

Musterprüfung 3-IT2

Themen: A. Mittelwert, empirische Varianz und Standardabweichung
 B. Boxplot
 C. Normalverteilung

A. 1) Bestimme Mittelwert und empirische Varianz und Standardabweichung der Stichprobe

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_j	10	13	14	15	13	15	11	10	12	15	15

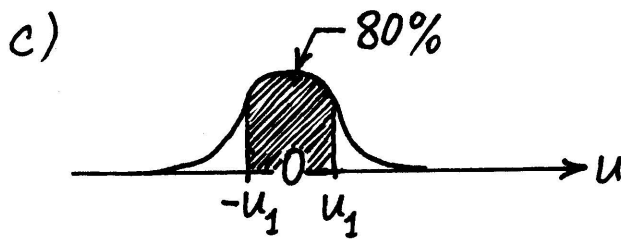
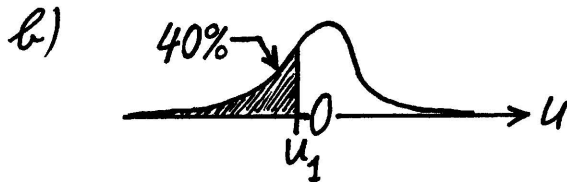
B. 1) Bestimme für die Stichprobe

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_j	25	24	36	38	37	30	32	36	35	38	28	29	31

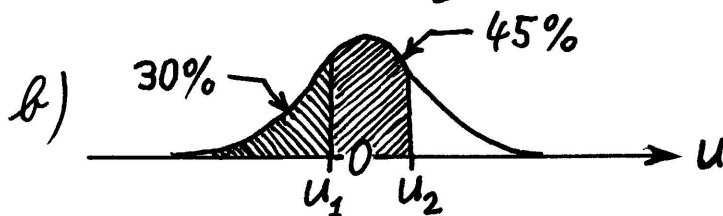
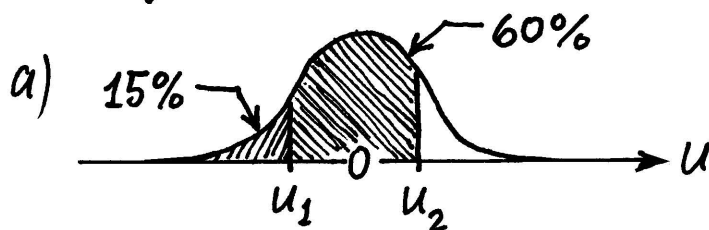
- a) den Mittelwert und den Median
- b) das erste und das dritte Quartil
- c) die Spannweite und den Interquartilsabstand
- d) den Quartil-Schiefte-Koeffizient
- e) Ausreisser. Begründe!
- f) ob die Verteilung linksschief oder rechtsschief ist

B. 2) Erstelle für die Stichprobe der Aufgabe B. 1 einen Boxplot.

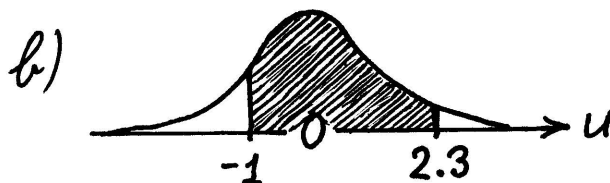
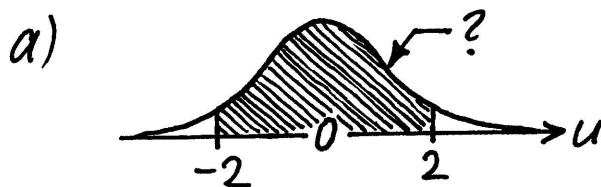
C.1) Wie gross ist u_1 ?



C.2) Wie gross sind u_1 und u_2 ?



C.3) Wie gross ist der schraffierte Bereich in Prozent?



- C.4) Für eine normalverteilte Zufallsgrösse x sei $\mu = 100$ und $\sigma = 15$. Wie viel % der Werte von x liegen im Bereich
- $x \geq 115$?
 - $x \leq 70$?
 - $80 \leq x \leq 120$
 - $75 \leq x \leq 125$
- C.5) Für eine normalverteilte Zufallsgrösse x sei $\mu = 120$ und $\sigma = 15$. Für welchen Wert x_1 gilt
- 25% der Werte liegen unterhalb von x_1 .
 - 25% der Werte liegen oberhalb von x_1 .
 - 40% der Werte liegen zwischen μ und x_1 .
- C.6) Für eine normalverteilte Zufallsgrösse x sei $\mu = 110$ und $\sigma = 20$. Für welche Werte x_1 und x_2 gilt
- 25% der Werte liegen oberhalb von x_2 und 40% der Werte liegen zwischen x_1 und x_2 .
 - 33% der Werte liegen unterhalb von x_1 und 33% der Werte liegen oberhalb von x_2 .
 - 20% der Werte liegen unterhalb von x_1 und 50% der Werte liegen zwischen x_1 und x_2 .
- C.7) Für eine normalverteilte Zufallsgrösse mit $\mu = 150$ liegen 15% der Werte oberhalb von 180. Wie gross ist σ ?
- C.8) Für eine normalverteilte Zufallsgrösse liegen 25% der Werte unterhalb von 90 und 25% der Werte liegen oberhalb von 140. Wie gross sind dann μ und σ ?

Lösungen

A.1)

j	x_j	x_j^2
1	10	100
2	13	169
3	14	196
4	15	225
5	13	169
6	15	225
7	11	121
8	10	100
9	12	144
10	15	225
11	15	225

$$\sum_{j=1}^{11} x_j = 10 + 13 + \dots + 15 = 143 = S_x$$

$$\sum_{j=1}^{11} x_j^2 = 10^2 + 13^2 + \dots + 15^2 = 1899 = S_{xx}$$

$$\bar{x} = \frac{S_x}{n} = \frac{143}{11} = \underline{\underline{13}}$$

$$s^2 = \frac{\left\{ \sum_{j=1}^{11} x_j^2 \right\} - n \cdot (\bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{S_{xx} - n \cdot (\bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{1899 - 11 \cdot 13^2}{11-1} = \underline{\underline{4}}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$$

B.1) Geordnete Liste (Rangliste)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_j	24	25	28	29	30	31	32	35	36	36	37	38	38

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{x}_{1/4}}$
 \downarrow
 \tilde{x}
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{x}_{3/4}}$

a) $\bar{x} = (24 + 25 + \dots + 38) / 13 = 419 / 13 = \underline{\underline{32.23}}$

$$\tilde{x} = x_7 = \underline{\underline{32}}$$

b) $\tilde{x}_{1/4} = (x_3 + x_4) / 2 = (28 + 29) / 2 = 28.5$

$$\tilde{x}_{3/4} = (x_{10} + x_{11}) / 2 = (36 + 37) / 2 = \underline{\underline{36.5}}$$

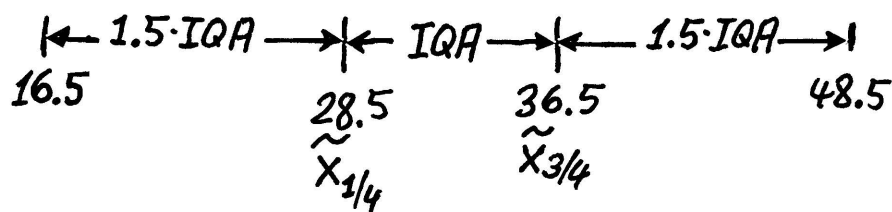
$$c) \text{ Spannweite} = x_{13} - x_1 = 38 - 24 = \underline{\underline{14}}$$

$$\text{IQA} = \tilde{x}_{3/4} - \tilde{x}_{1/4} = 36.5 - 28.5 = \underline{\underline{8}}$$

$$d) \text{ QSK} = \frac{\tilde{x}_{3/4} + \tilde{x}_{1/4} - 2\tilde{x}}{\tilde{x}_{3/4} - \tilde{x}_{1/4}} = \frac{36.5 + 28.5 - 2 \cdot 32}{36.5 - 28.5}$$

$$\text{QSK} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{0.125}}$$

$$e) 1.5 \cdot \text{IQA} = 1.5 \cdot 8 = 12$$

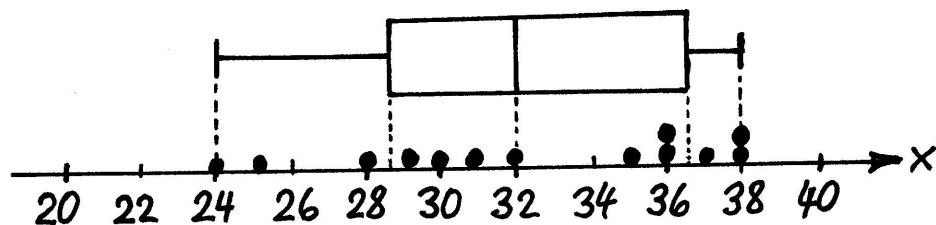


Die Stichprobe enthält keine Ausreißer.

Begründung: Ausreißer wären Werte < 16.5 oder 48.5

f) $\text{QSK} > 0 \rightarrow$ die Verteilung ist rechtsschief

B.2)



$$C.1a) u_1 = \underline{\underline{0.5244}}, (b) u_1 = \underline{\underline{-0.25335}}, (c) u_1 = \underline{\underline{1.28155}}$$

$$C.2a) u_1 = \underline{\underline{-1.03643}}, u_2 = \underline{\underline{0.67449}}$$

$$b) u_1 = \underline{\underline{-0.5244}}, u_2 = \underline{\underline{0.67449}}$$

$$C.3a) 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545 \hat{=} \underline{\underline{95.45\%}}$$

$$b) 0.98928 + 0.84134 - 1 = 0.83062 \hat{=} \underline{\underline{83.06\%}}$$

$$C.4a) u = (x - \mu) / \sigma = (115 - 100) / 15 = 1 \rightarrow \Phi(1) = 0.8413 \\ \hat{=} 84.13\% \rightarrow \underline{\underline{15.87\%}}$$

$$b) u = (x - \mu) / \sigma = (70 - 100) / 15 = -2 \rightarrow \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = \\ 1 - 0.97725 = 0.02275 \hat{=} \underline{\underline{2.275\%}}$$

$$c) u_1 = (80 - 100) / 15 = -1.33 \text{ und } u_2 = (120 - 100) / 15 = \\ 1.33 \rightarrow 2 \cdot \Phi(1.33) - 1 = 2 \cdot 0.90878 - 1 = 0.81756 \\ \hat{=} \underline{\underline{81.8\%}}$$

$$d) u_1 = (75 - 100) / 15 = -1.67 \text{ und } u_2 = (125 - 100) / 15 = \\ 1.67 \rightarrow 2 \cdot \Phi(1.67) - 1 = 2 \cdot 0.9525 - 1 = 0.9051 \\ \hat{=} \underline{\underline{90.5\%}}$$

$$C.5a) u_1 = -0.67449 \rightarrow x_1 = \mu + u_1 \sigma = 120 - 0.67449 \cdot 15 \\ x_1 = \underline{\underline{109.9}}$$

$$b) u_1 = 0.67449 \rightarrow x_1 = \mu + u_1 \sigma = 120 + 0.67449 \cdot 15 \\ x_1 = \underline{\underline{130.1}}$$

$$c) u_1 = \pm 1.28155 \rightarrow x_1 = 120 \pm 1.28155 \cdot 15 \\ \text{Zwei Lösungen: } \underline{\underline{x_1 = 100.8}} \text{ od. } \underline{\underline{x_1 = 139.2}}$$

$$C.6a) u_2 = 0.67449 \text{ und } u_1 = -0.38532 \\ x_1 = 110 - 0.38532 \cdot 20 = 102.3 \\ x_2 = 110 + 0.67449 \cdot 20 = \underline{\underline{123.5}}$$

$$b) x_1 = 110 - 0.43991 \cdot 20 = 101.2 \\ x_2 = 110 - 0.43991 \cdot 20 = \underline{\underline{118.8}}$$

$$c) x_1 = 110 - 0.84162 \cdot 20 = 93.2 \\ x_2 = 110 + 0.5244 \cdot 20 = \underline{\underline{120.5}}$$

$$C.7) 150 + 1.036\sigma = 180 \rightarrow \sigma = 30 / 1.03643 = \underline{\underline{28.9}}$$

$$C.8) \mu = (90 + 140) / 2 = \underline{\underline{115}} \rightarrow 115 + 0.67449\sigma = 140 \rightarrow \\ \sigma = 25 / 0.67449 = \underline{\underline{37.1}}$$