

Musterprüfung 4-IT3

Themen:

- A. Geometrische Folgen
- B. Exponentielles Wachstum
- C. Potenzgleichungen der Art $a \cdot x^n = b$
- D. Exponentialgleichungen der Art $a \cdot q^x = b$
- E. Unterjährige Verzinsung
- F. Addition von Punkten auf einer elliptischen Kurve

A.1) Berechne die Glieder a_2 , a_3 und a_4 der geometrischen Folge mit

a) $a_1 = 2$ und $q = 1.4$

b) $a_1 = 5$ und $a_{n+1}/a_n = 1.2$

A.2) Berechne aus der geometrischen Folge

a) a_7 , wenn $a_5 = 81/32$ und $a_6 = 243/128$

b) a_4 , wenn $a_2 = 18$ und $a_3 = 12$

B.1) Die tägliche Inflation in Venezuela (2019) sei 3%.

- a) Wie viel muss man in einer Woche für etwas bezahlen, was heute 1 Mio. Bolivar kostet?
- b) Welchem aktuellen Betrag entspricht die Kaufkraft von 1 Mio. Bolivar in einer Woche?
- c) Wie viel müsste man heute für etwas bezahlen, das in einer Woche 1 Mio. Bolivar kosten wird?
- d) Wie viele Mio. Bolivar kostet etwas in einem Jahr, das jetzt 1 Mio. Bolivar kostet?

Anmerkung: 1 Jahr = 52 Wochen, 1 Woche = 7 Tage.

B.2) Wie gross ist das prozentuale jährliche Wachstum bei einer halbjährlichen Wachstumsrate von 20%?

- B.3) Bei einem Inventar erstellt ein Lehrling eine Wertetabelle, um zu bestimmen, wie viele Abschreibungsperioden es bei degressiver Abschreibung von 20% dauert, bis eine Verpackungsmaschine nur noch Schrottwert in der Höhe von 10% des Anschaffungspreises aufweist. Rekonstruiere die Wertetabelle.

Abschreibungsperiode	1.	2.	3.	4.	5.
%	80%				

- C.1) Bestimme die Lösung von

a) $2 \cdot x^5 = 2.73$

b) $3 \cdot x^7 = 2.4$

c) $7 \cdot x^9 = 6.2$

d) $12 \cdot x^6 = 15$

- C.2) Bestimme den Wachstums-, resp. Abklingfaktor einer geometrischen Folge für welche gilt?

a) $a_{20} / a_4 = 5.2$

b) $a_1 = 5$ und $a_7 = 8$

c) $a_4 = 8$ und $a_{10} = 6$

d) $a_3 = 7$ und $a_{15} = 2$

- C.3) Bei welchem prozentualen Wachstum verdoppelt sich eine Bevölkerung in 12 Jahren?

- C.4) Um wie viel Prozent muss ein Währungsspekulant den Wert seines Portfolios pro Woche vergrößern, damit sich sein Wert im Verlauf eines Jahres verdoppelt?

Anmerkung: 1 Jahr = 52 Wochen.

D.1) Bestimme die Lösung von

a) $3^x = 9$

e) $100 \cdot 1.05^x = 125$

b) $4^x = 12$

f) $300 \cdot 1.04^x = 330$

c) $5^x = 4$

g) $400 \cdot 1.02^x = 436$

d) $3 \cdot 4^x = 15$

h) $4 \cdot 3^x = 9 \cdot 2^x$

D.2) Wie viele Abschreibungsperioden vergehen bei einer degressiven Abschreibung mit einem Abschreibungssatz von 20% bis der Buchwert eines Firmenfahrzeugs auf 10% seines Anschaffungspreises gesunken ist?

D.3) Wie viele Zinsperioden müssen vergehen, bis ein ruhendes Bankguthaben bei einem Zinssatz von $3\frac{1}{2}\%$ von EUR 1000 auf EUR 1 Mio. angewachsen ist?

D.4) Die Bevölkerungszahl der Stadt A ist jetzt noch doppelt so gross wie diejenige der Stadt B. Ihre Bevölkerung schrumpft jedoch jährlich um 8%, während diejenige der Stadt B jährlich um 4% wächst. Wie lange dauert es bis die beiden Städte gleich viele Einwohner haben.

E.1) Bei einem Kleinkredit beträgt der Nominalzinssatz 9% p.a. Die Verzinsung ist jedoch monatlich. Wie viel schuldet der Konsument nach einem Jahr für ein Darlehen von EUR 3000?

E.2) Der Geldverleiher Sharky sagt, dass er 26% pro Jahr verlangt. In Wirklichkeit vergrössert sich der geschuldete Betrag nach jeder Woche um $\frac{1}{2}\%$. Um wie viele Prozent wird dadurch ein Darlehen im Verlaufe eines Jahres (= 52 Wochen) grösser?

F.1) Berechne die Punkte auf der „Bitcoin-Kurve“

$$k: y^2 = x^3 + 7$$

a) $A\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ ? \end{smallmatrix}\right), B\left(\begin{smallmatrix} -1.9 \\ ? \end{smallmatrix}\right), C\left(\begin{smallmatrix} -1.5 \\ ? \end{smallmatrix}\right), D\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ ? \end{smallmatrix}\right), E\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ ? \end{smallmatrix}\right)$

b) $F\left(\begin{smallmatrix} ? \\ 0 \end{smallmatrix}\right), G\left(\begin{smallmatrix} ? \\ -1 \end{smallmatrix}\right), H\left(\begin{smallmatrix} ? \\ 2 \end{smallmatrix}\right), I\left(\begin{smallmatrix} ? \\ -2 \end{smallmatrix}\right), J\left(\begin{smallmatrix} ? \\ 3 \end{smallmatrix}\right), K\left(\begin{smallmatrix} ? \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$

alle Lösungen!

Stelle die berechneten Punkte auf einem Koordinatensystem dar und versuche die Kurve zu skizzieren.

F.2) Addiere die Punkte P und Q auf der „Bitcoin-Kurve“

$$k: y^2 = x^3 + 7, \text{ wenn}$$

a) $P\left(\begin{smallmatrix} -1.8 \\ 1.08074 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3.87298 \end{smallmatrix}\right)$

b) $P\left(\begin{smallmatrix} -1.5 \\ 1.90394 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2.82843 \end{smallmatrix}\right)$

c) $P\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2.44949 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2.64575 \end{smallmatrix}\right)$

F.3) Multipliziere den Punkt P auf der „Bitcoin-Kurve“

$$k: y^2 = x^3 + 7 \text{ mit dem Faktor } n, \text{ wenn}$$

a) $P\left(\begin{smallmatrix} 2.08008 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ und $n=2$

b) $P\left(\begin{smallmatrix} 1.25992 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ und $n=3$

c) $P\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -5.83095 \end{smallmatrix}\right)$ und $n=4$

F.4) Multipliziere die Summe der Punkte $P\left(\begin{smallmatrix} 1.5 \\ -3.22102 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q\left(\begin{smallmatrix} -1.2 \\ 2.29608 \end{smallmatrix}\right)$ auf der „Bitcoin-Kurve“

$$k: y^2 = x^3 + 7 \text{ mit dem Faktor } 2.$$

Musterlösungen

A.1a)

n	1	2	3	4
a_n	2	2.8	3.92	5.488

b) $q=1.2$

n	1	2	3	4
a_n	5	6	7.2	8.64

A.2a) $q = a_6 / a_5 = (243/128) : (81/32) = 3/4$
 $a_7 = q \cdot a_6 = \frac{3}{4} \cdot \frac{243}{128} = \frac{729}{512}$

b) $a_3 / a_2 = 12/18 = 2/3 = q$, $a_4 = q \cdot a_3 = \frac{2}{3} \cdot 12 = \underline{\underline{8}}$

B.1a) $10^6 \cdot 1.03^7 = \underline{\underline{1.230 \text{ Mio.}}}$

b) $10^6 : 1.03^7 = \underline{\underline{0.813 \text{ Mio.}}}$

c) $10^6 : 1.03^7 = \underline{\underline{0.813 \text{ Mio.}}}$

d) $10^6 \cdot (1.03^7)^{52} = \underline{\underline{47'071 \text{ Mio.}}}$

B.2) $W_2 = W_0 \cdot 1.2^2 = W_0 \cdot 1.44 \rightarrow \underline{\underline{44\%}}$

B.3)

Abschreibungs- periode	1.	2.	3.	4.	5.
%	80%	64%	51.2%	40.96%	32.768%

C.1a) $x = \sqrt[5]{2.73/2} = \underline{\underline{1.0642}}$

b) $x = \sqrt[7]{2.4/3} = \sqrt[7]{0.8} = \underline{\underline{0.968625}}$

c) $x = \sqrt[9]{6.2/7} = \underline{\underline{0.986606}}$

$$d) x = \sqrt[6]{15/12} = \sqrt[6]{1.25} = \underline{\underline{1.03789}}$$

$$C.2a) a_{20}/a_4 = q^{16} = 5.2 \rightarrow q = \sqrt[16]{5.2} = \underline{\underline{1.10854}}$$

$$b) a_7/a_1 = 8/5 = 1.6 = q^6 \rightarrow q = \sqrt[6]{1.6} = \underline{\underline{1.0815}}$$

$$c) a_{10}/a_4 = q^6 = 6/8 = 3/4 \rightarrow q = \sqrt[6]{3/4} = \underline{\underline{0.95318}}$$

$$d) a_{15}/a_3 = 2/7 = q^{12} \rightarrow q = \sqrt[12]{2/7} = \underline{\underline{0.90087}}$$

$$C.3) B = 2B_0 = B_0 \cdot q^{12} \rightarrow q^{12} = 2 \rightarrow q = \sqrt[12]{2} = 1.0595$$

Antw.: Bei 5.95% Wachstum

$$C.4) W = 2W_0 = W_0 \cdot q^{52} \rightarrow q^{52} = 2 \rightarrow q = \sqrt[52]{2} = 1.0134$$

Antw.: Bei 1.34% wöchentlicher Gewinn

$$D.1a) x = \lg 9 / \lg 3 = \underline{\underline{2}}$$

$$b) x = \lg 12 / \lg 4 = \underline{\underline{1.7925}}$$

$$c) x = \lg 4 / \lg 5 = \underline{\underline{0.86135}}$$

$$d) 4^x = 15/3 = 5 \rightarrow x = \lg 5 / \lg 4 = \underline{\underline{1.16096}}$$

$$e) 1.05^x = 125/100 \rightarrow x = \lg 1.25 / \lg 1.05 = \underline{\underline{4.5735}}$$

$$f) 1.04^x = 330/300 \rightarrow x = \lg 1.1 / \lg 1.04 = \underline{\underline{2.4301}}$$

$$g) 400 \cdot 1.02^x = 436 \rightarrow x = \lg 1.09 / \lg 1.02 = \underline{\underline{4.3518}}$$

$$h) 3^x / 2^x = (3/2)^x = 9/4 \rightarrow x = \lg(9/4) / \lg(3/2) = \underline{\underline{2}}$$

$$D.2) W = 0.1W_0 = W_0 \cdot q^x = W_0 \cdot 0.8^x \rightarrow 0.8^x = 0.1 \rightarrow$$

$$x = \lg 0.1 / \lg 0.8 = \underline{\underline{10.32}}$$

Antw.: Nach ungefähr 10 Abschreibungsperioden

$$D.3) 10^6 = 10^3 \cdot 1.035^x \rightarrow 1.035^x = 1000 \rightarrow$$

$$x = \lg 1000 / \lg 1.035 = 3 / \lg 1.035 = \underline{\underline{200.80}}$$

Antw.: Es dauert ungefähr 201 Jahre

$$D.4) A \cdot 1.04^x = 2A \cdot 0.92^x \rightarrow 1.04^x / 0.92^x = 2A/A = 2$$

$$\rightarrow (1.04/0.92)^x = (26/23)^x = 2 \rightarrow x = \lg 2 / \lg(26/23) = \underline{\underline{5.65}}$$

Antw.: Es dauert ungefähr 5.65 Jahre

$$E.1) Z = 3000 \cdot \left[\left(1 + \frac{9}{12 \cdot 100} \right)^{12} - 1 \right] = \underline{\underline{281.42}}$$

Antw.: Der jährliche Zins beträgt EUR 281.42

$$E.2) K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{26}{52 \cdot 100} \right)^{52} = 1.296 K_0$$

Antw.: Der Zins für ein Jahr beträgt 29.6% des Darlehens.

$$F.1a) y = \pm \sqrt{x^3 + 7}$$

A: keine Lösung weil

$$\sqrt{(-2)^3 + 7} = \sqrt{-1}$$

$$B: \pm \sqrt{(-1.9)^3 + 7} = \pm 0.3754$$

$$\underline{\underline{B_1 \begin{pmatrix} -1.9 \\ 0.3754 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 \begin{pmatrix} -1.9 \\ -0.3754 \end{pmatrix}}}$$

$$C: \pm \sqrt{(-1.5)^3 + 7} = \pm 1.9039$$

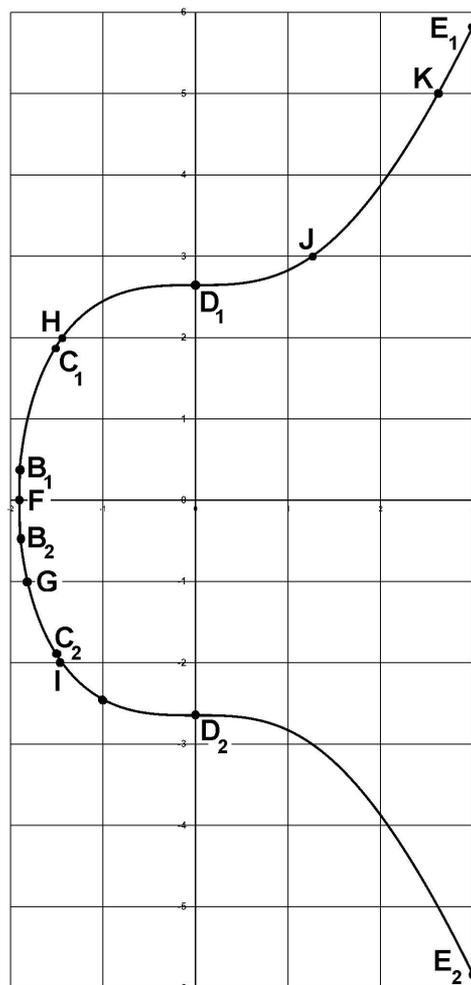
$$\underline{\underline{C_1 \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.9039 \end{pmatrix} \text{ und } C_2 \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.9039 \end{pmatrix}}}$$

$$D: \pm \sqrt{0 + 7} = \pm \sqrt{7} = \pm 2.6458$$

$$\underline{\underline{D_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2.6458 \end{pmatrix} \text{ und } D_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2.6458 \end{pmatrix}}}$$

$$E: \pm \sqrt{3^3 + 7} = \pm \sqrt{34} = \pm 5.8310$$

$$\underline{\underline{E_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5.8310 \end{pmatrix} \text{ und } E_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5.8310 \end{pmatrix}}}$$



$$b) \quad x = \sqrt[3]{y^2 - 7}$$

$$F \begin{pmatrix} -1.9129 \\ 0 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} -1.8171 \\ -1 \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} -1.4422 \\ 2 \end{pmatrix}, I \begin{pmatrix} -1.4422 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$J \begin{pmatrix} 1.2599 \\ 3 \end{pmatrix}, K \begin{pmatrix} 2.6207 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\quad \quad \quad \swarrow \sqrt[3]{2} \quad \quad \quad \swarrow \sqrt[3]{18}$$

$$F.2a) \quad m = \frac{3.87298 - 1.08074}{2 - (-1.8)} = 0.7348$$

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q = 0.7348^2 - (-1.8) = 0.3399$$

$$y_R = m(x_Q - x_R) - y_Q = 0.7348(2 - 0.3399) - 3.87298$$

$$\quad \quad \quad = -2.6532$$

$$\underline{\underline{R \begin{pmatrix} 0.3399 \\ -2.6532 \end{pmatrix}}}$$

$$b) \quad m = \frac{2.82843 - 1.90394}{1 - (-1.5)} = 0.36980$$

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q = 0.3698^2 - (-1.5) - 1 = 0.63675$$

$$y_R = m(x_Q - x_R) - y_Q = 0.3698(1 - 0.63675) - 2.82843$$

$$\quad \quad \quad = -2.6941$$

$$\underline{\underline{R \begin{pmatrix} 0.6367 \\ -2.6941 \end{pmatrix}}}$$

$$c) \quad m = \frac{2.64575 - (-2.44949)}{0 - (-1)} = 5.09524$$

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q = 5.09524^2 - (-1) - 0 = 26.9615$$

$$y_R = m(x_Q - x_R) - y_Q = 5.09524(0 - 26.9615) - 2.64575$$

$$\quad \quad \quad = -140.0211$$

$$\underline{\underline{R \begin{pmatrix} 26.9615 \\ -140.0211 \end{pmatrix}}}$$

$$F.3a) m = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p} = \frac{3x_p^2}{2y_p} \quad (a=0)$$

$$m = \frac{3 \cdot 2.08008^2}{2 \cdot (-4)} = -1.62252$$

$$x_R = m^2 - 2x_p = (-1.62252)^2 - 2 \cdot 2.08008$$

$$x_R = -1.52756$$

$$y_R = m \cdot (x_p - x_R) - y_p = -1.62252 \cdot (2.08008 - (-1.52756)) - (-4) = -1.85350$$

$$\underline{\underline{R(-1.5276)}} \\ \underline{\underline{(-1.8535)}}$$

b) Zuerst "P+P"

$$m = 3x_p^2 / (2y_p) = 3 \cdot 1.25992^2 / (2 \cdot 3) = 0.7937$$

$$x_R = m^2 - 2x_p = -1.88988$$

$$y_R = m \cdot (x_p - x_R) - y_p = 0.7937(1.25992 - (-1.88988)) - 3 = -0.5$$

$$R(-1.88988) \\ -0.5$$

P+P → R, P+R → S

$$P(1.25992, 3), R(-1.88988, -0.5)$$

$$m = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{-0.5 - 3}{-1.88988 - 1.25992} = 1.11118$$

$$x_S = m^2 - x_P - x_R = 1.11118^2 - 1.25992 - (-1.88988) = 1.86468$$

$$y_S = m \cdot (x_R - x_S) - y_R = 1.11118 \cdot (-1.88988 - 1.86468) - (-0.5) = -3.672$$

$$\underline{\underline{S(1.86468)}} \\ \underline{\underline{-3.672}}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad m &= 3x_p^2 / (2y_p) = 3 \cdot 3^2 / (2 \cdot (-5.83095)) = -2.31523 \\
 x_R &= m^2 - 2x_p = (-2.31523)^2 - 2 \cdot 3 = -0.63970 \\
 y_R &= m(x_p - x_R) - y_p = -2.31523 \cdot (3 - (-0.63970)) \\
 &\quad - (-5.83095) = -2.59581 \\
 P + P &\rightarrow R, \quad R + R \rightarrow S \\
 m &= 3x_R^2 / (2y_R) = 3 \cdot (-0.63970)^2 / (2 \cdot (-2.59581)) \\
 &= -0.23647 \\
 x_S &= m^2 - 2x_R = (-0.23647)^2 - 2 \cdot (-0.63970) \\
 &= 1.33533 \\
 y_S &= m(x_R - x_S) - y_R = -0.23647(-0.63970 - \\
 &\quad 1.33533) - (-2.59581) = 3.06285 \\
 4P &\rightarrow \underline{\underline{S \begin{pmatrix} 1.3353 \\ 3.0628 \end{pmatrix}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F.4) \quad m &= \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{2.29608 - (-3.22102)}{-1.2 - 1.5} = -2.04337 \\
 x_R &= m^2 - x_P - x_Q = (-2.04337)^2 - 1.5 - (-1.2) \\
 &= 3.87536 \\
 y_R &= m \cdot (x_P - x_R) - y_P = -2.04337 \cdot (1.5 - 3.87536) \\
 &\quad - (-3.22102) = 8.07480 \\
 R + R &\rightarrow S \qquad R \begin{pmatrix} 3.87538 \\ 8.07480 \end{pmatrix} \\
 m &= 3x_R^2 / (2y_R) = 3 \cdot 3.87538^2 / (2 \cdot 8.07480) \\
 &= 2.78989 \\
 x_S &= m^2 - 2x_R = 2.78989^2 - 2 \cdot 3.87538 = 0.032726 \\
 y_S &= m \cdot (x_R - x_S) - y_R = 2.78989 \cdot (3.87538 - \\
 &\quad 0.032726) - 8.07480 = 2.64578 \\
 &\qquad \underline{\underline{S \begin{pmatrix} 0.03273 \\ 2.64576 \end{pmatrix}}}
 \end{aligned}$$