Musterprüfung 4-IT4

Themen:
A. Der Differenzenquotient
B. Das Differential. Einführung in die Infinitesimalrechnung
C. Addition von Punkten auf einer elliptischen Kurve

A.1) Bestimme den Differenzenquotient für die Funktion $y=x^3-2x^2$ für die gegebenen Werte von x_1 und x_2.

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\Delta y/\Delta x$
a)	1	2			
b)	1	1.5			
c)	1	1.2			
d)	1	1.1			
e)	1	1.05			
f)	1	1.01			

A.2) Berechne den Differenzenquotient von

a) $f(x)=x^2-3$ für $x_1=0$ und $x_2=3$

b) $f(x)=x^5-3x^3-x$ für $x_1=-1/2$ und $x_2=1$

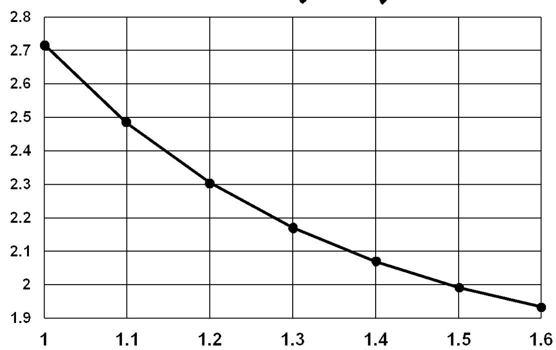
c) $f(x)=\sqrt{x}$ für $x_1=4$ und $x_2=6.25$

d) $f(x)=(x+3)/(x-2)$ für $x_1=3$ und $x_2=4$

A.3)

x	$y = e^x/x^2$
1	2.718
1.1	2.483
1.2	2.306
1.3	2.171
1.4	2.069
1.5	1.992
1.6	1.935

Berechne für Intervalle der Breite 0.1 den Differenzenquotienten der Funktion $y = e^x/x^2$ mithilfe nebenstehender Wertetabelle. Wo liegt die Stelle an welcher der Graph der Funktion die Steigung -1 hat?



B.1) Bestimme die Ableitungsfunktion von

a) $y = x^2$

b) $y = 2x^2 - 3x$

c) $y = 3x^2 - 4x + 5$

B.2) Berechne den Scheitelpunkt (Extremum) von

a) $y = x^2 - 6x$

b) $y = 2x^2 - 8x + 11$

B.3) An welcher Stelle ($x = ?$) ist die Steigung des Graphen von $y = x^2 - 3x$ gleich 5?

B.4) In welchem Punkt auf dem Graphen von $y = 2x^2 - 8x$ ist die Steigung gleich -4?

B.5) Vergleiche den Differenzenquotienten von $y = x^2$ für $x_1 = 2$ und $x_2 = 2.01$ mit der Ableitung (von $y = x^2$) an der Stelle $x = 2$.

C.1) Berechne die Punkte auf der „Bitcoin-Kurve"
$k: y^2 = x^3 + 7$

a) $A\begin{pmatrix}-2\\ ?\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1.9\\ ?\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1.5\\ ?\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\ ?\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}3\\ ?\end{pmatrix}$

b) $F\begin{pmatrix}?\\ 0\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}?\\ -1\end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix}?\\ 2\end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix}?\\ -2\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}?\\ 3\end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix}?\\ 5\end{pmatrix}$

alle Lösungen!

Stelle die berechneten Punkte auf einem Koordinatensysem dar und versuche die Kurve zu skizzieren.

C.2) Addiere die Punkte P und Q auf der „Bitcoin-Kurve"
$k: y^2 = x^3 + 7$, wenn

a) $P\begin{pmatrix}-1.8\\ 1.08074\end{pmatrix}$ und $Q\begin{pmatrix}2\\ 3.87298\end{pmatrix}$

b) $P\begin{pmatrix}-1.5\\ 1.90394\end{pmatrix}$ und $Q\begin{pmatrix}1\\ 2.82843\end{pmatrix}$

c) $P\begin{pmatrix}-1\\ -2.44949\end{pmatrix}$ und $Q\begin{pmatrix}0\\ 2.64575\end{pmatrix}$

C.3) Multipliziere den Punkt P auf der „Bitcoin-Kurve"
$k: y^2 = x^3 + 7$ mit dem Faktor n, wenn

a) $P\begin{pmatrix}2.08008\\ -4\end{pmatrix}$ und $n = 2$

b) $P\begin{pmatrix}1.25992\\ 3\end{pmatrix}$ und $n = 3$

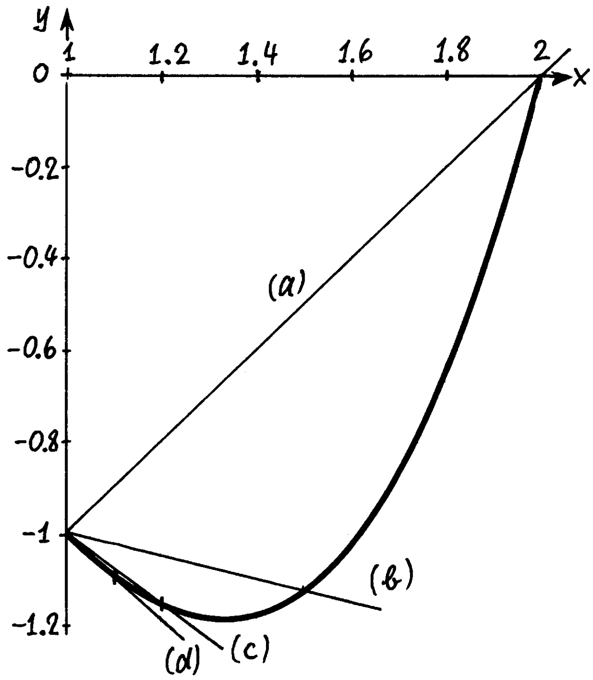
c) $P\begin{pmatrix}3\\ -5.83095\end{pmatrix}$ und $n = 4$

C.4) Multipliziere die Summe der Punkte $P\begin{pmatrix}1.5\\ -3.22102\end{pmatrix}$ und $Q\begin{pmatrix}-1.2\\ 2.29608\end{pmatrix}$ auf der „Bitcoin-Kurve"
$k: y^2 = x^3 + 7$ mit dem Faktor 2.

Musterlösungen

A.1)

	x_1	x_2	y_1	y_2	$\Delta y/\Delta x$
a)	1	2	-1	0	1
b)	1	1.5	-1	-1.125	-0.25
c)	1	1.2	-1	-1.152	-0.76
d)	1	1.1	-1	-1.089	-0.89
e)	1	1.05	-1	-1.0474	-0.9475
f)	1	1.01	-1	-1.0099	-0.9899



A.2a) $y_1 = 0 - 3 = -3$ und $y_2 = 3^2 - 3 = 6 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (6-(-3))/(3-0) = 9/3 = \underline{\underline{3}}$

b) $y_1 = (-1/2)^5 - 3\cdot(-1/2)^3 - (-1/2) = 0.84375$ und $y_2 = 1-3-1 = -3 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (-3-0.84375)/(1-(-1/2)) = \underline{\underline{-2.5625}}$

c) $y(4) = \sqrt{4} = 2$ und $y(6.25) = \sqrt{6.25} = 2.5 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (2.5-2)/(6.25-4) = \underline{\underline{2/9 = 0.2222}}$

d) $y_2 = (4+3)/(4-2) = 7/2 = 3.5$ und $y_1 = (3+3)/(3-2) = 6 \rightarrow \Delta y/\Delta x = (3.5-6)/(4-3) = \underline{\underline{-5/2}}$

A.3)

x	y	$\Delta y/\Delta x$
1	2.718	
		$(2.483-2.718)/0.1=-2.35$
1.1	2.483	
		$(2.306-2.483)/0.1=-1.77$
1.2	2.306	
		$(2.171-2.306)/0.1=-1.35$
1.3	2.171	
		$(2.069-2.171)/0.1=-1.02 \leftarrow$!!!
1.4	2.069	
		$(1.992-2.069)/0.1=-0.77$
1.5	1.992	
		$(1.935-1.992)/0.1=\underline{\underline{-0.57}}$
1.6	1.935	

Antw.: Der Graph der Funktion hat die Steigung −1 im Intervall $1.3 \leq x \leq 1.4$

B.1a)

a	b	c
1	0	0

$y' = 2ax + b = \underline{\underline{2x}}$

b)

a	b	c
2	−3	0

$y' = 2ax + b = \underline{\underline{4x-3}}$

c)

a	b	c
3	−4	5

$y' = 2ax + b = \underline{\underline{6x-4}}$

B.2a)

a	b	c
2	−6	0

$y' = 2ax + b = 4x - 6 = 0 \xrightarrow{+6}$

$4x = 6 \xrightarrow{:4} x = 3/2$

$y = x^2 - 6x = 9/4 - 6 \cdot 3/2 = -27/4$

$\underline{\underline{S\begin{pmatrix}1.5\\-6.75\end{pmatrix}}}$

b)

a	b	c
2	−8	11

$y' = 2ax + b = 4x - 8 = 0 \xrightarrow{+8}$

$4x = 8 \xrightarrow{:4} x = 2$

$y = 2x^2 - 8x + 11 = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 11 = 3$

$\underline{\underline{S\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}}$

B.3)

a	b	c
1	−3	0

$y' = 2x - 3 = 5 \xrightarrow{+3} 2x = 8 \xrightarrow{:2} \underline{\underline{x=4}}$

B.4)

a	b	c
2	-8	0

$y' = 4x - 8 = -4 \xrightarrow{+8} 4x = 4 \rightarrow x = 1$

$y = 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = -6 \rightarrow P\binom{1}{-6}$

B.5) $y_1 = 2^2 = 4$, $y_2 = 2.01^2 = 4.0401 \rightarrow \Delta y / \Delta x$

$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4.0401 - 4}{2.01 - 2} = \frac{0.0401}{0.01} = \underline{\underline{4.01}}$

$y' = 2ax + b \xrightarrow[b=0]{a=1} y' = 2x \rightarrow y'(2) = 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$

__Vergleich:__ Der Differenzenquotient im Intervall $2 \leq x \leq 2.01$ und die Ableitung an der Stelle $x = 2$ sind fast gleich.

C.1a) $y = \pm\sqrt{x^3 + 7}$

A: keine Lösung weil $\sqrt{(-2)^3 + 7} = \sqrt{-1}$

B: $\pm\sqrt{(-1.9)^3 + 7} = \pm 0.3754$

$\underline{\underline{B_1\binom{-1.9}{0.3754}}}$ und $\underline{\underline{B_2\binom{-1.9}{-0.3754}}}$

C: $\pm\sqrt{(-1.5)^3 + 7} = \pm 1.9039$

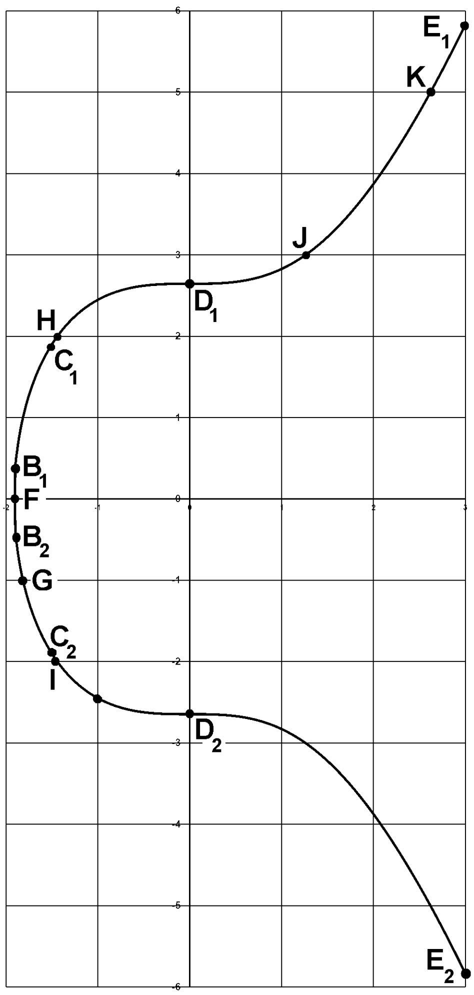
$\underline{\underline{C_1\binom{-1.5}{1.9039} \text{ und } C_2\binom{-1.5}{-1.9039}}}$

D: $\pm\sqrt{0 + 7} = \pm\sqrt{7} = \pm 2.6458$

$\underline{\underline{D_1\binom{0}{2.6458} \text{ und } D_2\binom{0}{-2.6458}}}$

E: $\pm\sqrt{3^3 + 7} = \pm\sqrt{34} = \pm 5.8310$

$E_1\binom{3}{5.8310}$ und $E_2\binom{3}{-5.8310}$



b) $x = \sqrt[3]{y^2-7}$ $\quad \sqrt[3]{-7} \quad \sqrt[3]{-6} \quad \sqrt[3]{-3} \quad \sqrt[3]{-3}$

$$\underline{\underline{F\begin{pmatrix}-1.9129\\0\end{pmatrix}}},\ \underline{\underline{G\begin{pmatrix}-1.8171\\-1\end{pmatrix}}},\ \underline{\underline{H\begin{pmatrix}-1.4422\\2\end{pmatrix}}},\ \underline{\underline{I\begin{pmatrix}-1.4422\\-2\end{pmatrix}}},$$

$$\underline{\underline{J\begin{pmatrix}1.2599\\3\end{pmatrix}}},\ \underline{\underline{K\begin{pmatrix}2.6207\\5\end{pmatrix}}}$$

$\sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[3]{18}$

C.2a) $m = \dfrac{3.87298 - 1.08074}{2-(-1.8)} = 0.7348$

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q = 0.7348^2 - (-1.8) = 0.3399$$

$$y_R = m(x_Q - x_R) - y_Q = 0.7348(2 - 0.3399) - 3.87298 = -2.6532$$

$$\underline{\underline{R\begin{pmatrix}0.3399\\-2.6532\end{pmatrix}}}$$

b) $m = \dfrac{2.82843 - 1.90394}{1-(-1.5)} = 0.36980$

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q = 0.3698^2 - (-1.5) - 1 = 0.63675$$

$$y_R = m(x_Q - x_R) - y_Q = 0.3698(1 - 0.63675) - 2.82843 = -2.6941$$

$$\underline{\underline{R\begin{pmatrix}0.6367\\-2.6941\end{pmatrix}}}$$

c) $m = \dfrac{2.64575 - (-2.44949)}{0-(-1)} = 5.09524$

$$x_R = m^2 - x_P - x_Q = 5.09524^2 - (-1) - 0 = 26.9615$$

$$y_R = m(x_Q - x_R) - y_Q = 5.09524(0 - 26.9615) - 2.64575 = -140.0211$$

$$\underline{\underline{R\begin{pmatrix}26.9615\\-140.0211\end{pmatrix}}}$$

C.3a) $m = \frac{3x_P^2 + a}{2y_P} = \frac{3x_P^2}{2y_P} \quad (a=0)$

$m = \frac{3 \cdot 2.08008^2}{2 \cdot (-4)} = -1.62252$

$x_R = m^2 - 2x_P = (-1.62252)^2 - 2 \cdot 2.08008$

$x_R = -1.52756$

$y_R = m \cdot (x_P - x_R) - y_P = -1.62252 \cdot (2.08008 - (-1.52756)) - (-4) = -1.85350$

$\underline{\underline{R\begin{pmatrix} -1.5276 \\ -1.8535 \end{pmatrix}}}$

b) Zuerst „P + P"

$m = 3x_P^2/(2y_P) = 3 \cdot 1.25992^2/(2 \cdot 3) = 0.7937$

$x_R = m^2 - 2x_P = -1.88988$

$y_R = m \cdot (x_P - x_R) - y_P = 0.7937(1.25992 - (-1.88988)) - 3 = -0.5$

$R\begin{pmatrix} -1.88988 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

$P + P \rightarrow R, \quad P + R \rightarrow S$

$P\begin{pmatrix} 1.25992 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R\begin{pmatrix} -1.88988 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

$m = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{-0.5 - 3}{-1.88988 - 1.25992} = 1.11118$

$x_S = m^2 - x_P - x_R = 1.11118^2 - 1.25992 - (-1.88988) = 1.86468$

$y_S = m \cdot (x_R - x_S) - y_R = 1.11118 \cdot (-1.88988 - 1.86468) - (-0.5) = -3.672$

$\underline{\underline{S\begin{pmatrix} 1.86468 \\ -3.672 \end{pmatrix}}}$

c) $m = 3x_P^2/(2y_P) = 3\cdot 3^2/(2\cdot(-5.83095)) = -2.31523$

$x_R = m^2 - 2x_P = (-2.31523)^2 - 2\cdot 3 = -0.63970$

$y_R = m(x_P - x_R) - y_P = -2.31523\cdot(3-(-0.63970))$
$-(-5.83095) = -2.59581$

$P + P \rightarrow R\ ,\ R + R \rightarrow S$

$m = 3x_R^2/(2y_R) = 3\cdot(-0.63970)^2/(2\cdot(-2.59581))$
$= -0.23647$

$x_S = m^2 - 2x_R = (-0.23647)^2 - 2\cdot(-0.63970)$
$= 1.33533$

$y_S = m(x_R - x_S) - y_R = -0.23647(-0.63970 -$
$1.33533) - (-2.59581) = 3.06285$

$$4P \rightarrow \underline{\underline{S\begin{pmatrix}1.3353\\3.0628\end{pmatrix}}}$$

C.4) $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{2.29608-(-3.22102)}{-1.2-1.5} = -2.04337$

$x_R = m^2 - x_P - x_Q = (-2.04337)^2 - 1.5 - (-1.2)$
$= 3.87536$

$y_R = m\cdot(x_P - x_R) - y_P = -2.04337\cdot(1.5-3.87536)$
$-(-3.22102) = 8.07480$

$R\begin{pmatrix}3.87538\\8.07480\end{pmatrix}$

$R + R \rightarrow S$

$m = 3x_R^2/(2y_R) = 3\cdot 3.87538^2/(2\cdot 8.07480)$
$= 2.78989$

$x_S = m_2 - 2x_R = 2.78989^2 - 2\cdot 3.87538 = 0.032726$

$y_S = m\cdot(x_R - x_S) - y_R = 2.78989\cdot(3.87538 -$
$0.032726) - 8.07480 = 2.64578$

$$\underline{\underline{S\begin{pmatrix}0.03273\\2.64576\end{pmatrix}}}$$