Musterprüfung 3-IT3

Themen: A. Der Differenzenquotient
B. Das Differential. Einführung in die Infinitesimalrechnung
C. Numerische Integration

A.1) Bestimme den Differenzenquotient für die Funktion $y=x^3-2x^2$ für die gegebenen Werte von x_1 und x_2.

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\Delta y/\Delta x$
a)	1	2			
b)	1	1.5			
c)	1	1.2			
d)	1	1.1			
e)	1	1.05			
f)	1	1.01			

A.2) Berechne den Differenzenquotient von

a) $f(x)=x^2-3$ für $x_1=0$ und $x_2=3$

b) $f(x)=x^5-3x^3-x$ für $x_1=-1/2$ und $x_2=1$

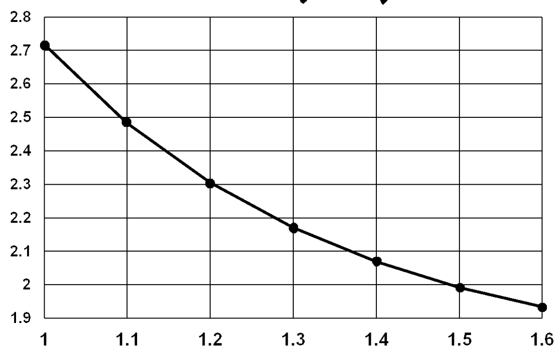
c) $f(x)=\sqrt{x}$ für $x_1=4$ und $x_2=6.25$

d) $f(x)=(x+3)/(x-2)$ für $x_1=3$ und $x_2=4$

A.3)

x	$y=e^x/x^2$
1	2.718
1.1	2.483
1.2	2.306
1.3	2.171
1.4	2.069
1.5	1.992
1.6	1.935

Berechne für Intervalle der Breite 0.1 den Differenzenquotienten der Funktion $y=e^x/x^2$ mithilfe nebenstehender Wertetabelle. Wo liegt die Stelle an welcher der Graph der Funktion die Steigung -1 hat?



B.1) Bestimme die Ableitungsfunktion von

a) $y=x^2$

b) $y=2x^2-3x$

c) $y=3x^2-4x+5$

B.2) Berechne den Scheitelpunkt (Extremum) von

a) $y=x^2-6x$

b) $y=2x^2-8x+11$

B.3) An welcher Stelle ($x=?$) ist die Steigung des Graphen von $y=x^2-3x$ gleich 5?

B.4) In welchem Punkt auf dem Graphen von $y=2x^2-8x$ ist die Steigung gleich -4?

B.5) Vergleiche den Differenzenquotienten von $y=x^2$ für $x_1=2$ und $x_2=2.01$ mit der Ableitung (von $y=x^2$) an der Stelle $x=2$.

C.1) Berechne die Funktionswerte von $f(x)=\sqrt{x+1}$ für die tabellierten Werte von x. Bestimme alsdann eine Näherung für das bestimmte Integral

$$I=\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$$

als Riemann'sche Summe. Bestimme die Unter- und die Obersumme.

x	$\sqrt{x+1}$	x	$\sqrt{x+1}$	x	$\sqrt{x+1}$	x	$\sqrt{x+1}$
0		0.8		1.6		2.4	
0.2		1		1.8		2.6	
0.4		1.2		2		2.8	
0.6		1.4		2.2		3	

C.2) Berechne die Funktionswerte von $f(x)=x/(x^2+1)$ für die tabellierten Werte von x. Bestimme alsdann eine Näherung für das bestimmte Integral

$$I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

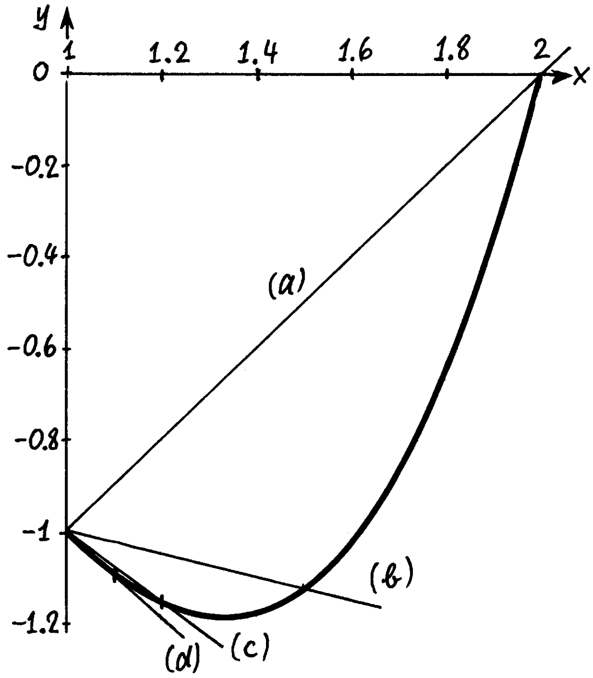
als Riemannsche Summe. Bestimme Unter- und Obersumme

x	$x/(x^2+1)$	x	$x/(x^2+1)$	x	$x/(x^2+1)$
0		0.4		0.8	
0.1		0.5		0.9	
0.2		0.6		1	
0.3		0.7			

Musterlösungen

A.1)

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\Delta y/\Delta x$
a)	1	2	-1	0	1
b)	1	1.5	-1	-1.125	-0.25
c)	1	1.2	-1	-1.152	-0.76
d)	1	1.1	-1	-1.089	-0.89
e)	1	1.05	-1	-1.0474	-0.9475
f)	1	1.01	-1	-1.0099	-0.9899



A.2a) $y_1 = 0 - 3 = -3$ und $y_2 = 3^2 - 3 = 6 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (6-(-3))/(3-0) = 9/3 = \underline{\underline{3}}$

b) $y_1 = (-1/2)^5 - 3\cdot(-1/2)^3 - (-1/2) = 0.84375$ und $y_2 = 1 - 3 - 1 = -3 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (-3 - 0.84375)/(1-(-1/2)) = \underline{\underline{-2.5625}}$

c) $y(4) = \sqrt{4} = 2$ und $y(6.25) = \sqrt{6.25} = 2.5 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (2.5 - 2)/(6.25 - 4) = \underline{\underline{2/9 = 0.2222}}$

d) $y_2 = (4+3)/(4-2) = 7/2 = 3.5$ und $y_1 = (3+3)/(3-2) = 6 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (3.5 - 6)/(4-3) = \underline{\underline{-5/2}}$

A.3)

x	y
1	2.718
1.1	2.483
1.2	2.306
1.3	2.171
1.4	2.069
1.5	1.992
1.6	1.935

$\Delta y / \Delta x$

$(2.483-2.718)/0.1 = -2.35$

$(2.306-2.483)/0.1 = -1.77$

$(2.171-2.306)/0.1 = -1.35$

$(2.069-2.171)/0.1 = -1.02 \leftarrow$!!!

$(1.992-2.069)/0.1 = -0.77$

$(1.935-1.992)/0.1 = \underline{\underline{-0.57}}$

Antw.: Der Graph der Funktion hat die Steigung -1 im Intervall $1.3 \leq x \leq 1.4$

B.1a)

a	b	c
1	0	0

$y' = 2ax + b = \underline{\underline{2x}}$

b)

a	b	c
2	-3	0

$y' = 2ax + b = \underline{\underline{4x-3}}$

c)

a	b	c
3	-4	5

$y' = 2ax + b = \underline{\underline{6x-4}}$

B.2a)

a	b	c
1	-6	0

$y' = 2ax + b = 2x - 6 = 0 \xrightarrow[+6]{} 2x = 6$

$\xrightarrow[:2]{} x = 3$

$y = x^2 - 6x = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9$

$\left.\right\} \underline{\underline{S\binom{3}{-9}}}$

b)

a	b	c
2	-8	11

$y' = 2ax + b = 4x - 8 = 0 \xrightarrow{+8}$

$4x = 8 \xrightarrow{:4} x = 2$

$y = 2x^2 - 8x + 11 = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 11 = 3$

$\left.\right\} \underline{\underline{S\binom{2}{3}}}$

B.3)

a	b	c
1	-3	0

$y' = 2x - 3 = 5 \xrightarrow{+3} 2x = 8 \xrightarrow{:2} \underline{\underline{x=4}}$

B.4)

a	b	c
2	-8	0

$y' = 4x - 8 = -4 \xrightarrow{+8} 4x = 4 \rightarrow x = 1$

$y = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = -6 \rightarrow \underline{\underline{P\binom{1}{-6}}}$

B.5) $y_1 = 2^2 = 4$, $y_2 = 2.01^2 = 4.0401 \rightarrow \Delta y / \Delta x$

$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4.0401 - 4}{2.01 - 2} = \frac{0.0401}{0.01} = \underline{\underline{4.01}}$

$y' = 2ax + b \xrightarrow[b=0]{a=1} y' = 2x \rightarrow y'(2) = 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$

<u>Vergleich</u>: Der Differenzenquotient im Intervall $2 \leq x \leq 2.01$ und die Ableitung an der Stelle $x = 2$ sind fast gleich.

C.1)

x	$\sqrt{x+1}$	x	$\sqrt{x+1}$	x	$\sqrt{x+1}$	x	$\sqrt{x+1}$
0	1	0.8	1.342	1.6	1.612	2.4	1.844
0.2	1.095	1	1.414	1.8	1.673	2.6	1.897
0.4	1.183	1.2	1.483	2	1.732	2.8	1.949
0.6	1.265	1.4	1.549	2.2	1.789	3	2

Untersumme: $I_u = (1 + 1.095 + 1.183 + \cdots + 1.949) \cdot 0.2$

$\underline{\underline{I_u = 4.565}}$

Obersumme: $I_o = (1.095 + 1.183 + 1.265 + \cdots + 1.949 + 2) \cdot 0.2$

$\underline{\underline{I_o = 4.765}}$

C.2)

x	$x/(x^2+1)$	x	$x/(x^2+1)$	x	$x/(x^2+1)$
0	0	0.4	0.3448	0.8	0.4878
0.1	0.0990	0.5	0.4	0.9	0.4972
0.2	0.1923	0.6	0.4412	1	0.5
0.3	0.2752	0.7	0.4698		

Untersumme: $I_u = (0 + 0.0990 + \cdots + 0.4972) \cdot 0.1$

$$\underline{\underline{I_u = 0.3207}}$$

Obersumme: $I_o = (0.0990 + 0.1923 + \cdots + 0.5) \cdot 0.1$

$$\underline{\underline{I_o = 0.2707}}$$