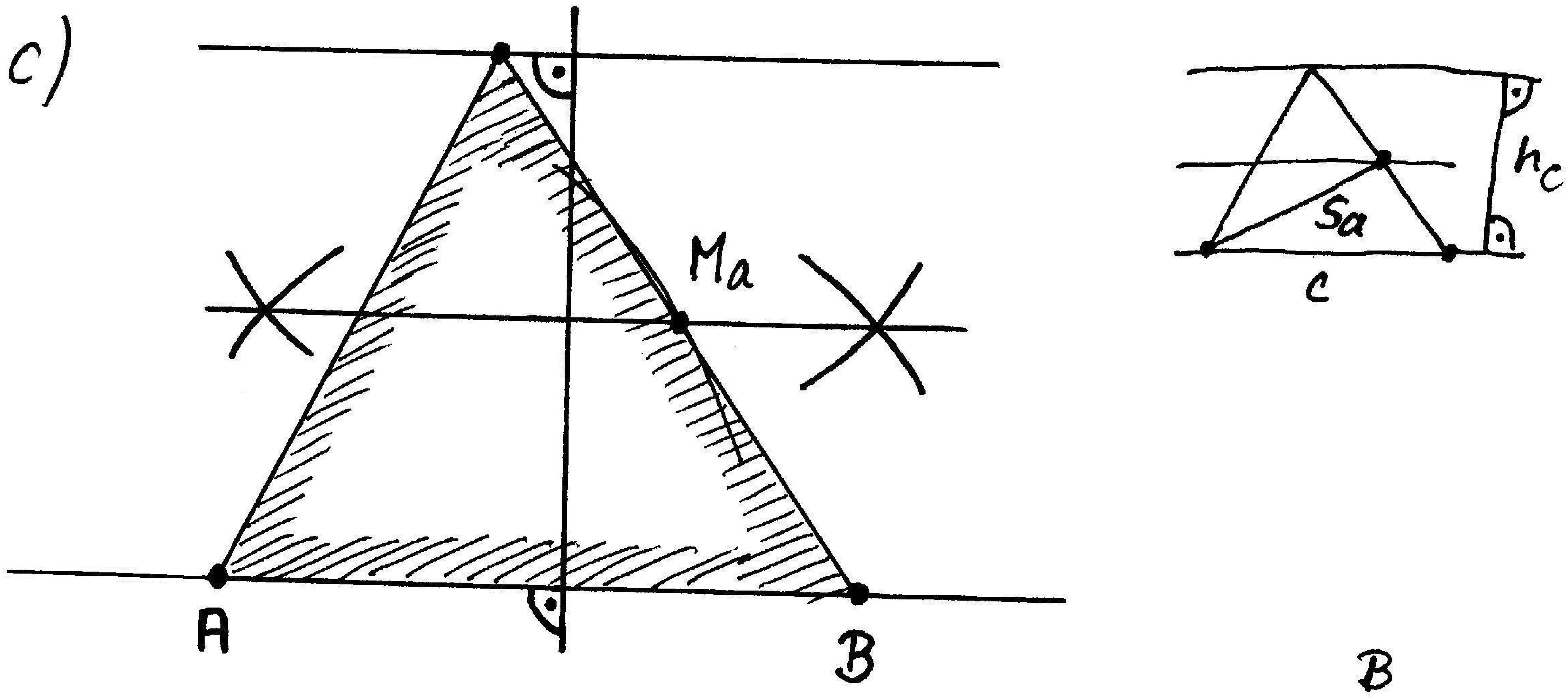


b)

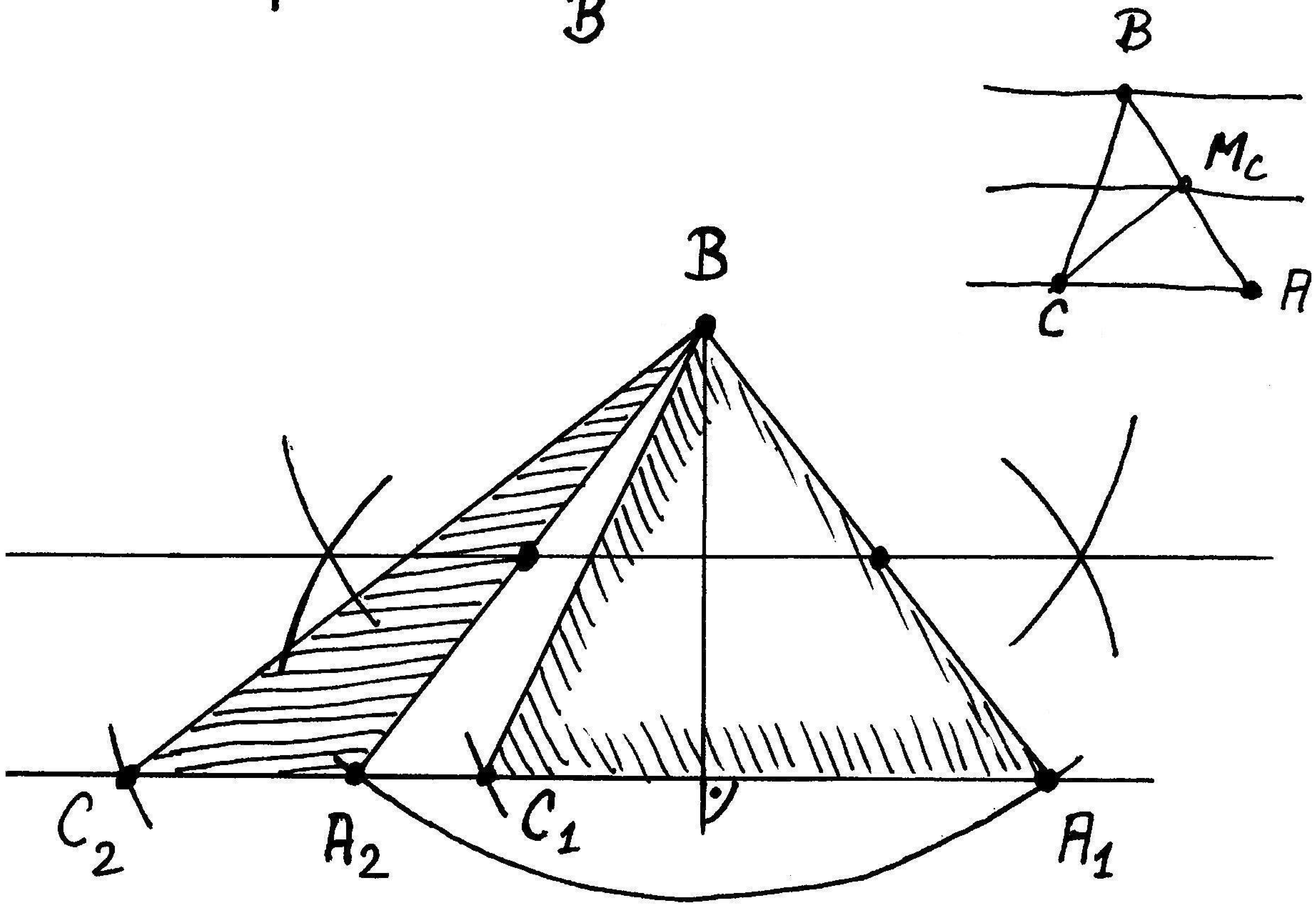




c)

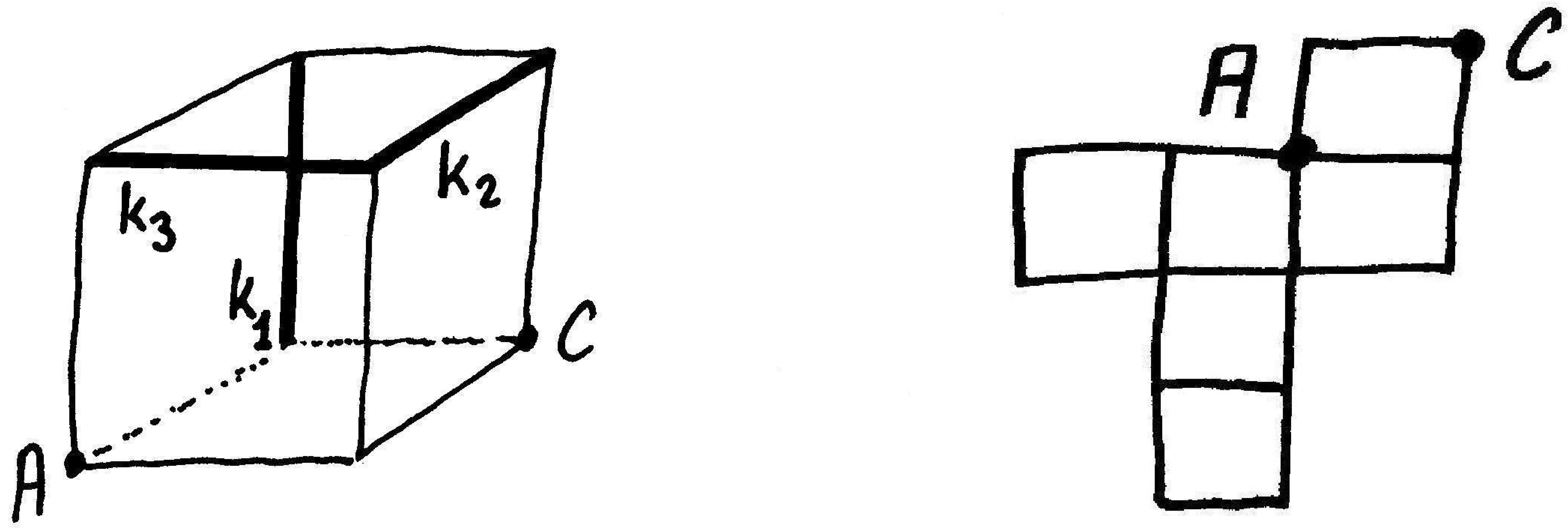


d)

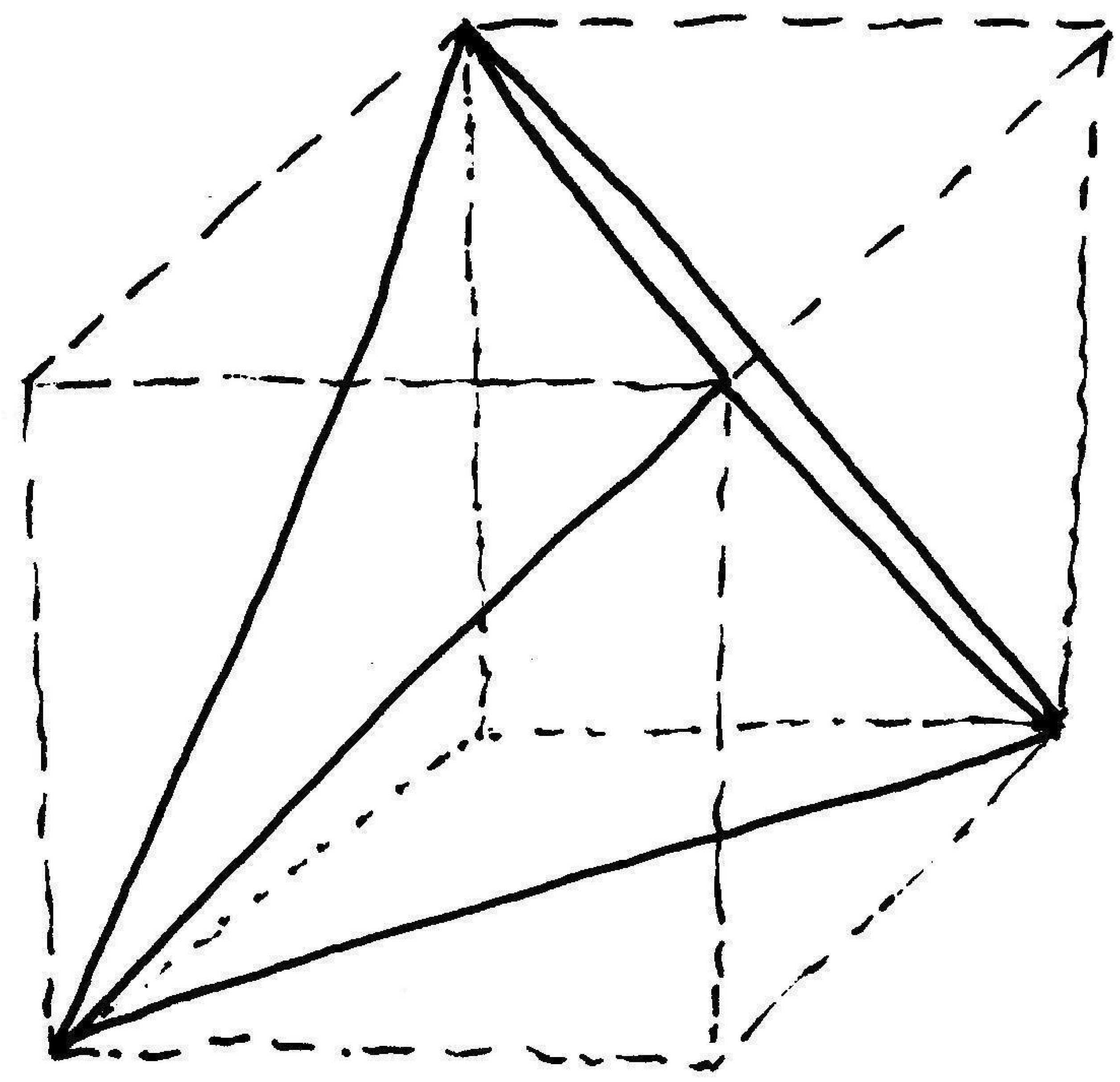


Serie 8

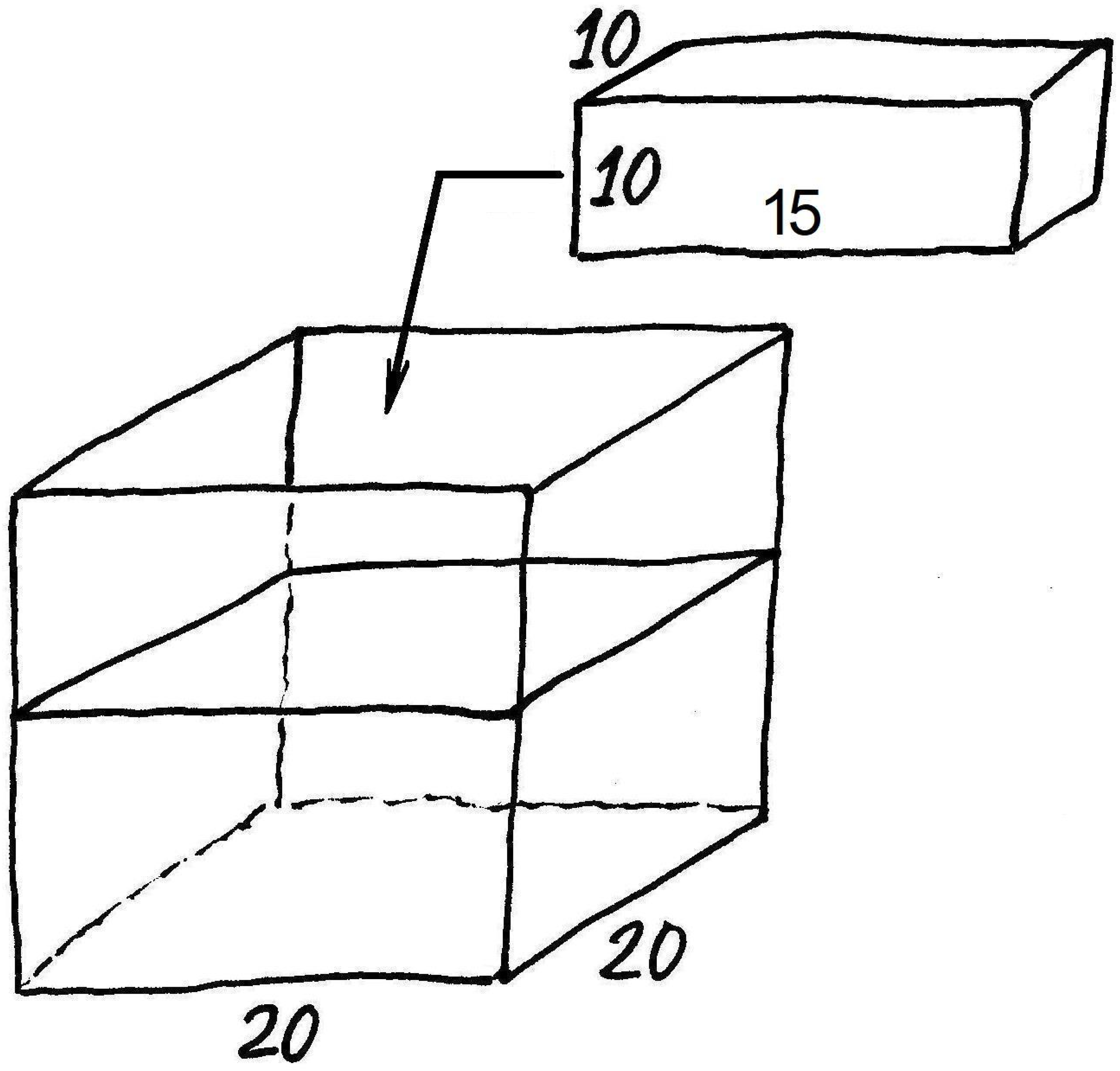
8.1) Beim Würfel werden in der Schrägansicht und auf dem Netz die Eckpunkte A und C gekennzeichnet. Zeichne die beim Würfel fett gezeichneten Kanten k_1, k_2 und k_3 im Netz ein.



8.2) Einem Würfel mit Kantenlänge 30 cm ist ein regelmässiger Tetraeder einbeschrieben. Berechne Kantenlänge und Oberfläche des Tetraeders.



8.3) Ein würfelförmiges Aquarium mit Kantenlänge 20cm ist zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Ein Steinquader mit Kantenlängen 10cm, 10cm und 15cm wird so ins Aquarium gestellt, dass

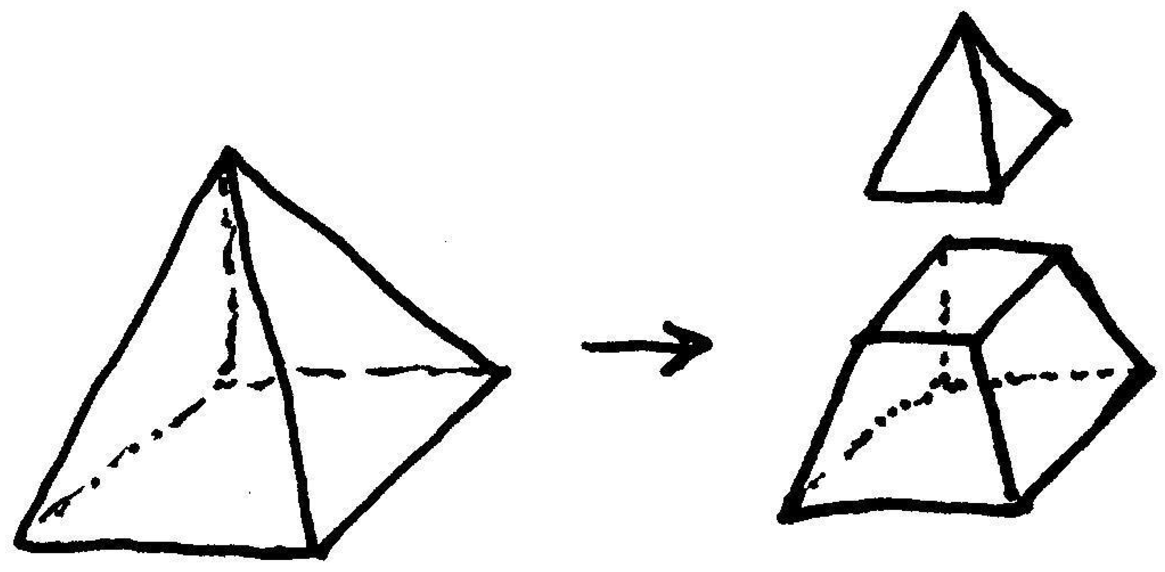


a) er vollständig im Wasser eingetaucht ist.

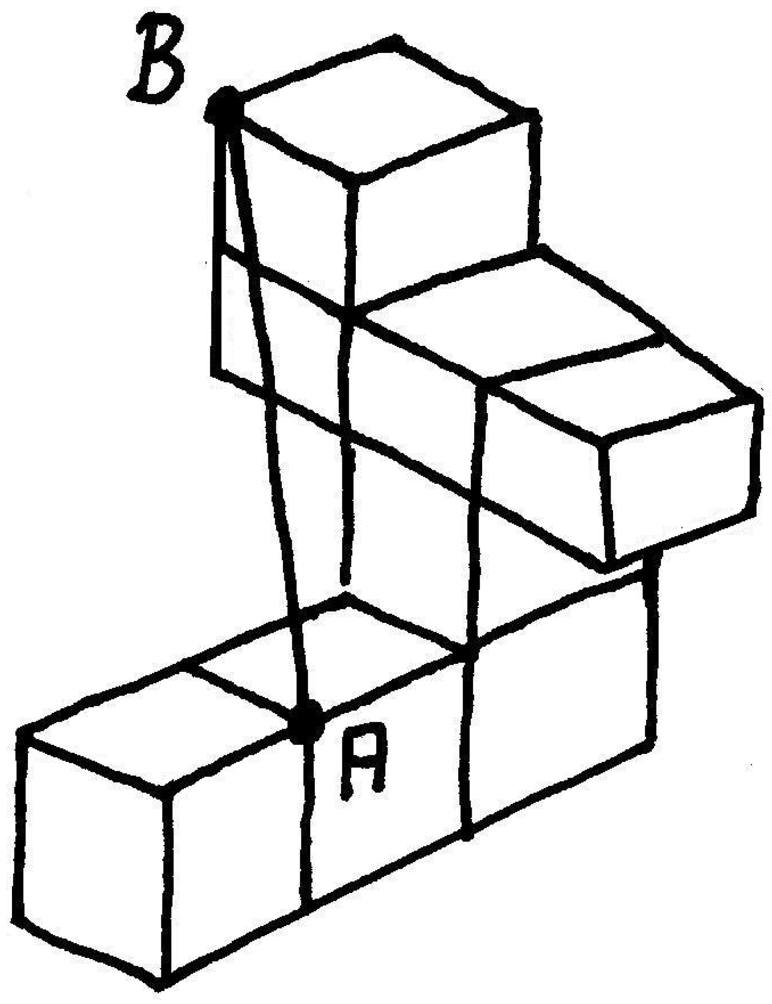
b) ein Teil von ihm aus dem Wasser ragt.

Um wie viele cm steigt der Wasserspiegel im Aquaarium?

8.4) Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche wird auf halber Höhe in zwei Teile geschnitten. Die Deckfläche des Pyramidenstumpfs hat dann Kantenlängen, die halb so gross sind wie diejenigen der Grundfläche. Um wie viele Prozent ist das Volumen des Pyramidenstumpfs kleiner als dasjenige der ursprunglichen Pyramide? [Hinweis: Mache sinnvolle Annahmen über Grundfläche und Höhe der Pyramide]

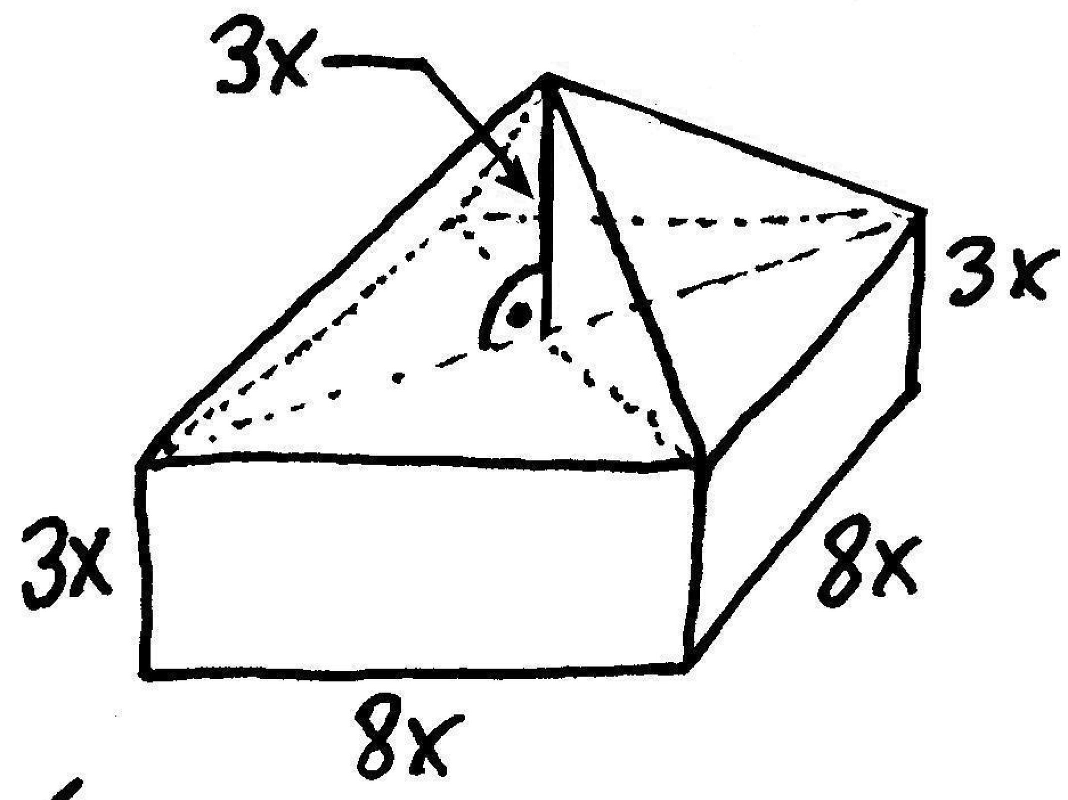


8.5) Ein Würfelkörper, wie in nebenstehender Skizze illustriert, besteht aus acht Würfeln mit Kantenlängen 3cm. Berechne die Oberfläche des Würfelkörpers und den Abstand der Punkte A und B.



Der Würfelkörper wird mit roter Farbe besprüht. Wie viele der Würfel haben drei, vier oder fünf rote Seitenflächen?

8.6) Der rechts dargestellte Körper besteht aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche und einer aufgesetzten Pyramide.



a) Erstelle einen Term für das Volumen und die Oberfläche des Körpers. Vereinfache diese Terme so weit wie möglich.

b) Wie gross wäre das Volumen des Körpers, wenn seine Oberfläche 2160 cm^2 misst?

8.7) Zwei Radfahrer trainieren auf einer 120m langen Rundstrecke. Der schnellere Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 6m/s und der andere mit einer Geschwindigkeit von 4m/s. In welchen regelmässigen Zeitabständen

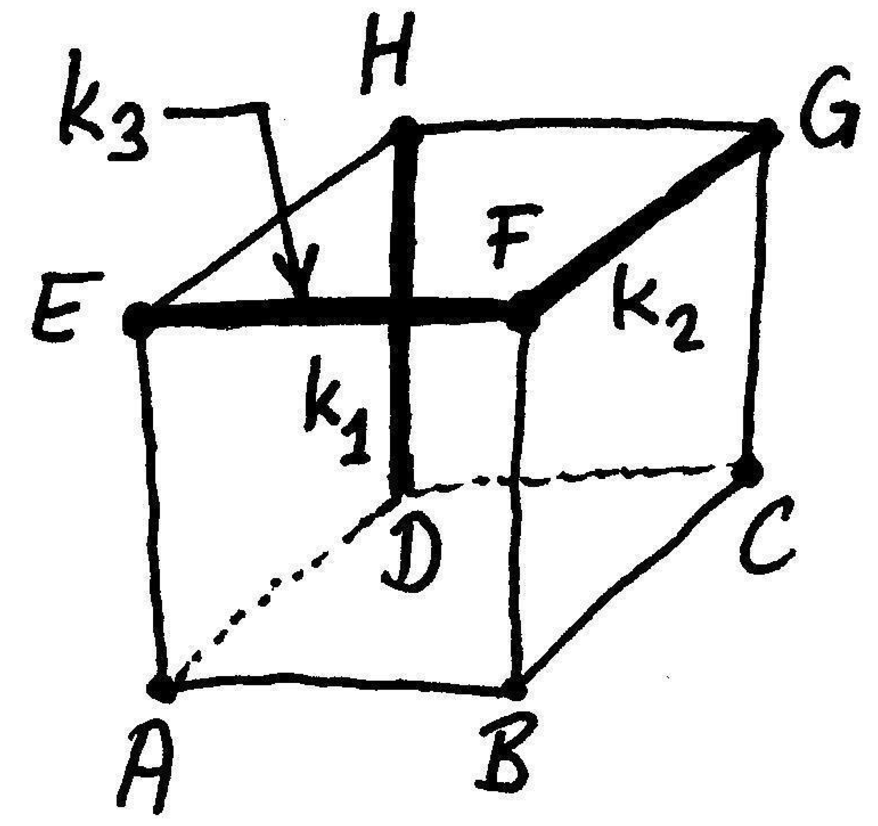
a) überholt der schnellere Radfahrer den langsameren, wenn sie auf der Rundstrecke im gleichen Umlaufsinn fahren?

b) kreuzen sich die Radfahrer, wenn sie auf der Rundstrecke in entgegen gesetztem Umlaufsinn fahren?

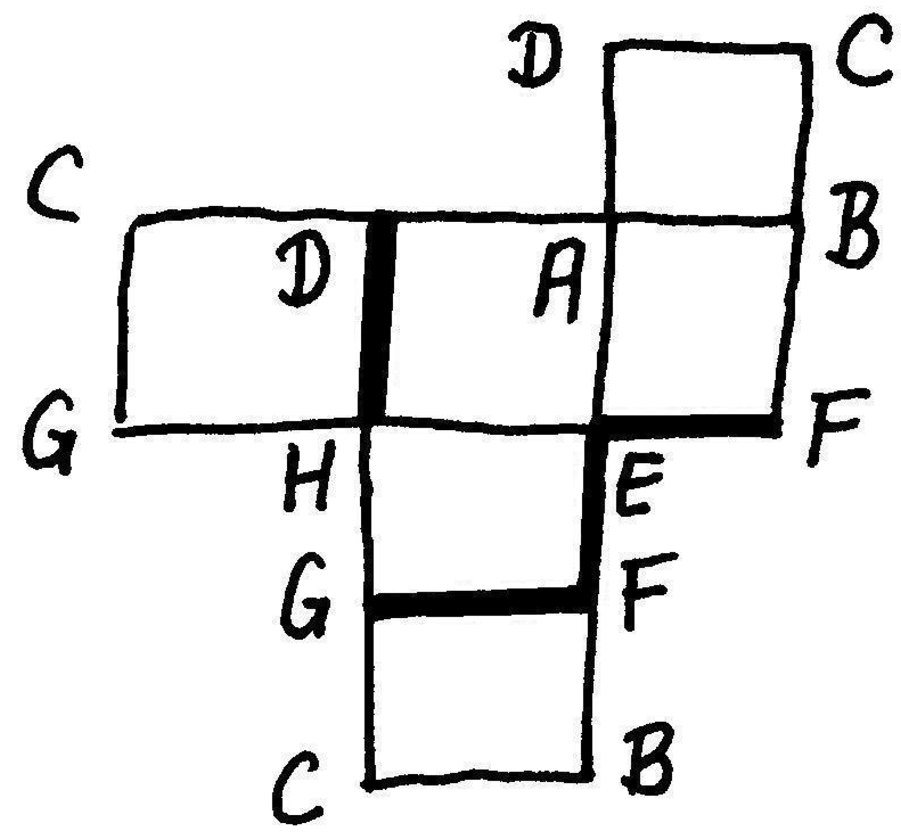
8.8) Ein Radfahrer fährt eine Bergstrecke hoch und dann gleich wieder hinunter. Talwärts fährt er vier Mal so schnell wie beim Aufstieg. Wie lange dauerte der Aufstieg, wenn die ganze Fahrt 4h dauerte?

Musterlösungen

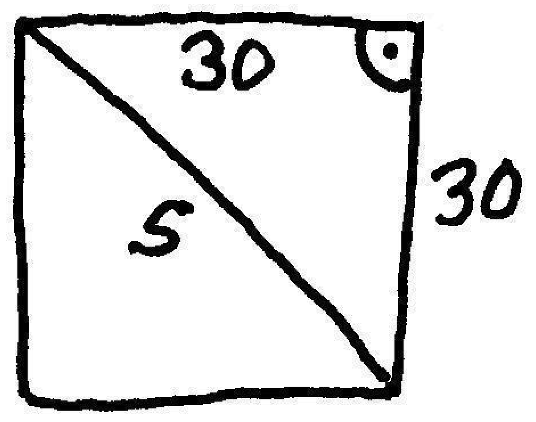
8.1)



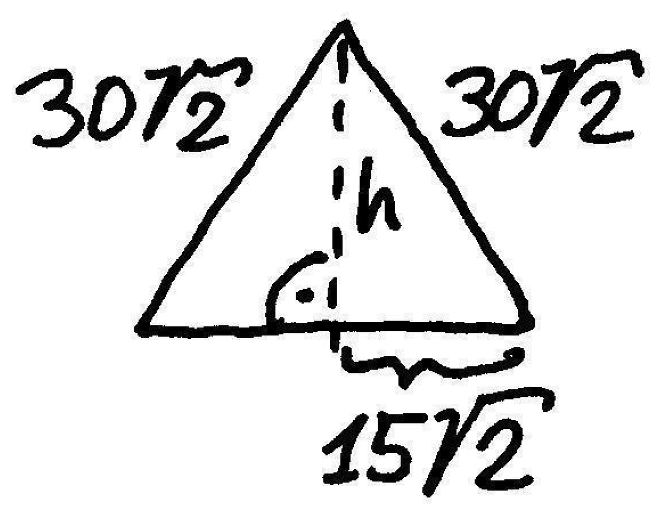
„Fette" Kanten: EF, FG u. DH



8.2)



Kantenlänge: $s = 30\sqrt{2}\,cm = \underline{\underline{42.43\,cm}}$



$h = \sqrt{30^2 \cdot 2 - 15^2 \cdot 2}\,cm = 30\sqrt{\frac{3}{2}}\,cm$

$= 36.74\,cm$

$$S = 4 \cdot \frac{30\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{3/2}\,cm^2}{2} = \underline{\underline{3118\,cm^2}}$$

8.3a) $x = (10^2 \cdot 15/(20 \cdot 20))\,cm = \underline{\underline{3.75\,cm}}$

b) $h = (20 \cdot 20 \cdot 10/(20^2 - 10^2))\,cm = 13.33\,cm$

$x = h - 10\,cm = \underline{\underline{3.33\,cm}}$

8.4) Annahme: $s = 2\,cm$ und $h = 6\,cm$

$V_{Pyramide} = (2^2 \cdot 6/3)\,cm^3 = 8\,cm^3$

$V_{Spitze} = (1^2 \cdot 3/3)\,cm^3 = 1\,cm^3$

$$\frac{V_{Spitze}}{V_{Pyramide}} = \frac{1}{8} \longrightarrow \frac{1}{8} \cdot 100\% = \underline{\underline{12.5\%}}$$

Das Volumen des Pyramidenstumpfs ist um $\underline{\underline{12.5\%}}$ kleiner als das Volumen der Pyramide.

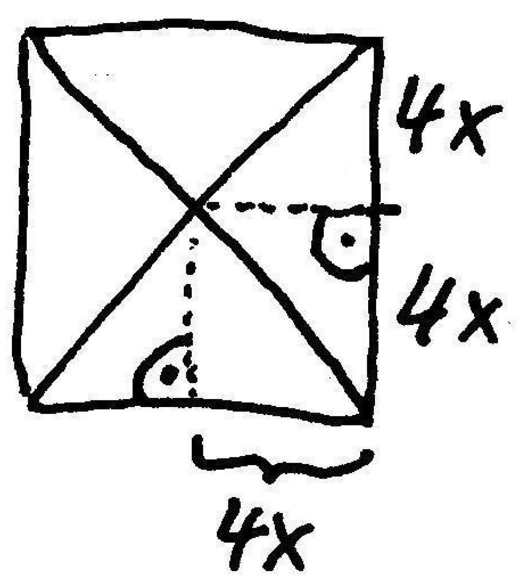
8.5)

Anzahl rote Seitenflächen	3	4	5
Anzahl Würfel	1	4	3

$$S = [1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5] \cdot (3\,cm)^2 = \underline{\underline{306\,cm^2}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 9^2}\,cm = \sqrt{126}\,cm = \underline{\underline{11.2\,cm}}$$

8.6a)



$$h_s = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{16x^2 + 9x^2} = 5x$$

$$S = (8x)^2 + 4\left[8x \cdot 3x + \frac{8x \cdot 5x}{2}\right] = 64x^2 + 4 \cdot [24 + 20]x^2 = \underline{\underline{240x^2}}$$

$$V = (8x)^2 \cdot 3x + (8x)^2 \cdot 3x/3 = \underline{\underline{256x^3}}$$

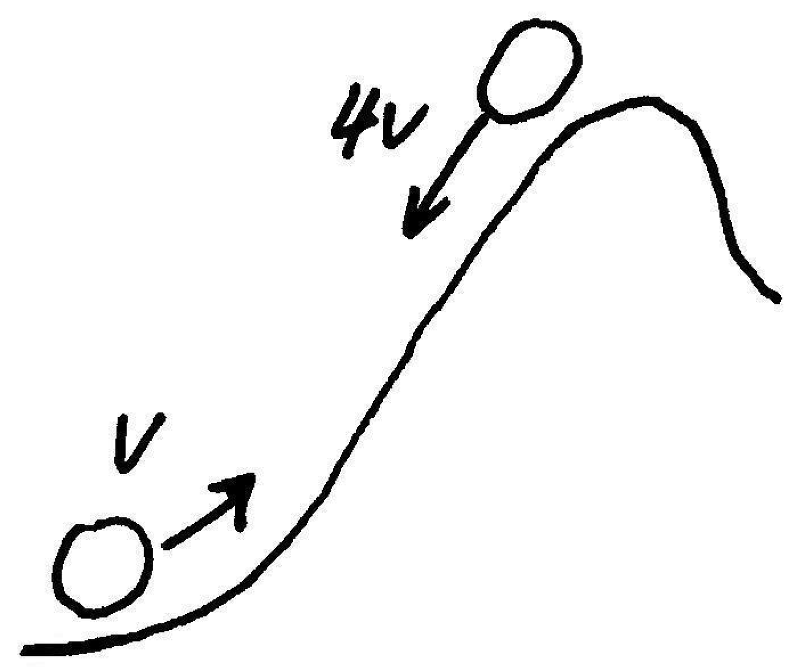
b) $S = 2160 = 240x^2 \xrightarrow{:240} x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = 3$

$$V = 256 \cdot 3^3\,cm^3 = \underline{\underline{6912\,cm^3}}$$

8.7a) $t_1 = \dfrac{120\,m}{(6-4)\,m/s} = \underline{\underline{60\,s = 1\,min}}$

b) $t_2 = \dfrac{120\,m}{(6+4)\,m/s} = \underline{\underline{12\,s}}$

8.8) $\underbrace{\dfrac{s}{v}}_{\text{Aufstieg}} + \underbrace{\dfrac{s}{4v}}_{\text{Abfahrt}} = 4h$



$$x = \frac{s}{v} \rightarrow x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4} = 4h \xrightarrow{\cdot 4/5} x = \frac{16h}{5}$$

$$x = \underline{\underline{3.2h}} = \underline{\underline{3h\ 12\,min}}$$