

MusterprüfungLineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

- Themen:
- Determinanten (A)
 - Cramersche Regel (B)
 - Lösungsmenge (C)
 - Beispiele (D)
 - Gleichungssysteme mit Parametern (E)
 - Textgleichungen (F)

A.1) Berechne die Determinanten

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & a \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} a & 2b \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 3a & 4 \\ 2a & 5 \end{vmatrix} \quad f) \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

A.2) Es sei $D = \begin{vmatrix} 5a-1 & 4 \\ 2a+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Bestimme a .

B.1) Berechne die Systemdeterminante von

$$a) \begin{vmatrix} x+3y=3 \\ 2x-y=-1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 2x+ay=5 \\ 3x-5y=9 \end{vmatrix}$$

B.2) Berechne die Determinanten D , D_x und D_y von

$$a) \begin{vmatrix} 2x+7y=17 \\ 5x+3y=-1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 5x+3y=23 \\ 2x+4y=12 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} x-2y=-4 \\ 3x+y=9 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} x+2y=16 \\ 2y=10-x \end{vmatrix}$$

C.1) Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem

$$a) \begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 9x + 15y = 10 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$$

D.1) Bestimme die Lösungsmenge von

$$a) \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + 5y = -7 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 3y = -15 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 5x + 4y = 11 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

E.1) Bestimme die Lösung von

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 4a + 9 \\ 4x + y = 9a + 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 13a - 4b \\ 3x - 2y = 7b \end{cases}$$

E.2) Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3x - 4y = a \\ a^2x - 3y = 7 \end{cases}$$

keine Lösung?

F.1) Die Zahl y ist um 3 kleiner als das Doppelte der Zahl x . Das Doppelte der Zahl y ist um 2 kleiner als das Dreifache der Zahl x . Bestimme x und y .

F.2) Addiert man zum Zähler und zum Nenner eines Bruchs 2, so erhält man den gekürzten Bruch $9/10$. Subtrahiert man stattdessen vom Zähler und vom

Nenner 3, so erhält man den gekürzten Bruch $\frac{4}{5}$.
Bestimme den Bruch.

F.3) Die Summe von Zähler und Nenner eines Bruchs beträgt 12. Wenn man den Nenner um 1 vergrössert, so erhält man den gekürzten Bruch $\frac{7}{6}$.
Bestimme den Bruch.

F.4) Die Summe zweier Zahlen beträgt 80. Die grössere Zahl ist um 12 grösser als das Dreifache der kleineren Zahl. Bestimme die beiden Zahlen.

F.5) Das Verhältnis der Anzahl Kühe von Bauer A und Bauer B ist jetzt 2:3. Wenn Bauer A von Bauer B eine Kuh kauft erhöht sich das Verhältnis zu 3:4. Bestimme die Anzahl Kühe der beiden Bauern vor dem Verkauf.

Musterlösungen

$$A.1a) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = \underline{\underline{17}}$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 = \underline{\underline{22}}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & a \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-2) \cdot a = \underline{\underline{2a}}$$

$$d) \begin{vmatrix} 3a & 4 \\ 2a & 5 \end{vmatrix} = 3a \cdot 5 - 2a \cdot 4 = \underline{\underline{7a}}$$

$$e) \begin{vmatrix} a & 2b \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot a - (-3) \cdot 2b = \underline{\underline{7a + 6b}}$$

$$f) \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-5) = \underline{\underline{7}}$$

$$A.2) D = \begin{vmatrix} 5a-1 & 4 \\ 2a+1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (5a-1) - 4 \cdot (2a+1) = 15a-3 \\ -8a-4 = 7a-7 = 0 \rightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

$$B.1a) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = \underline{\underline{-7}}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot a = \underline{\underline{-10-3a}}$$

$$B.2a) \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = 6 - 35 = \underline{\underline{-29}}$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 20 - 6 = \underline{\underline{14}}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 1 + 6 = \underline{\underline{7}}$$

$$d) \begin{vmatrix} x+2y=16 \\ 2y=10-x \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x+2y=16 \\ x+2y=10 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$C.1a) D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) = 9 + 8 = 17 \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{\text{eine Lösung!}}}$$

$$b) D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 - 9 \cdot 5 = 45 - 45 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 4 \cdot 15 - 5 \cdot 10 = 60 - 50 = 10 \neq 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 9 \cdot 4 = 30 - 36 = -6 \neq 0$$

$\rightarrow \underline{\underline{\text{keine Lösung!!!}}}$

$$c) D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 6 \cdot (-2) = -12 + 12 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-3) - 9 \cdot (-2) = -18 + 18 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 = 36 - 36 = 0$$

$D = D_x = D_y = 0 \rightarrow \underline{\underline{\text{unendlich viele Lösungen!!!}}}$

$$D. 1a) D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) = 9 + 8 = 17$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 12 \cdot (-4) = 51$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 1 = 34$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{51}{17} = \underline{\underline{3}} \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{34}{17} = \underline{\underline{2}}$$

$$b) D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 15 - 6 = 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -15 & 3 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = (-15) \cdot 3 - 12 \cdot 3 = -45 - 36 = -81$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 5 \cdot 12 - 2 \cdot (-15) = 60 + 30 = 90$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-81}{9} = \underline{\underline{-9}} \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{90}{9} = \underline{\underline{10}}$$

$$c) D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 = -3 - 10 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} = (-7) \cdot (-3) - 12 \cdot 5 = -39$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 - 2 \cdot (-7) = 26$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = \underline{\underline{3}} \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{-13} = \underline{\underline{-2}}$$

$$E. 1a) D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = 3 + 8 = 11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4a+9 & -2 \\ 9a+1 & 1 \end{vmatrix} = 4a+9 + 2 \cdot (9a+1) = 22a+11$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4a+9 \\ 4 & 9a+1 \end{vmatrix} = 3(9a+1) - 4 \cdot (4a+9) = 11a - 33$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{22a+11}{11} = \underline{\underline{2a+1}} \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{11a-33}{11} = \underline{\underline{a-3}}$$

$$b) D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 13a-4b & 3 \\ 7b & -2 \end{vmatrix} = (-2)(13a-4b) - 3 \cdot 7b = -26a - 13b$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 13a-4b \\ 3 & 7b \end{vmatrix} = 14b - 3 \cdot (13a - 4b) = 26b - 39a$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-26a - 13b}{-13} = \underline{\underline{2a+b}} \wedge y = \frac{-39a + 26b}{-13} = \underline{\underline{3a-2b}}$$

$$E.2) D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ a^2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - a^2 \cdot (-4) = -9 + 4a^2 = 0 \xrightarrow{+9}$$

$$4a^2 = 9 \xrightarrow{:4} a^2 = 9/4 \rightarrow a = \pm \sqrt{9/4} = \underline{\underline{\pm 3/2}}$$

$$F.1) y = 2x - 3, 2y = 3x - 2 \quad \left| \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 3x - 2y = 2 \end{array} \right|$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -4 + 3 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = -6 + 2 = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{-1} = \underline{\underline{4}} \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5}{-1} = \underline{\underline{5}}$$

$$F.2) \frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{10} \wedge \frac{x-3}{y-3} = \frac{4}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10(x+2) = 9(y+2) \\ 10x+20 = 9y+18 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5(x-3) = 4(y-3) \\ 5x-15 = 4y-12 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10x-9y = -2 \\ 5x-4y = 3 \end{array} \right\}$$

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -9 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-4) - 5 \cdot (-9) = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & -9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) - 3 \cdot (-9) = 35$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) = 40$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{35}{5} = 7 \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{40}{5} = 8 \rightarrow \text{Bruch} = \frac{x}{y} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

$$F.3) \left. \begin{array}{l} x+y=12 \\ \frac{x}{y+1} = \frac{7}{6} \rightarrow 6x=7y+7 \end{array} \right\} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x+y=12 \\ 6x-7y=7 \end{array} \right|$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 6 \cdot 1 = -13$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-7) - 7 \cdot 1 = -91$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 6 \cdot 12 = -65$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-91}{-13} = 7 \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{-65}{-13} = 5 \rightarrow \text{Bruch} = \frac{x}{y} = \underline{\underline{\frac{7}{5}}}$$

$$F.4) \begin{cases} x+y=80 \\ y=3x+12 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x+y=80 \\ 3x-y=-12 \end{array} \right|$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 80 & 1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = 80 \cdot (-1) - 1 \cdot (-12) = -68$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 80 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12) - 3 \cdot 80 = -252$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-68}{-4} = \underline{\underline{17}} \wedge y = \frac{D_y}{D} = \frac{-252}{-4} = \underline{\underline{63}}$$

$$F.5) a:b = 2:3 \rightarrow 3a = 2b$$

$$(a+1):(b-1) = 3:4 \rightarrow 4 \cdot (a+1) = 3 \cdot (b-1)$$

$$4a+4 = 3b-3$$

$$\left| \begin{array}{l} 3a - 2b = 0 \\ 4a - 3b = -7 \end{array} \right| \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2) = -1$$

$$D_a = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 0 - (-7) \cdot (-2) = -14$$

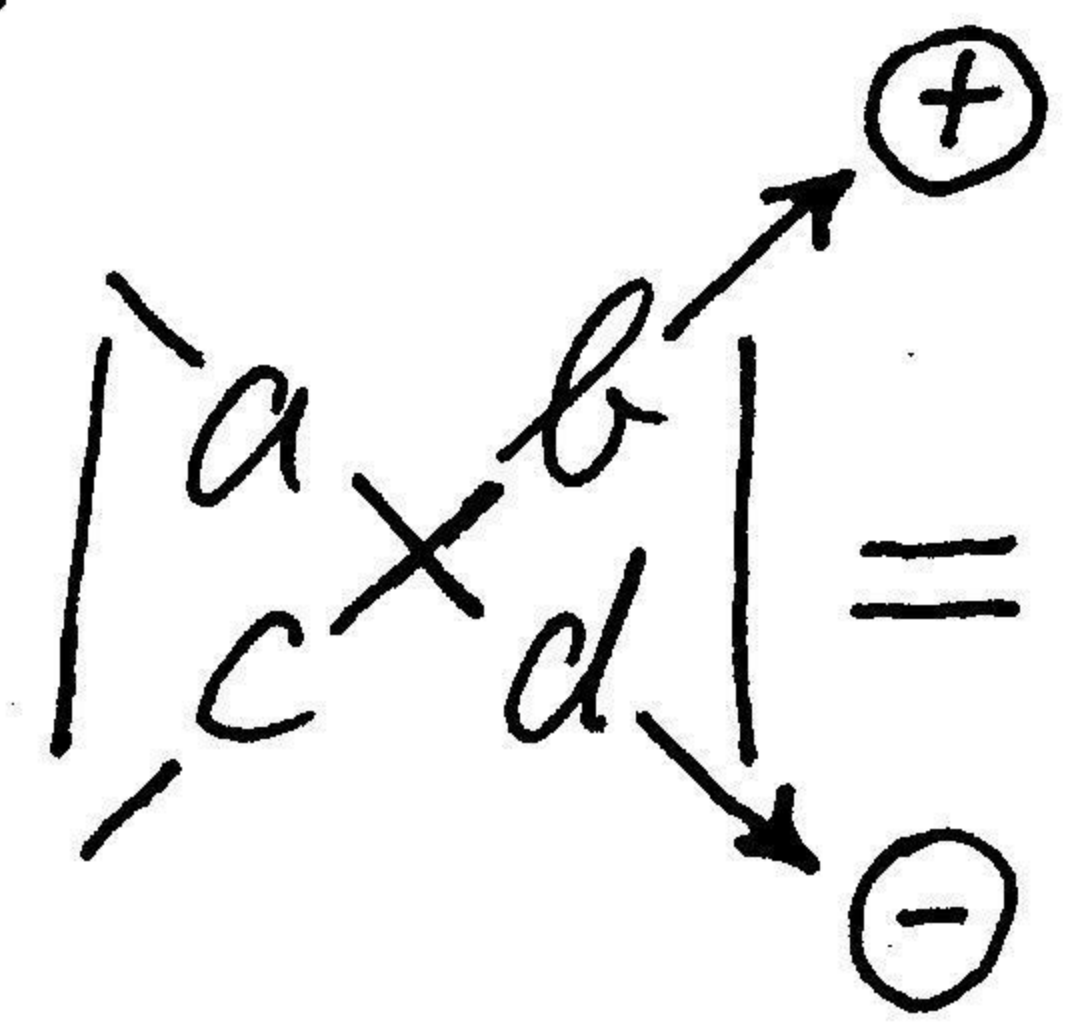
$$D_b = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) - 0 = -21$$

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-14}{-1} = \underline{\underline{14}} \wedge b = \frac{D_b}{D} = \frac{-21}{-1} = \underline{\underline{21}}$$

Antwort: Bauer A hatte 14 Kühe
 " B " 21 Kühe

Formeln

2x2-Determinante: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$



Systemdeterminante:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \rightarrow D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Cramersche Regel:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{de - bf}{ad - bc}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = de - bf \quad \wedge \quad D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce$$

Lösungsmenge:

- $D \neq 0 \rightarrow$ eine Lösung
- $D = 0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0) \rightarrow$ keine Lösung
- $D = D_x = D_y = 0 \rightarrow$ unendlich viele Lösungen