

## Die Normalverteilung

Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** der Normalverteilung ist wie folgt definiert:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

und für die **Verteilungsfunktion** gilt folgendes:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-y^2/2} dy$$

Es gilt

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi(-u) = 1 - \Phi(u) \quad \text{und} \quad \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1$$

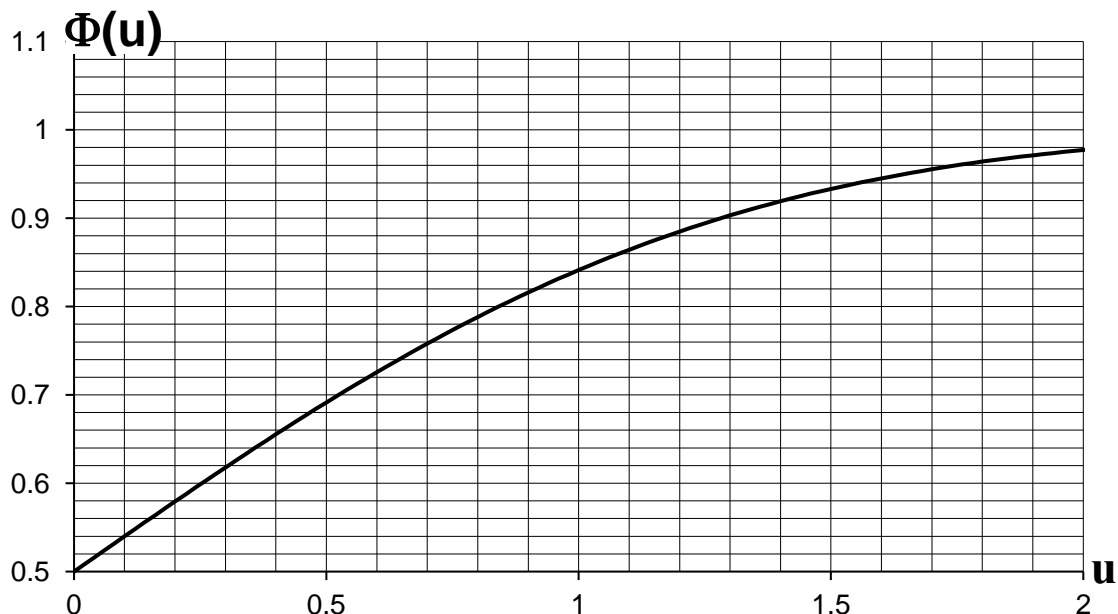
Aus Messwerten  $x$  mit einem Erwartungswert  $\mu$  und einer Standardabweichung  $\sigma$  erhält man die **standardisierte Zufallsvariable**  $u$  wie folgt:

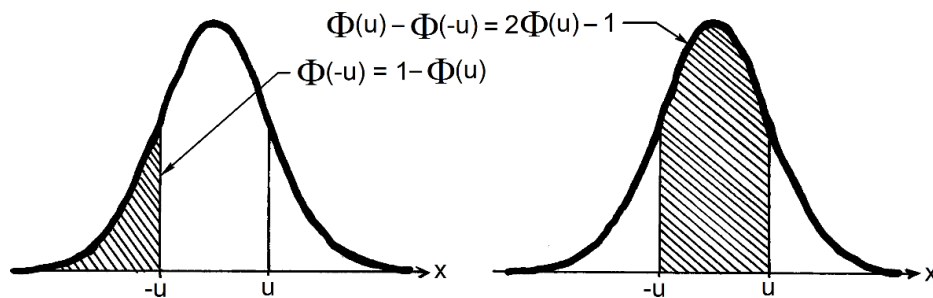
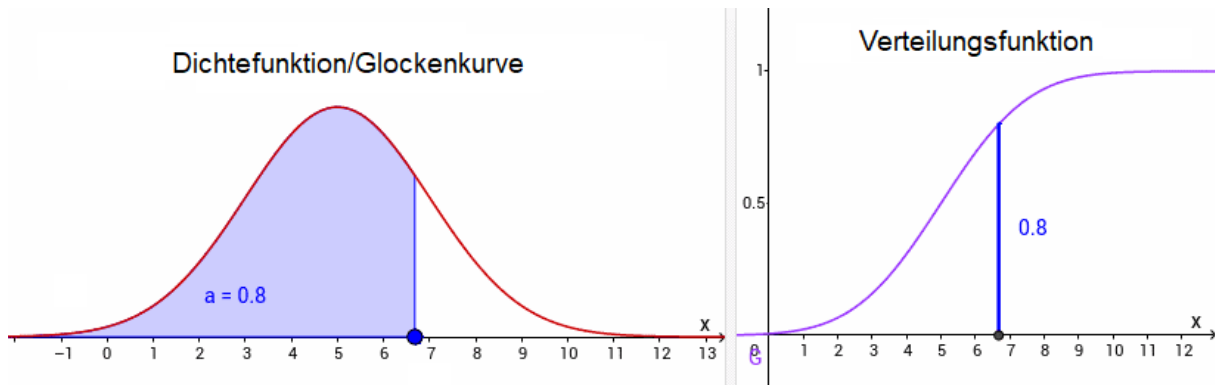
$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (\text{Standardisierung!})$$

$$x = u\sigma + \mu$$

Bei der Standardisierung wird eine beliebige Normalverteilung auf die Standardnormalverteilung abgebildet.

**Verteilungsfunktion** ( $\Phi(u)$ ):





### Parameter für Stichproben:

Erwartungswert  $\mu \rightarrow$  arithmetisches Mittel ( $\bar{x}$ ):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

Varianz  $\sigma^2 \rightarrow$  empirische Varianz ( $s^2$ ):

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n [x_j - \bar{x}]^2 = \frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) - n(\bar{x})^2 \right)$$

Standardabweichung  $\sigma \rightarrow$  empirische Standardabweichung (s):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n [x_j - \bar{x}]^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) - n(\bar{x})^2 \right)}$$

Berechnung von  $\mu$  und  $\sigma$ , wenn  $u_1$  und  $u_2$  (aus Prozenten) und  $x_1$  und  $x_2$  gegeben sind:

$$\sigma = \frac{x_1 - x_2}{u_1 - u_2} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{u_1 - u_2}$$

u	f(u)	$\Phi(u)$	u	f(u)	$\Phi(u)$	u	f(u)	$\Phi(u)$	u	f(u)	$\Phi(u)$
0.02	0.39886	0.50798	1.02	0.23713	0.84614	2.02	0.05186	0.97831	3.02	0.00417	0.99874
0.04	0.39862	0.51595	1.04	0.2323	0.85083	2.04	0.0498	0.97932	3.04	0.00393	0.99882
0.06	0.39822	0.52392	1.06	0.22747	0.85543	2.06	0.0478	0.9803	3.06	0.0037	0.99889
0.08	0.39767	0.53188	1.08	0.22265	0.85993	2.08	0.04586	0.98124	3.08	0.00348	0.99896
0.1	0.39695	0.53983	1.1	0.21785	0.86433	2.1	0.04398	0.98214	3.1	0.00327	0.99903
0.12	0.39608	0.54776	1.12	0.21307	0.86864	2.12	0.04217	0.983	3.12	0.00307	0.9991
0.14	0.39505	0.55567	1.14	0.20831	0.87286	2.14	0.04041	0.98382	3.14	0.00288	0.99916
0.16	0.39387	0.56356	1.16	0.20357	0.87698	2.16	0.03871	0.98461	3.16	0.00271	0.99921
0.18	0.39253	0.57142	1.18	0.19886	0.881	2.18	0.03706	0.98537	3.18	0.00254	0.99926
0.2	0.39104	0.57926	1.2	0.19419	0.88493	2.2	0.03547	0.9861	3.2	0.00238	0.99931
0.22	0.3894	0.58706	1.22	0.18954	0.88877	2.22	0.03394	0.98679	3.22	0.00224	0.99936
0.24	0.38762	0.59483	1.24	0.18494	0.89251	2.24	0.03246	0.98745	3.24	0.0021	0.9994
0.26	0.38568	0.60257	1.26	0.18037	0.89617	2.26	0.03103	0.98809	3.26	0.00196	0.99944
0.28	0.38361	0.61026	1.28	0.17585	0.89973	2.28	0.02965	0.9887	3.28	0.00184	0.99948
0.3	0.38139	0.61791	1.3	0.17137	0.9032	2.3	0.02833	0.98928	3.3	0.00172	0.99952
0.32	0.37903	0.62552	1.32	0.16694	0.90658	2.32	0.02705	0.98983	3.32	0.00161	0.99955
0.34	0.37654	0.63307	1.34	0.16256	0.90988	2.34	0.02582	0.99036	3.34	0.00151	0.99958
0.36	0.37391	0.64058	1.36	0.15822	0.91308	2.36	0.02463	0.99086	3.36	0.00141	0.99961
0.38	0.37115	0.64803	1.38	0.15395	0.91621	2.38	0.02349	0.99134	3.38	0.00132	0.99964
0.4	0.36827	0.65542	1.4	0.14973	0.91924	2.4	0.02239	0.9918	3.4	0.00123	0.99966
0.42	0.36526	0.66276	1.42	0.14556	0.9222	2.42	0.02134	0.99224	3.42	0.00115	0.99969
0.44	0.36213	0.67003	1.44	0.14146	0.92507	2.44	0.02033	0.99266	3.44	0.00107	0.99971
0.46	0.35889	0.67724	1.46	0.13742	0.92785	2.46	0.01936	0.99305	3.46	0.001	0.99973
0.48	0.35553	0.68439	1.48	0.13344	0.93056	2.48	0.01842	0.99343	3.48	0.00094	0.99975
0.5	0.35207	0.69146	1.5	0.12952	0.93319	2.5	0.01753	0.99379	3.5	0.00087	0.99977
0.52	0.34849	0.69847	1.52	0.12566	0.93574	2.52	0.01667	0.99413	3.52	0.00081	0.99978
0.54	0.34482	0.7054	1.54	0.12188	0.93822	2.54	0.01585	0.99446	3.54	0.00076	0.9998
0.56	0.34105	0.71226	1.56	0.11816	0.94062	2.56	0.01506	0.99477	3.56	0.00071	0.99981
0.58	0.33718	0.71904	1.58	0.1145	0.94295	2.58	0.01431	0.99506	3.58	0.00066	0.99983
0.6	0.33322	0.72575	1.6	0.11092	0.9452	2.6	0.01358	0.99534	3.6	0.00061	0.99984
0.62	0.32918	0.73237	1.62	0.10741	0.94738	2.62	0.01289	0.9956	3.62	0.00057	0.99985
0.64	0.32506	0.73891	1.64	0.10396	0.9495	2.64	0.01223	0.99585	3.64	0.00053	0.99986
0.66	0.32086	0.74537	1.66	0.10059	0.95154	2.66	0.0116	0.99609	3.66	0.00049	0.99987
0.68	0.31659	0.75175	1.68	0.09728	0.95352	2.68	0.011	0.99632	3.68	0.00046	0.99988
0.7	0.31225	0.75804	1.7	0.09405	0.95543	2.7	0.01042	0.99653	3.7	0.00042	0.99989
0.72	0.30785	0.76424	1.72	0.09089	0.95728	2.72	0.00987	0.99674	3.72	0.00039	0.9999
0.74	0.30339	0.77035	1.74	0.0878	0.95907	2.74	0.00935	0.99693	3.74	0.00037	0.99991
0.76	0.29887	0.77637	1.76	0.08478	0.9608	2.76	0.00885	0.99711	3.76	0.00034	0.99992
0.78	0.29431	0.7823	1.78	0.08183	0.96246	2.78	0.00837	0.99728	3.78	0.00031	0.99992
0.8	0.28969	0.78814	1.8	0.07895	0.96407	2.8	0.00792	0.99744	3.8	0.00029	0.99993
0.82	0.28504	0.79389	1.82	0.07614	0.96562	2.82	0.00748	0.9976	3.82	0.00027	0.99993
0.84	0.28034	0.79955	1.84	0.07341	0.96712	2.84	0.00707	0.99774	3.84	0.00025	0.99994
0.86	0.27562	0.80511	1.86	0.07074	0.96856	2.86	0.00668	0.99788	3.86	0.00023	0.99994
0.88	0.27086	0.81057	1.88	0.06814	0.96995	2.88	0.00631	0.99801	3.88	0.00021	0.99995
0.9	0.26609	0.81594	1.9	0.06562	0.97128	2.9	0.00595	0.99813	3.9	0.0002	0.99995
0.92	0.26129	0.82121	1.92	0.06316	0.97257	2.92	0.00562	0.99825	3.92	0.00018	0.99996
0.94	0.25647	0.82639	1.94	0.06077	0.97381	2.94	0.0053	0.99836	3.94	0.00017	0.99996
0.96	0.25164	0.83147	1.96	0.05844	0.975	2.96	0.00499	0.99846	3.96	0.00016	0.99996
0.98	0.24681	0.83646	1.98	0.05618	0.97615	2.98	0.0047	0.99856	3.98	0.00014	0.99997
1	0.24197	0.84134	2	0.05399	0.97725	3	0.00443	0.99865	4	0.00013	0.99997

$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u
0.5	0	0.6	0.25335	0.7	0.5244	0.8	0.84162	0.9	1.28155
0.502	0.00501	0.602	0.25853	0.702	0.53016	0.802	0.84879	0.902	1.29303
0.504	0.01003	0.604	0.26371	0.704	0.53594	0.804	0.856	0.904	1.30469
0.506	0.01504	0.606	0.26891	0.706	0.54174	0.806	0.86325	0.906	1.31652
0.508	0.02006	0.608	0.27411	0.708	0.54755	0.808	0.87055	0.908	1.32854
0.51	0.02507	0.61	0.27932	0.71	0.55339	0.81	0.8779	0.91	1.34076
0.512	0.03008	0.612	0.28454	0.712	0.55924	0.812	0.88529	0.912	1.35317
0.514	0.0351	0.614	0.28976	0.714	0.56511	0.814	0.89273	0.914	1.36581
0.516	0.04012	0.616	0.29499	0.716	0.571	0.816	0.90023	0.916	1.37866
0.518	0.04514	0.618	0.30023	0.718	0.57691	0.818	0.90777	0.918	1.39174
0.52	0.05015	0.62	0.30548	0.72	0.58284	0.82	0.91537	0.92	1.40507
0.522	0.05517	0.622	0.31074	0.722	0.58879	0.822	0.92301	0.922	1.41865
0.524	0.0602	0.624	0.316	0.724	0.59477	0.824	0.93072	0.924	1.4325
0.526	0.06522	0.626	0.32128	0.726	0.60076	0.826	0.93848	0.926	1.44663
0.528	0.07024	0.628	0.32656	0.728	0.60678	0.828	0.94629	0.928	1.46106
0.53	0.07527	0.63	0.33185	0.73	0.61281	0.83	0.95417	0.93	1.47579
0.532	0.0803	0.632	0.33716	0.732	0.61887	0.832	0.9621	0.932	1.49085
0.534	0.08533	0.634	0.34247	0.734	0.62496	0.834	0.97009	0.934	1.50626
0.536	0.09036	0.636	0.34779	0.736	0.63106	0.836	0.97815	0.936	1.52204
0.538	0.0954	0.638	0.35312	0.738	0.63719	0.838	0.98627	0.938	1.5382
0.54	0.10043	0.64	0.35846	0.74	0.64335	0.84	0.99446	0.94	1.55477
0.542	0.10547	0.642	0.36381	0.742	0.64952	0.842	1.00271	0.942	1.57179
0.544	0.11052	0.644	0.36917	0.744	0.65573	0.844	1.01103	0.944	1.58927
0.546	0.11556	0.646	0.37454	0.746	0.66195	0.846	1.01943	0.946	1.60725
0.548	0.12061	0.648	0.37993	0.748	0.66821	0.848	1.02789	0.948	1.62576
0.55	0.12566	0.65	0.38532	0.75	0.67449	0.85	1.03643	0.95	1.64485
0.552	0.13072	0.652	0.39073	0.752	0.6808	0.852	1.04505	0.952	1.66456
0.554	0.13577	0.654	0.39614	0.754	0.68713	0.854	1.05374	0.954	1.68494
0.556	0.14084	0.656	0.40157	0.756	0.69349	0.856	1.06252	0.956	1.70604
0.558	0.1459	0.658	0.40701	0.758	0.69988	0.858	1.07138	0.958	1.72793
0.56	0.15097	0.66	0.41246	0.76	0.7063	0.86	1.08032	0.96	1.75069
0.562	0.15604	0.662	0.41793	0.762	0.71275	0.862	1.08935	0.962	1.77438
0.564	0.16112	0.664	0.4234	0.764	0.71923	0.864	1.09847	0.964	1.79912
0.566	0.1662	0.666	0.42889	0.766	0.72574	0.866	1.10768	0.966	1.82501
0.568	0.17129	0.668	0.4344	0.768	0.73228	0.868	1.11699	0.968	1.85218
0.57	0.17638	0.67	0.43991	0.77	0.73885	0.87	1.12639	0.97	1.88079
0.572	0.18147	0.672	0.44544	0.772	0.74545	0.872	1.1359	0.972	1.91103
0.574	0.18657	0.674	0.45099	0.774	0.75209	0.874	1.14551	0.974	1.94313
0.576	0.19167	0.676	0.45654	0.776	0.75875	0.876	1.15522	0.976	1.97737
0.578	0.19678	0.678	0.46211	0.778	0.76546	0.878	1.16505	0.978	2.01409
0.58	0.20189	0.68	0.4677	0.78	0.77219	0.88	1.17499	0.98	2.05375
0.582	0.20701	0.682	0.4733	0.782	0.77897	0.882	1.18504	0.982	2.09693
0.584	0.21214	0.684	0.47891	0.784	0.78577	0.884	1.19522	0.984	2.14441
0.586	0.21727	0.686	0.48454	0.786	0.79262	0.886	1.20553	0.986	2.19729
0.588	0.2224	0.688	0.49019	0.788	0.7995	0.888	1.21596	0.988	2.25713
0.59	0.22755	0.69	0.49585	0.79	0.80642	0.89	1.22653	0.99	2.32635
0.592	0.23269	0.692	0.50153	0.792	0.81338	0.892	1.23723	0.992	2.40892
0.594	0.23785	0.694	0.50722	0.794	0.82038	0.894	1.24809	0.994	2.51215
0.596	0.24301	0.696	0.51293	0.796	0.82742	0.896	1.25908	0.996	2.65207
0.598	0.24817	0.698	0.51866	0.798	0.8345	0.898	1.27024	0.998	2.87817

**Aufgabe IS-NV-1:** Für eine Stichprobe aus einer normalverteilten Messgrösse wie folgt: {14,16,10,17,13,15,16,14,10,15} bestimme folgendes:

- a) Das arithmetische Mittel.
- b) Die Varianz
- c) Die Standardabweichung.

**Aufgabe IS-NV-2:** Für eine Stichprobe aus einer normalverteilten Messgrösse wie folgt: {13,17,12,15,14,16,15,18,17,13,15} bestimme folgendes:

- a) Das arithmetische Mittel.
- b) Die Varianz
- c) Die Standardabweichung.

**Aufgabe IS-NV-3:** Für welchen Wert  $u_0$  der standardisierten Zufallsvariablen  $u$  liegen

- a) 20% der Werte oberhalb von  $u_0$ ?
- b) 50% der Werte unterhalb von  $u_0$ ?
- c) 30% der Werte oberhalb von  $u_0$ ?
- d) 90% der Werte zwischen symmetrischen Schranken  $-u_0$  und  $u_0$ ?

**Aufgabe IS-NV-4:** Wie viel Prozent der Werte der standardisierten Zufallsvariablen liegen

- a) oberhalb  $u = 0$ ?
- b) unterhalb  $u = 0$ ?
- c) unterhalb von  $u = 1.5$ ?
- d) oberhalb von  $u = -1.5$ ?
- e) zwischen  $u = 1$  und  $u = 2$ ?
- f) zwischen  $u = -1$  und  $2$ ?
- g) zwischen  $u = -3$  und  $u = 3$

**Aufgabe IS-NV-5:** Wie viel Prozent der Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen

- a) unterhalb von  $x = \mu$ ?
- b) oberhalb von  $x = \mu$ ?
- c) unterhalb von  $\mu + \sigma$ ?
- d) oberhalb von  $\mu - \sigma$ ?
- e) zwischen  $\mu - 2\sigma$  und  $\mu + 2\sigma$ ?
- f) zwischen  $\mu - 3\sigma$  und  $\mu + 3\sigma$ ?

**Aufgabe IS-NV-6:** Max sagt zu Moritz „Ich bin ein cleveres Bürschchen. Nur 15% der Leute haben einen höheren IQ als ich“. Wie hoch ist der IQ von Max, wenn der IQ eine normalverteilte Zufallsgrösse mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 15$  ist?

**Aufgabe IS-NV-7:** Moritz sagt zu Max. „Mein IQ ist 125. Nur wenige Leute haben einen höheren IQ als ich“. Wie viel Prozent der Leute haben einen höheren IQ als Moritz, wenn der IQ eine normalverteilte Zufallsgrösse mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 15$  ist?

**Aufgabe IS-NV-8:** Wie viele Standardabweichungen dürfen Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen höchstens vom Erwartungswert abweichen, wenn 90% der Messwerte innerhalb symmetrischer Schranken vom Erwartungswert liegen sollen.

**Aufgabe IS-NV-9:** Die Füllmenge an Zucker von Tüten sei normalverteilt mit  $\mu = 1.012\text{kg}$  und  $\sigma = 0.007\text{kg}$ . Wie viel Prozent der Tüten sind „untergewichtig“, wenn auf der Beschriftung eine Füllmenge von 1.000kg angegeben ist?

**Aufgabe IS-NV-10:** Der Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen liegt bei 204. Wie gross ist die Standardabweichung, wenn 20% der Werte über 209 liegen?

<p><b>Aufgabe IS-NV-11:</b> Bei einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen 10% der Werte unterhalb von 502 und 20% der Werte liegen oberhalb von 532. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung dieser Zufallsvariablen.</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-12:</b> Eine Abmessung <math>d</math> eines Bauteils sei normalverteilt mit dem arithmetischen Mittel <math>\mu</math> und der Standardabweichung <math>\sigma</math>. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt <math>d</math> Werte an, die im Intervall <math>\mu - k\sigma \leq d \leq \mu + k\sigma</math>, wenn</p> <p>a) <math>k = 0.1?</math> <span style="margin-left: 150px;">d) <math>k = 1?</math></span>  b) <math>k = 0.2?</math> <span style="margin-left: 150px;">e) <math>k = 2?</math></span>  c) <math>k = 0.5?</math></p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-13:</b> Wie viele Standardabweichungen muss man vom Mittelwert einer normalverteilten Messgrösse nach links und rechts gehen, damit im Intervall <math>[\mu - n\sigma, \mu + n\sigma]</math> 95% der Messwerte liegen?</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-14:</b> Eine normalverteilte Messgrösse hat einen Mittelwert wie folgt: <math>\mu = 65</math> mm. Wie gross ist ihre Standardabweichung, wenn 10% der Messwerte grösser sind als 70 mm?</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-15:</b> Bei einer normalverteilten Grundgesamtheit liegen rund 10% der Werte um mehr als 3mm über dem Mittelwert von 750mm.</p> <p>a) Wie gross ist die Standardabweichung der Messgrösse?  b) In welchem Bereich liegen 90% der Messwerte? Die Schranken des gesuchten Bereichs sollen vom Erwartungswert gleich weit entfernt liegen.</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-16:</b> Bei einer normalverteilten Messgrösse sind 15% der Messwerte kleiner als 43 und 13% sind grösser als 47. Wie gross sind Mittelwert und Standardabweichung dieser Messgrösse?</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-17:</b> Bei einer normalverteilten Messgrösse liegen 14% der Messwerte um mehr als 2,5 mm über dem Mittelwert. Wie gross ist die Standardabweichung und die Varianz der Messwerte?</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-18:</b> Die Russpartikel in den Abgasen eines Explosionsmotors haben Durchmesser mit einem Mittelwert von 90 nm und einer Standardabweichung von 40 nm. Wie viele Prozent der Partikel haben Durchmesser, die kleiner sind als 10 nm? Diskutiere das Ergebnis!</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-19:</b> Eine Maschine fertigt Holzplatten. Die Länge der Holzplatten hat einen Erwartungswert von 1002mm mit einer Standardabweichung von 4mm. Wie viele Prozent der Holzplatten sind Ausschuss, wenn sie mindestens 999mm und höchstens 1006mm lang sein sollen?</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-20:</b> Schätze aus folgender Stichprobe einer normalverteilten Messgrösse: <math>\{15,12,14,17,13,16,14,13,17,13,15\}</math> den Bereich in welchem 95% der Messwerte liegen, wenn man annimmt, dass die Messwerte normalverteilt seien. Die Schranken des gesuchten Bereichs sollen vom Erwartungswert gleich weit entfernt liegen.</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-21:</b> Der IQ (Intelligenzquotient) sei normalverteilt mit einem Erwartungswert von 100 und einer Standardabweichung 15. Bestimme eine untere und eine obere Schranke mit gleichem Abstand vom Erwartungswert so, dass der IQ von 90% der Probanden im Bereich zwischen diesen Schranken liegt.</p>
<p><b>Aufgabe IS-NV-22:</b> Eine Stichprobe mit acht Elementen einer normalverteilten Grundgesamtheit ergab Messwerte wie folgt: 242, 236, 245, 237, 244, 246, 239, 247. Um wie viel sollte der Mittelwert der Stichprobe mindestens erhöht werden, damit weniger als 10% der Messwerte unterhalb von 250 liegen. [Es wird hier angenommen, dass eine Erhöhung des Mittelwerts die Standardabweichung nicht beeinflusst].</p>

**Aufgabe IS-NV-23:** Ein Bauteil einer Maschine wird durch Punktschweissen an dieser befestigt. Sämtliche Schweißpunkte lösen sich wenn eine kritische Zugkraft  $F$  auf die Bauteile wirkt. Diese kritische Zugkraft soll mindestens 400 N betragen. Welcher prozentuale Anteil der Verbindungen ist akzeptabel, wenn Stichproben ergeben haben, dass  $F$  normalverteilt mit einem Mittelwert von 480 N und einer Standardabweichung von 50 ist?

**Aufgabe IS-NV-24:** Bei der Herstellung von Kondensatoren mit einer Kapazität von  $5 \mu\text{F}$  sind die gemessenen Kapazitäten normalverteilt mit einem Mittelwert von  $5 \mu\text{F}$  und einer Standardabweichung von  $0,02 \mu\text{F}$ . Welcher Teil der Produktion ist Ausschuss, wenn die Kapazität

- mindestens  $4,98 \mu\text{F}$  betragen soll?
- höchstens  $5,05 \mu\text{F}$  betragen soll?
- mindestens  $4,98 \mu\text{F}$  und höchstens  $5,05 \mu\text{F}$  betragen soll?
- um weniger als  $0,03 \mu\text{F}$  vom Sollwert  $5 \mu\text{F}$  abweichen darf?

**Aufgabe IS-NV-25:** Eine Maschine füllt ein Pulver in Dosen. Die Abfüllmenge  $z$  ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 8 g. Auf welchen Mittelwert  $\mu$  muss man die Maschine einstellen, damit höchstens 5% aller Dosen weniger als 250 g Pulver enthalten?

**Aufgabe IS-NV-26:** Das Schlachtgewicht von Schweinen (eines bestimmten Alters) ist normalverteilt mit einem Mittelwert von 100 kg und einer Standardabweichung von 20 kg. Wie gross ist

- die Wahrscheinlichkeit, dass das Schlachtgewicht eines Schweins grösser ist als 120 kg?
- die Wahrscheinlichkeit, dass das Schlachtgewicht eines Schweins kleiner ist als 90 kg?
- das "Mindestgewicht", wenn der prozentuale Anteil untergewichtiger Schweine 5% beträgt?
- das "Höchstgewicht", wenn der prozentuale Anteil übergewichtiger Schweine 8% beträgt?

**Aufgabe IS-NV-27:** Eine Stichprobe von 11 Stahlkugeln für Kugellager ergab für deren Durchmesser  $d$  Messwerte (in  $\mu\text{m}$ ) wie folgt:  $\{1011,996,1041,1033,1023,1024,1035,1032,1047,1026,1018\}$ . Wie gross ist der Ausschuss in Prozent, wenn für die Durchmesser  $d$  folgendes gelten soll?  $990 \mu\text{m} \leq d \leq 1050 \mu\text{m}$ ?

**Aufgabe IS-NV-28:** Ein Hersteller von Isolierband soll Rollen mit 40 m Isolierband herstellen. Die Länge des aufgerollten Isolierbands sei normalverteilt. Wie gross darf die Standardabweichung der Rollen höchstens sein, wenn der Mittelwert 40 m betragen soll und 96% der Rollen nicht mehr als 20 cm vom Mittelwert abweichen dürfen?

**Aufgabe IS-NV-29:** Ein Futtermittelproduzent erhält von einem Abnehmer die Mitteilung, dass 4% der Säcke einer Lieferung von Kraftfutter untergewichtig und 3% übergewichtig seien. Der Produzent nimmt an, dass die Abfüllmengen normalverteilt seien. Wie gross sind Mittelwert und Standardabweichung der Normalverteilung, wenn der Sollwert für das Gewicht 50 kg beträgt und die Abweichung vom Sollwert nicht mehr als 2% betragen darf?

**Aufgabe IS-NV-30:** Die Durchmesser von Bolzen seien normalverteilt mit einer Standardabweichung von 0,5 mm. Bolzen mit einem Durchmesser von 21 mm müssen nachgearbeitet werden. Durch die Nacharbeit reduziert sich der Reinerlös für die betreffenden Bolzen um 15%. Bolzen mit einem Durchmesser von weniger als 19 mm sind unverkäuflich. Wie gross muss der Mittelwert für den Durchmesser der Bolzen gewählt werden, damit der zu erwartende Reinerlös pro Bolzen möglichst gross wird? Welcher prozentuale Anteil der Bolzen ist dann unverkäuflich und wie viele Prozent der Bolzen müssen nachgearbeitet werden?

**Aufgabe IS-NV-31:** Aus Frachtflugzeugen wird Ausrüstung für Bodentruppen abgeworfen. Die aus grosser Flughöhe abgeworfenen Pakete sind an je einem Fallschirm befestigt, der sich möglichst spät öffnen sollte um ein Abdriften im Wind zu vermeiden. Die Öffnung der Fallschirme wird durch Höhenmessgeräte ausgelöst. Öffnet sich der Fallschirm auf einer Höhe unterhalb von 50m über dem Erdboden, wird die Ausrüstung bei der Landung beschädigt oder gar zerstört. Auf welcher Höhe über dem Erdboden sollte die Öffnung der Fallschirme aktiviert werden, wenn die Messung der Flughöhe mit einer Standardabweichung von 30m behaftet ist und wenigstens 99% der Pakete unbeschädigt landen sollten?

## Lösungen:

<b>IS-NV-1:</b> a) Erwartungswert = 14, (b) $s^2 = 52/9 = 5.78$ , (c) $s = \sqrt{52/3} = 2.40$
<b>IS-NV-2:</b> a) Erwartungswert = 15, (b) $s^2 = 3.6$ , (c) $s = \sqrt{3.6} = 1.90$
<b>IS-NV-3:</b> a) $u_0 = 0.8416$ , (b) $u_0 = 0$ , (c) $u_0 = 0.5244$ , (d) $u_0 = 1.6449$
<b>IS-NV-4:</b> a) 50%, (b) 50%, (c) 93.32%, (d) 93.32%, (e) $\Phi(2) - \Phi(1) = 0.97725 - 0.84134 = 0.1359 \rightarrow 13.6\%$ , (f) $\Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.97725 + 0.84134 - 1 = 0.81859 \rightarrow 81.9\%$ , (g) $2 \cdot \Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0.99865 - 1 = 0.9973 \rightarrow 99.7\%$
<b>IS-NV-5:</b> a) 50%, (b) 50%, (c) $u = 1 \rightarrow \Phi(1) = 0.84134 \rightarrow 84.1\%$ , (d) $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866 \rightarrow 15.9\%$ , (e) $2 \cdot \Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.97725 - 1 = 0.9545 \rightarrow 95.5\%$ , (f) $2 \cdot \Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0.99865 - 1 = 0.9973 \rightarrow 99.7\%$
<b>IS-NV-6:</b> 85% $\rightarrow u = 1.03643 \rightarrow x = 1.03643 \cdot 15 + 100 = 115.5 \approx 116$
<b>IS-NV-7:</b> $u = (125 - 100)/15 = 1.667$ , $\Phi(1.667) \approx 0.952 \rightarrow 1 - 0.952 = 0.048 \rightarrow 4.8\%$
<b>IS-NV-8:</b> $\Phi(u) = 0.95 \rightarrow u = 1.645$ . Antwort: Die Schranken liegen 1.645 Standardabweichungen vom Erwartungswert entfernt.
<b>IS-NV-9:</b> $u = (1 - 1.012)/0.007 = -1.71$ , $\Phi(-1.71) = 1 - \Phi(1.71) = 1 - 0.956 = 0.044 \rightarrow 4.4\%$
<b>IS-NV-10:</b> $\mu = 204$ , $\Phi(u) = 0.8 \rightarrow u = 0.84162 = (x - 204)/\sigma = (209 - 204)/\sigma = 5/\sigma \rightarrow \sigma = 5/0.84162 = 5.9$
<b>IS-NV-11:</b> 10% $\rightarrow \Phi(-u_1) = 0.9 \rightarrow u_1 = -1.28155$ , 80% $\rightarrow \Phi(u_2) = 0.8 \rightarrow u_2 = 0.84162$ , $x_1 = 502$ und $x_2 = 532 \rightarrow \sigma = (x_1 - x_2)/(u_1 - u_2) = -30/(-2.12317) = 14.1$ , $\mu = (u_1 \cdot x_2 - u_2 \cdot x_1)/(u_1 - u_2) = 520.1$
<b>IS-NV-12:</b> a) $P = 2 \Phi(0.1) - 1 = 0.0797$ . (b) $P = 2 \Phi(0.2) - 1 = 0.1585$ . (c) $P = 2 \Phi(0.5) - 1 = 0.3829$ . (d) $P = 2 \Phi(1) - 1 = 0.6827$ . (e) $P = 2 \Phi(2) - 1 = 0.9545$ .
<b>IS-NV-13:</b> $n = 1.96$ .
<b>IS-NV-14:</b> $\Phi(1.28155) = 0.9 \rightarrow \sigma = (70 - 65)/1.28155 = 3.902$ .



<b>IS-NV-15:</b> a) $\Phi(u) = 0.9 \rightarrow u = 1.28155 \rightarrow 1.28155 \cdot \sigma = 3 \rightarrow \sigma = 3/1.28155 = 2.34$ , (b) $\Phi(u) = 0.95 \rightarrow u = 1.64485 \rightarrow 1.64485 \cdot 2.34 = 3.85 \rightarrow$ im Bereich zwischen $(750 - 3.85)$ mm und $(750 + 3.85)$ mm
<b>IS-NV-16:</b> $(47 - \mu)/\sigma = 1.126$ und $(43 - \mu)/\sigma = -1.036 \rightarrow \mu = 44.92$ und $\sigma = 1.849$ .
<b>IS-NV-17:</b> $\Phi(u) = 0.86 \rightarrow u = 1.08032 = 2.5/s \rightarrow \sigma = 2.5/1.08032 = 2.31, \sigma^2 = 2.31^2 = 5.36$
<b>IS-NV-18:</b> $u = (10 - 90)/40 = -2 \rightarrow \Phi(u) = 1 - 0.97725 \rightarrow 2.275\%$ . Für kleine Durchmesser weicht die tatsächliche Verteilung der Teilchengrößen stark von einer Normalverteilung ab.
<b>IS-NV-19:</b> $u_1 = -0.75$ und $u_2 = 1, \Phi(1) - \Phi(-0.75) = \Phi(1) + \Phi(0.75) - 1 = 0.841 + 0.773 - 1 = 0.614 \rightarrow 61.4\%$
<b>IS-NV-20:</b> Erwartungswert $= \mu = 14.45454, \sigma = 1.6949, \Phi(u) = 0.975 \rightarrow u = 1.96, \mu - 1.96\sigma = 11.13, \mu + 1.96\sigma = 17.78 \rightarrow 11.13 \leq x \leq 17.78$ .
<b>IS-NV-21:</b> $\Phi(u) = 0.95 \rightarrow u = 1.64485 \rightarrow \mu - 1.64485\sigma = 100 - 1.64485 \cdot 15 = 124.67, \mu + 1.64485\sigma = 100 + 1.64485 \cdot 15 = 75.33 \rightarrow 75 < IQ < 125$
<b>IS-NV-22:</b> Erwartungswert $= \mu = 242, \sigma = 4.2088, \Phi(-u) = 0.9 \rightarrow u = -1.28155 = (250 - \mu_{\text{new}})/\sigma \rightarrow \mu_{\text{new}} = 250 + 1.28155\sigma = 255.4$
<b>IS-NV-23:</b> $u = (400 - 480)/50 = -1.6. \Phi(-1.6) = 1 - \Phi(1.6) = 0.0548 \rightarrow$ ungef. 5.5%.
<b>IS-NV-24:</b> a) $\Phi = \Phi(-1) = 0,1587$ . (b) $\Phi = 1 - \Phi(2,5) = 0,0062$ . (c) $\Phi = \Phi(-1) + 1 - \Phi(2,5) = 0,1649$ . (d) $\Phi = 2 \Phi(-1,5) = 2 [1 - \Phi(1,5)] = 0,1336$ .
<b>IS-NV-25:</b> $P = 0,05$ : Es ist $\Phi(-1,645) \approx 0,05 \rightarrow -1,645 \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow \mu = 250\text{g} + 1,64485 \cdot \sigma = 263,16\text{ g}$ .
<b>IS-NV-26:</b> a) $u = (120 - 100)/20 = 1 \rightarrow \Phi(1) = 0.84134 \rightarrow 15.9\%$ , (b) $u = (90 - 100)/20 = -0.5, \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69146 = 0.309 \rightarrow 30.9\%$ , (c) $\Phi(-u_1) = 0.95 \rightarrow u_1 = -1.64485 \rightarrow x_1 = \mu - 1.64485\sigma = 100 - 1.64485 \cdot 20 = 67.1$ , (d) $\Phi(u_2) = 0.92 \rightarrow u_2 = 1.40507 \rightarrow x_2 = \mu + 1.40507\sigma = 100 + 1.40507 \cdot 20 = 128$
<b>IS-NV-27:</b> $\mu = 1026, \sigma = 14.262 \rightarrow u_1 = -2.524$ und $u_2 = 1.682 \rightarrow \Phi(1.682) - \Phi(-2.524) = \Phi(2.524) + \Phi(1.682) - 1 = 0.994199 + 0.953716 = 0.947915 \rightarrow 5.21\%$ Ausschuss.
<b>IS-NV-28:</b> $\Phi = 0,98$ für Rollen, die nicht zu lang sind. $\Phi(2.054) \approx 0.98 \rightarrow \frac{40,2 - 40}{\sigma} \geq 2.054 \rightarrow \sigma \leq 9.74\text{ cm}$ .
<b>IS-NV-29:</b> Aus der zweiten Tabelle $x_1 = -1.75069 = \frac{49 - \mu}{\sigma}$ und $x_2 = 1,88079 = \frac{51 - \mu}{\sigma} \rightarrow \mu = 49,964\text{ kg}$ und $\sigma = 551\text{ g}$ .
<b>IS-NV-30:</b> Der Reinerlös eines einwandfreien Bolzens sei $c$ . Für den durchschnittlichen Erlös $\bar{c}$ gilt dann folgendes: $\bar{c} = c [\Phi((\mu - 19\text{ mm})/\sigma) - 0,15 \Phi((\mu - 21\text{ mm})/\sigma)]$ und $d\bar{c}/d\mu = c [0,15 \exp(-(\mu - 19\text{ mm})^2/2\sigma^2) - \exp(-(\mu - 21\text{ mm})^2/2\sigma^2)]/\sqrt{2\pi}\sigma = 0 \rightarrow \mu = 20,24\text{ mm}$ ; 10,2% der Bolzen müssen nachgearbeitet werden und 1,96% der Bolzen sind unverkäuflich.

$$\text{IS-NV-31: } x_1 = 50, \Phi(-u_1) = 0.99 \rightarrow u_1 = -2.32635 = (x_1 - \mu)/\sigma \rightarrow \mu = x_1 + 2.32635\sigma = 50 + 2.32635 \cdot 30 = 120$$