Musterprüfung

Themen:
A. Geometrische Folgen
B. Exponentielles Wachstum
C. Potenzgleichungen der Art $a \cdot x^n = b$
D. Exponentialgleichungen der Art $a \cdot q^x = b$
E. Unterjährige Verzinsung

A.1) Berechne die Glieder a_2, a_3 und a_4 der geometrischen Folge mit

a) $a_1 = 2$ und $q = 1.4$
b) $a_1 = 5$ und $a_{n+1}/a_n = 1.2$

A.2) Berechne aus der geometrischen Folge

a) a_7, wenn $a_5 = 81/32$ und $a_6 = 243/128$
b) a_4, wenn $a_2 = 18$ und $a_3 = 12$

B.1) Die tägliche Inflation in Venezuela (2019) sei 3%.

a) Wie viel muss man in einer Woche für etwas bezahlen, was heute 1 Mio. Bolivar kostet?
b) Welchem aktuellen Betrag entspricht die Kaufkraft von 1 Mio. Bolivar in einer Woche?
c) Wie viel müsste man heute für etwas bezahlen, das in einer Woche 1 Mio Bolivar kosten wird?
d) Wie viele Mio. Bolivar kostet etwas in einem Jahr, das jetzt 1 Mio. Bolivar kostet?

Anmerkung: 1 Jahr = 52 Wochen, 1 Woche = 7 Tage.

B.2) Wie gross ist das prozentuale jährliche Wachstum bei einer halbjährlichen Wachstumsrate von 20%?

B.3) Bei einem Inventar erstellt ein Lehrling eine Wertetabelle, um zu bestimmen, wie viele Abschreibungsperioden es bei degressiver Abschreibung von 20% dauert, bis eine Verpackungsmaschine nur noch Schrottwert in der Höhe von 10% des Anschaffungspreises aufweist. Rekonstruiere die Wertetabelle.

Abschreibungsperiode	1.	2.	3.	4.	5.
%	80%				

C.1) Bestimme die Lösung von

a) $2 \cdot x^5 = 2.73$
b) $3 \cdot x^7 = 2.4$
c) $7 \cdot x^9 = 6.2$
d) $12 \cdot x^6 = 15$

C.2) Bestimme den Wachstums-, resp. Abklingfaktor einer geometrischen Folge für welche gilt?

a) $a_{20} / a_4 = 5.2$
b) $a_1 = 5$ und $a_7 = 8$
c) $a_4 = 8$ und $a_{10} = 6$
d) $a_3 = 7$ und $a_{15} = 2$

C.3) Bei welchem prozentualen Wachstum verdoppelt sich eine Bevölkerung in 12 Jahren?

C.4) Um wie viel Prozent muss ein Währungsspekulant den Wert seines Portfolios pro Woche vergrössern, damit sich sein Wert im Verlauf eines Jahres verdoppelt? Anmerkung: 1 Jahr = 52 Wochen.

D.1) Bestimme die Lösung von

a) $3^x = 9$
b) $4^x = 12$
c) $5^x = 4$
d) $3 \cdot 4^x = 15$
e) $100 \cdot 1.05^x = 125$
f) $300 \cdot 1.04^x = 330$
g) $400 \cdot 1.02^x = 436$
h) $4 \cdot 3^x = 9 \cdot 2^x$

D.2) Wie viele Abschreibungsperioden vergehen bei einer degressiven Abschreibung mit einem Abschreibungssatz von 20% bis der Buchwert eines Firmenfahrzeugs auf 10% seines Anschaffungspreises gesunken ist?

D.3) Wie viele Zinsperioden müssen vergehen, bis ein ruhendes Bankguthaben bei einem Zinssatz von 3½% von EUR 1000 auf EUR 1 Mio. angewachsen ist?

D.4) Die Bevölkerungszahl der Stadt A ist jetz noch doppelt so gross wie diejenige der Stadt B. Ihre Bevölkerung schrumpft jedoch jährlich um 8%, während diejenige der Stadt B jährlich um 4% wächst. Wie lange dauert es bis die beiden Städte gleich viele Einwohner haben.

E.1) Bei einem Kleinkredit beträgt der Nominalzinssatz 9% p.a. Die Verzinsung ist jedoch monatlich. Wie viel schuldet der Konsument nach einem Jahr für ein Darlehen von EUR 3000?

E.2) Der Geldverleiher Sharky sagt, dass er 26% pro Jahr verlangt. In Wirklichkeit vergrössert sich der geschuldete Betrag nach jeder Woche um ½%. Um wie viele Prozent wird dadurch ein Darlehen im Verlaufe eines Jahres (= 52 Wochen) grösser?

Musterlösungen

A.1a)

n	1	2	3	4
a_n	2	2.8	3.92	5.488

b) $q = 1.2$

n	1	2	3	4
a_n	5	6	7.2	8.64

A.2a) $q = a_6 / a_5 = (243/128) : (81/32) = 3/4$

$a_7 = q \cdot a_6 = \frac{3}{4} \cdot \frac{243}{128} = \underline{\underline{\frac{729}{512}}}$

b) $a_3 / a_2 = 12/18 = 2/3 = q$, $a_4 = q \cdot a_3 = \frac{2}{3} \cdot 12 = \underline{\underline{8}}$

B.1a) $10^6 \cdot 1.03^7 = \underline{\underline{1.230 \text{ Mio.}}}$

b) $10^6 : 1.03^7 = \underline{\underline{0.813 \text{ Mio.}}}$

c) $10^6 : 1.03^7 = \underline{\underline{0.813 \text{ Mio.}}}$

d) $10^6 \cdot (1.03^7)^{52} = \underline{\underline{47'071 \text{ Mio.}}}$

B.2) $W_2 = W_0 \cdot 1.2^2 = W_0 \cdot 1.44 \longrightarrow \underline{\underline{44\%}}$

B.3)

Abschreibungs-periode	1.	2.	3.	4.	5.
%	80%	64%	51.2%	40.96%	32.768%

C.1a) $x = \sqrt[5]{2.73/2} = \underline{\underline{1.0642}}$

b) $x = \sqrt[7]{2.4/3} = \sqrt[7]{0.8} = \underline{\underline{0.968625}}$

c) $x = \sqrt[9]{6.2/7} = \underline{\underline{0.986606}}$

d) $x = \sqrt[6]{15/12} = \sqrt[6]{1.25} = \underline{\underline{1.03789}}$

C.2a) $a_{20}/a_4 = q^{16} = 5.2 \rightarrow q = \sqrt[16]{5.2} = \underline{\underline{1.10854}}$

b) $a_7/a_1 = 8/5 = 1.6 = q^6 \rightarrow q = \sqrt[6]{1.6} = \underline{\underline{1.0815}}$

c) $a_{10}/a_4 = q^6 = 6/8 = 3/4 \rightarrow q = \sqrt[6]{3/4} = \underline{\underline{0.95318}}$

d) $a_{15}/a_3 = 2/7 = q^{12} \rightarrow q = \sqrt[12]{2/7} = \underline{\underline{0.90087}}$

C.3) $B = 2B_0 = B_0 \cdot q^{12} \rightarrow q^{12} = 2 \rightarrow q = \sqrt[12]{2} = 1.0595$

<u>Antw.</u>: Bei $\underline{\underline{5.95\,\%}}$ Wachstum

C.4) $W = 2W_0 = W_0 \cdot q^{52} \rightarrow q^{52} = 2 \rightarrow q = \sqrt[52]{2} = 1.0134$

<u>Antw.</u>: Bei $\underline{\underline{1.34\,\%}}$ wöchentlicher Gewinn

D.1a) $x = \lg 9/\lg 3 = \underline{\underline{2}}$

b) $x = \lg 12/\lg 4 = \underline{\underline{1.7925}}$

c) $x = \lg 4/\lg 5 = \underline{\underline{0.86135}}$

d) $4^x = 15/3 = 5 \rightarrow x = \lg 5/\lg 4 = \underline{\underline{1.16096}}$

e) $1.05^x = 125/100 \rightarrow x = \lg 1.25/\lg 1.05 = \underline{\underline{4.5735}}$

f) $1.04^x = 330/300 \rightarrow x = \lg 1.1/\lg 1.04 = \underline{\underline{2.4301}}$

g) $400 \cdot 1.02^x = 436 \rightarrow x = \lg 1.09/\lg 1.02 = \underline{\underline{4.3518}}$

h) $3^x/2^x = (3/2)^x = 9/4 \rightarrow x = \lg(9/4)/\lg(3/2) = \underline{\underline{2}}$

D.2) $W = 0.1 W_0 = W_0 \cdot q^x = W_0 \cdot 0.8^x \rightarrow 0.8^x = 0.1 \rightarrow$

$x = \lg 0.1/\lg 0.8 = \underline{\underline{10.32}}$

<u>Antw.</u>: Nach ungefähr <u>10</u> Abschreibungsperioden

D.3) $10^6 = 10^3 \cdot 1.035^x \rightarrow 1.035^x = 1000 \rightarrow$

$x = \lg 1000/\lg 1.035 = 3/\lg 1.035 = \underline{\underline{200.80}}$

<u>Antw.</u>: Es dauert ungefähr <u>201 Jahre</u>

D.4) $A \cdot 1.04^x = 2A \cdot 0.92^x \rightarrow 1.04^x / 0.92^x = 2A/A = 2$
$\rightarrow (1.04/0.92)^x = (26/23)^x = 2 \rightarrow x = \lg 2 /$
$\lg(26/23) = \underline{\underline{5.65}}$

Antw.: Es dauert ungefähr 5.65 Jahre

E.1) $Z = 3000 \cdot \left[\left(1 + \frac{9}{12 \cdot 100}\right)^{12} - 1\right] = \underline{\underline{281.42}}$

Antw.: Der jährliche Zins beträgt EUR 281.42

E.2) $K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{26}{52 \cdot 100}\right)^{52} = 1.296 \cdot K_0$

Antw.: Der Zins für ein Jahr beträgt 29.6 % des Darlehens.

Formelsammlung MP4-IT2

Geometrische Folgen:

Kennzeichen: Jedes Glied ist um einen konstanten Faktor q $(q>0)$ grösser (wenn $q>1$) oder kleiner (wenn $q<1$) als das vorherige Glied.

Explizite Darstellung: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Rekursive Darstellung: $\boxed{a_1 = \dots,\ a_n = q \cdot a_{n-1}}$

Quotient a_n/a_j: $\boxed{a_n/a_j = q^{n-j}}$ Bsp.: $a_{17}/a_{11} = q^{17-11} = q^6$
$\rightarrow q = \sqrt[6]{a_{17}/a_{11}}$

Exponentielles Wachstum (od. Zerfall, wenn $q<1$):
(Zinseszins)

$$\boxed{\begin{array}{l} X_n = X_0 \cdot q^n, \\ \text{wobei } q = 1 \pm \frac{p}{100} \end{array}}$$

(beginnt bei null!)
n = Anzahl Wachstumsperioden

z.B. 5% Wachstum $\rightarrow q = 1 + 5/100 = 1.05$ od
6% Abnahme $\rightarrow q = 1 - 6/100 = 0.94$

Unterjährige Verzinsung: Es sei m die Anzahl Zinsperioden pro Jahr und p sei der Nominalzins (p.a.), dann

- Zinssatz durch m dividieren
- Anzahl Zinsperioden mit m multiplizieren

Merke: X_n ist der Kontostand (eines ruhenden Guthabens). Der Zins ist

$$Z_n = X_n - X_0 = X_0 \left[q^n - 1\right]$$

Potenzgleichungen: $a \cdot x^n = b \rightarrow x = \sqrt[n]{b/a}$, z.B.
$3 \cdot x^5 = 11 \rightarrow x = \sqrt[5]{11/3} = 1.2967$

Exponentialgleichungen: $c \cdot a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log(b/c)}{\log a}$

z.B. $3 \cdot 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log(5/3)/\log 2 = 0.7370$

Umformung: $c \cdot a^x = d \cdot b^x \rightarrow (a/b)^x = d/c \Leftrightarrow$
$x = \log(d/c)/\log(a/b)$