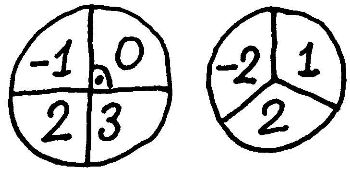
Musterprüfung 3-IT4

Themen:
- Kombinatorik
- Wahrscheinlichkeit

1.) Max wirft einen Würfel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
a) ist die Augenzahl gleich 6?
b) ist die Augenzahl grösser als 2?

2.) Ich werfe zwei Würfel gleichzeitig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Produkt der Augenzahlen der Würfel grösser als 19?

3.) Max und Moritz drehen in einem Einkaufszentrum zwei Glücksräder. (Siehe dazu nebenstehende Skizze). Sie gewinnen wenn die Summe der Zahlen auf den Glücksrädern grösser als null ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen sie das Spiel?



4.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt eine Person ein Spiel „Schere, Stein, Papier" und mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ergebnis unentschieden? Es gilt
- Schere schneidet Papier
- Papier wickelt Stein ein
- Stein schleift Schere?

5.) In einer Urne befinden sich zwei rote und drei weisse Kugel. Der Urne werden nacheinander
a) mit Zurücklegen
b) ohne Zurücklegen
drei Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die gezogenen Kugeln gleichfarbig?

6.) In einer Urne befinden sich zwei rote, drei blaue und fünf schwarze Kugeln. Der Urne werden
a) mit Zurücklegen
b) ohne Zurücklegen
zwei Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die gezogenen Kugeln gleichfarbig?

7.) Herr Wüthrich wohnt im 3. Stock eines Wohnblocks mit vier Stockwerken (Erdgeschoss, 1. Stock, 2. Stock, 3. Stock, 4. Stock). Im Erdgeschoss steigt er in den Lift. Zwei weitere Personen befinden sich im Lift. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt Herr Wüthrich ohne Zwischenhalt zum 3. Stockwerk, wenn die andern zwei Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit von 1/4 in einem der vier Stockwerke aussteigen werden?

Musterlösungen

1.a) $P = \underline{\underline{1/6}}$, (b) $P = 4/6 = \underline{\underline{2/3}}$

2.)

Würfel A	Würfel B 1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

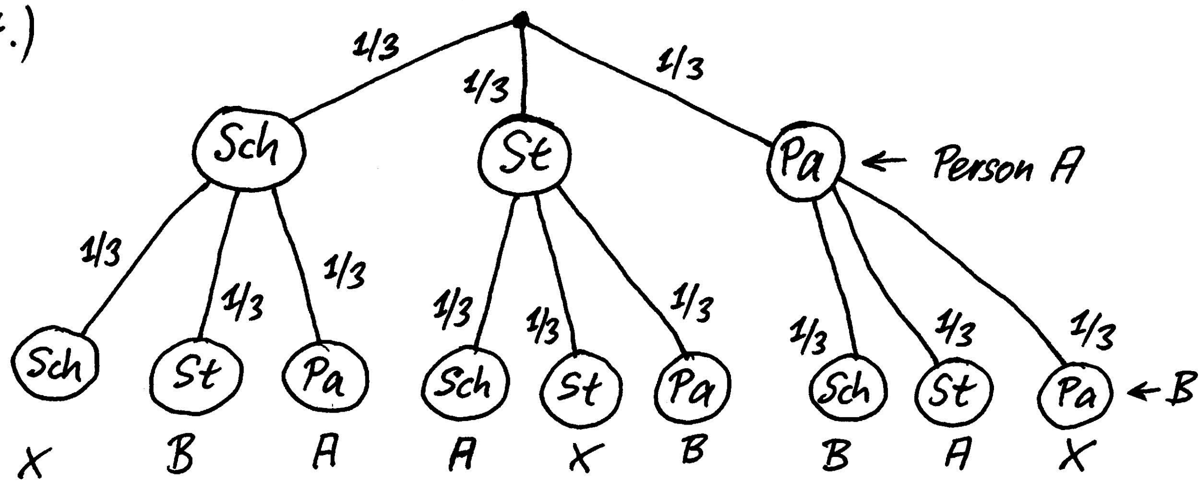
$P = 8/36 = \underline{\underline{2/9}}$

3.)

2. Glücksrad	1. Glücksrad: −1	0	2	3
1	0	1	3	4
2	1	2	4	5
−2	−3	−2	0	1

$$P = \frac{8}{12} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

4.)



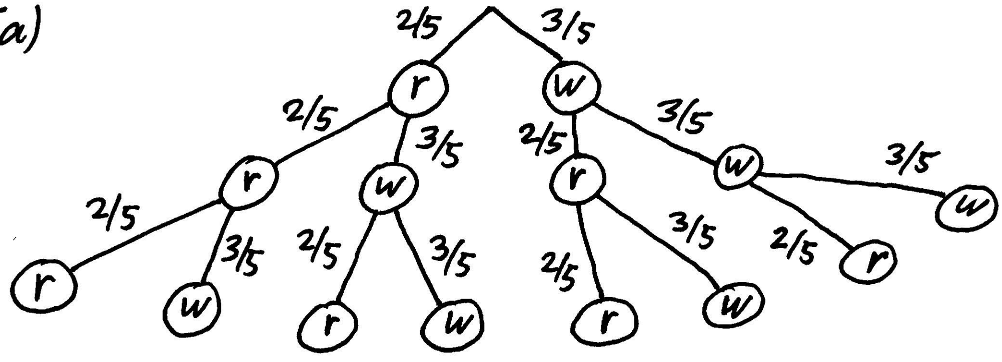
$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(X) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

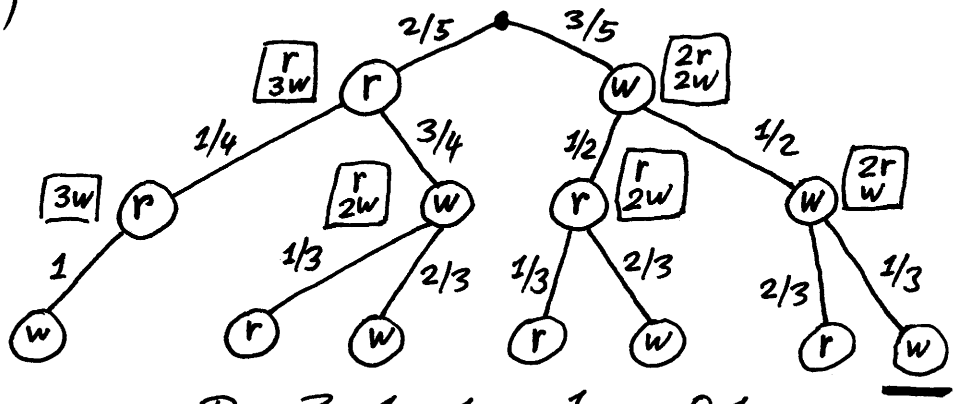
<u>Antwort</u>: Eine Person (Person A od. Person B) gewinnt das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 ist das Ergebnis „unentschieden".

5a)



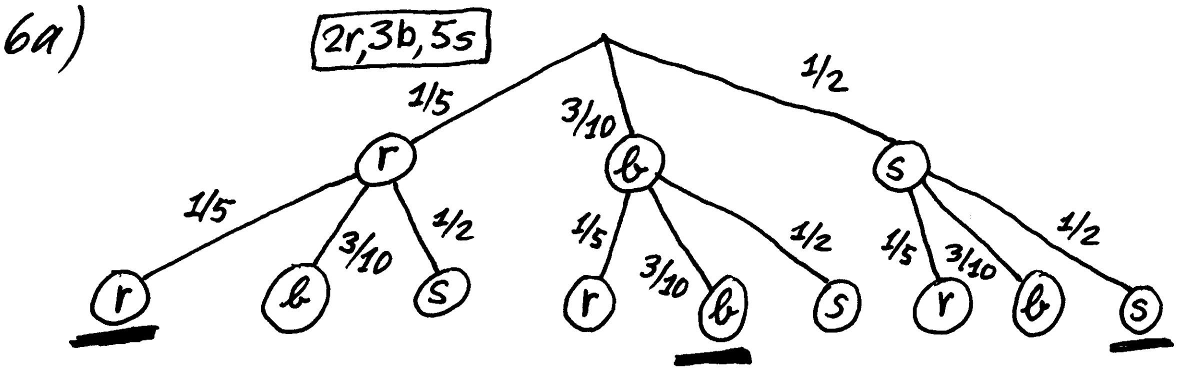
$$P = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{35}{125} = \underline{\underline{\frac{7}{25}}}$$

b)



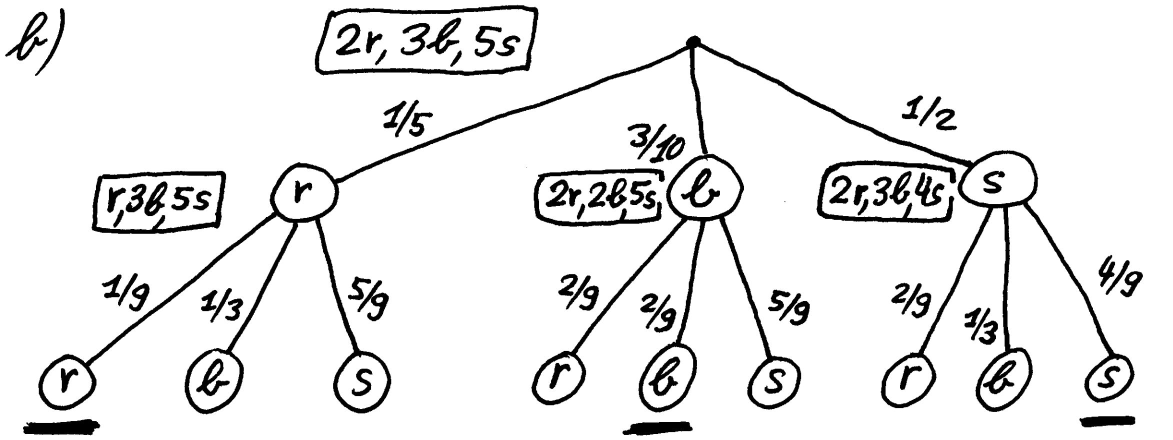
$$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} = 0.1$$

6a)



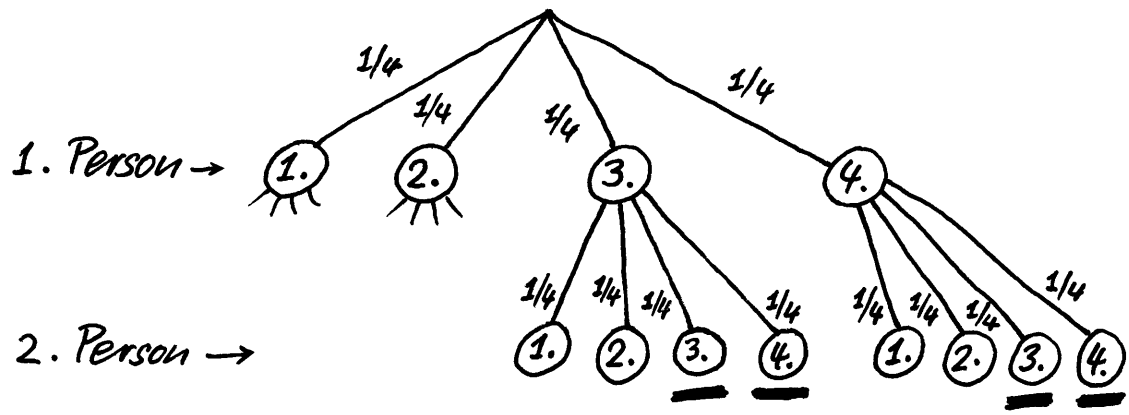
$$P = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{50} = 0.38$$

b)



$$P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{45} + \frac{1}{15} + \frac{2}{9} = \frac{14}{45} = 0.3111$$

7.) Reduzierter Wahrscheinlichkeitsbaum:



$$P = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{1/4}} = \underline{\underline{0.25}}$$

↑ Anz. Pfade

Anhang: Aufgaben der Zentralen Aufnahmeprüfung (ZAP) für BMS und IMS

Aufgabe 1: ZAP BMS 2015 (neues Lehrmittel, 3. Sek)

9. Andrea trifft beim Basketball bei 60% ihrer Freiwürfe.
   a) Sie wirft nun dreimal auf den Korb. Zeichnen Sie dazu einen Wahrscheinlichkeitsbaum und tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei den Ästen ein.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie dreimal hintereinander treffen wird.
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie von drei Würfen nur einmal treffen wird.
   d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei 10 Würfen kein einziges Mal trifft.

Aufgabe 2: ZAP BMS 2016 (neues Lehrmittel, 3. Sek)

11. In einer Urne befinden sich 3 rote, 5 schwarze und 2 blaue Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent für das jeweilige zufällige Ereignis.

    a) Es wird einmal gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel blau ist?

    b) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel blau ist und die zweite schwarz?

    c) Es wird zweimal **ohne** Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot ist und die zweite schwarz?

    Genauigkeit: 1 Dezimale

Aufgabe 3: ZAP IMS (Prüfung Okt. 2013), 3. Sek

6. In einer Urne liegen drei Kugeln mit den Ziffern 1, 2 und 3. Max zieht eine Kugel und legt die gezogene Kugel in die Urne zurück. Anschliessend zieht Vreni eine Kugel aus der Urne.

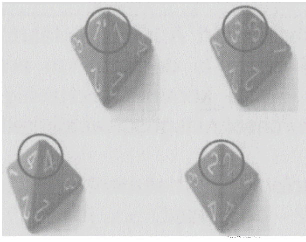
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Kugel mit der Ziffer 1 genau einmal gezogen?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Kugel mit der Ziffer 2 mindestens einmal gezogen?

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht Vreni eine höhere Zahl als Max?

Aufgabe 4: ZAP BMS 2017 (neues Lehrmittel, 3. Sek)

9. Ein Tetraeder mit den Zahlen 1 bis 4 und ein Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 werden geworfen. Anschliessend addiert man die gewürfelten Zahlen.



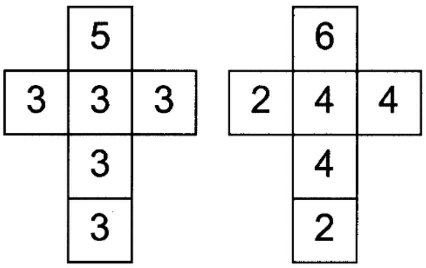
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Zahlen kleiner als 5 ist.

b) Nun werden Tetraeder und Würfel mehrere Male geworfen und die gewürfelten Zahlen wie bisher jeweils addiert. Dabei wird die Summe 7 insgesamt 183-mal geworfen. Wurde eher 900-mal, 1100-mal, 1300-mal oder 1500-mal gewürfelt? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung.

Aufgabe 5: ZAP IMS (Prüfung Okt. 2014), 3. Sek

6. Daniela und Michelle machen ein Würfelspiel.
Zuerst würfelt Daniela mit dem Würfel A, danach Michelle mit dem Würfel B.
Unten siehst du die Abwicklungen der beiden Würfel.

Würfel A Würfel B



a) Stelle das Spiel mittels eines Wahrscheinlichkeitsbaumes oder mittels einer Tabelle dar.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Daniela eine 3 und Michelle eine 2 oder eine 6 würfelt?

c) Es gewinnt diejenige, welche die höhere Augenzahl wirft. Wie gross ist die Gewinnwahrscheinlichkeit von Michelle?

Aufgabe 6: ZAP IMS (Prüfung Okt. 2015), 3. Sek

8. Eine Firma betreibt zwei Verkaufsfilialen. In der Filiale A arbeiten 4 Frauen und 6 Männer, in der Filiale B 5 Frauen und 2 Männer. Jede Filiale bestimmt durch das Los eine Sprecherin oder einen Sprecher für die Personalvertretung der Firma. Michael arbeitet in der Filiale A, sein Kollege Sandro in der Filiale B.

   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Michael und Sandro als Sprecher gewählt werden?

   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau und ein Mann gewählt werden?

   c) x Männer aus Filiale A haben kein Interesse Sprecher zu werden und nehmen nicht am Losentscheid teil. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Frauen als Sprecherinnen gewählt werden, beträgt dann $\frac{5}{14}$.
   Wie gross ist x?

Aufgabe 7: IMS (Prüfung Okt. 2016), 3. Sek

9. In einer Klasse wurden bei einer Prüfung folgende Noten erreicht:

Schüler:	Anna	Bertram	Claudia	Dieter	Doris	Erich	Fritz	Gabi
Geschlecht:	w	m	w	m	w	m	m	w
Note:	5.5	4	3.5	4.5	6	4.5	3	4
Schüler:	Gustav	Hartmut	Hugo	Inge	Isabel	Judith	Karl	Markus
Geschlecht:	m	m	m	w	w	w	m	m
Note:	4	5	6	4	3.5	5	5.5	4.5

   a) Wenn man zufällig jemanden aus der Klasse auswählt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Mädchen?

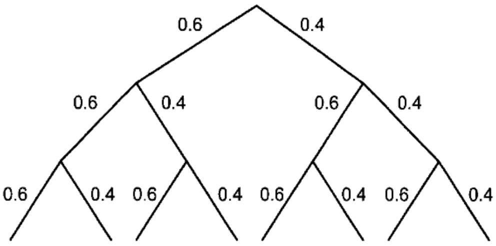
   b) Berechne den Zentralwert (auch Median genannt) und das arithmetische Mittel dieser Noten jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

   c) Weitere 5 Schülerinnen und Schüler der Klasse konnten die Prüfung zunächst nicht schreiben und legen eine Nachprüfung ab.
   Das Gesamtmittel aller 21 Prüflinge beträgt 4.29.
   Berechne das arithmetische Mittel nur für die Nachprüfung, ebenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Musterlösungen:

Aufgabe 1: ZAP BMS 2015 (neues Lehrmittel, 3. Sek)

9. a)



b) $0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.216 \rightarrow 21.6\%$

c) Es sind drei Fälle möglich: $3 \cdot (0.6 \cdot 0.4^2) = 3 \cdot 0.096 = 0.288 \rightarrow 28.8\%$

d) $0.4^{10} = 0.000105 \rightarrow 0.0105\%$

Aufgabe 2: ZAP BMS 2016 (neues Lehrmittel, 3. Sek)

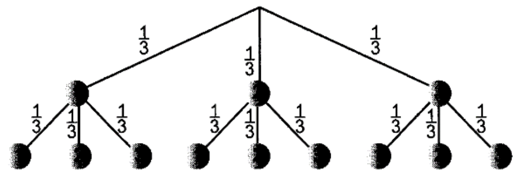
11. a) $P_{blau} = \frac{2}{3+5+2} = 20\%$

b) $P_{blau,schwarz} = P_{blau} \cdot \frac{5}{3+5+2} = 20\% \cdot \frac{1}{2} = 0.2 \cdot \frac{1}{2} = 10\%$

c) $P_{rot,schwarz} = \frac{3}{3+5+2} \cdot \frac{5}{2+5+2} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{6} = 16.7\%$

Aufgabe 3: ZAP IMS (Prüfung Okt. 2013)

6. Wahrscheinlichkeitsbaum



a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ b) $1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ oder $5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$

Aufgabe 4: ZAP BMS 2017 (neues Lehrmittel, 3. Sek)

9. a)

W1/W2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Wahrscheinlichkeit P (Summe kleiner als 5): $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

b) Wahrscheinlichkeit P (Summe gleich 7): $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

Wie oft wurde gewürfelt? $6 \cdot 183 = 1098$
Es wurde am ehesten 1100 mal gewürfelt.

Aufgabe 5: ZAP IMS (Prüfung Okt. 2014), 3. Sek

6. a) Wahrscheinlichkeitsbaum:

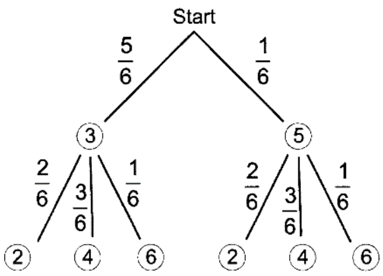


Tabelle:

D(A) / M(B)	3	3	3	3	3	5
2	x	x	x	x	x	x
2	x	x	x	x	x	x
4	o	o	o	o	o	x
4	o	o	o	o	o	x
4	o	o	o	o	o	x
6	o	o	o	o	o	o

b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ oder 41.7%

c) Daniela zuerst 3, Michelle anschliessend 4: $(3,4) \rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{15}{36}$

Daniela zuerst 3, Michelle anschliessend 6: $(3,6) \rightarrow \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

Daniela zuerst 5, Michelle anschliessend 6: $(5,6) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Michelle gewinnt, ist:

$\frac{15}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ oder 58.3%.

Aufgabe 6: ZAP IMS (Prüfung Okt. 2015), 3. Sek

8. a) Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{70}\approx\underline{\underline{1.43\%}}=\underline{\underline{0.0143}}$

b) Wahrscheinlichkeit: $\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{7}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{7}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35}\approx\underline{\underline{54.29\%}}=\underline{\underline{0.5429}}$

c) Wahrscheinlichkeit: $p\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{14}\rightarrow p=\frac{5}{14}:\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 7}{14\cdot 5}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$

Das heisst, dass nur noch 8 Personen in Filiale A sein dürfen, also haben 2 Männer nicht teilgenommen. x = 2.

Aufgabe 7: IMS (Prüfung Okt. 2016), 3. Sek

9. a) Anzahl Personen: 16, davon 7 Mädchen und 9 Knaben.

Wahrscheinlichkeit, ein Mädchen zu ziehen: $P=\frac{7}{16}=\underline{0.4375}\rightarrow 43.75\%$

b) Noten: 3, 3.5, 3.5, 4, 4, 4, 4, <u>4.5</u>, 4.5, 4.5, 5, 5, 5.5, 5.5, 6, 6

Median: 4.5

Arithmetisches Mittel:

$(3+3.5+3.5+4+4+4+4+4.5+4.5+4.5+5+5+5.5+5.5+6+6):16$

$=4.53125\approx 4.53$

c) Notensumme: $21\cdot 4.29=90.09$

Vorherige Notensumme: 72.5

Differenz: 17.59

Arithmetisches Mittel für die Nachprüfungen: $17.59:5=3.518\approx 3.52$

Das Geburtstagsproblem

1.) Eine Schulklasse mit 19 Schülern und Schülerinnen veranstaltet an jedem Geburtstag von einem Mitglied eine kleine Geburtstagsfeier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens zwei Klassenmitgliedern der Geburtstag zusammenfällt? (Schaltjahre werden nicht berücksichtigt).

2.) Bei einer kleinen Datenbank wird die Speicheradresse mit einer 8-Bit-Hashfunktion berechnet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei 19 Einträgen, dass die Hashfunktion für mindestens zwei Einträge dieselbe Speicheradresse errechnet?

Musterlösungen:

1.) $$P = 1 - \frac{\cancel{365} \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361 \cdot \ldots \cdot 347}{\cancel{365} \cdot 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}$$
$$= 1 - 0.6209 = \underline{\underline{0.379}}$$

2.) $$P = 1 - \frac{\cancel{256} \cdot 255 \cdot 254 \cdot 253 \cdot \ldots \cdot 238}{\cancel{256} \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot \ldots \cdot 256}$$
$$= 1 - 0.50426 = \underline{\underline{0.496}}$$