Rechenoperationen mit Matrizen

Themen:
A. Skalarmultiplikation
B. Addition und Subtraktion
C. Spalten oder Zeilen addieren oder subtrahieren
D. Matrizen multiplizieren
E. Inverse Matrix
F. Determinanten

A.1) Berechne

a) $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $(-5) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $8 \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 0 & 3/8 \end{pmatrix}$

A.2) Berechne die mit Fragezeichen gekennzeichneten Matrixelemente $\begin{pmatrix} 5 & -20 \\ ? & 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} ? & ? \\ 2 & ? \end{pmatrix}$

B.1) Berechne

a) $3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -2 \end{pmatrix}$ f) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

k) $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

B.2) Es sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Berechne $\underline{A} + \underline{B}$

b) Berechne $\underline{B} + \underline{A}$

c) Gilt das Kommutativgesetz wie folgt:
$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$? Kommentiere

C.1) Addiere Zeilen (Z1, Z2, Z3, Z4) oder Spalten in untenstehender Matrix gemäss unten stehenden Anweisungen und notiere die umgeformte Matrix.

$$\begin{array}{c} \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \\ Z4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S1 & S2 & S3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) $Z1_{neu} \leftarrow Z1 - 3 \cdot Z2$
$Z2_{neu} \leftarrow Z2$
$Z3_{neu} \leftarrow Z3 - 4 \cdot Z2$
$Z4_{neu} \leftarrow Z4 - 5 \cdot Z2$

b) $S1_{neu} \leftarrow S1 + 3 \cdot S2$
$S2_{neu} \leftarrow S2$
$S3_{neu} \leftarrow S3 + 5 \cdot S2$

D.1) Berechne

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D.2) Was stellt man bei den Multiplikationen in D.1i und D.1j fest? Erkläre!

D.3) Es sei

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $\underline{A} \cdot \underline{B}$ und $\underline{B} \cdot \underline{A}$

b) Gilt für Matrixmultiplikation das Kommutativgesetz? Erkläre!

D.4) Es sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Berechne $\underline{B} + \underline{C} = \underline{F}$

b) Berechne $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{D}$

c) Berechne $\underline{A} \cdot \underline{C} = \underline{E}$

d) Berechne $\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} = \underline{D} + \underline{E}$

e) Berechne $\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{F}$

f) Legen die Berechnungen nahe, dass das Distributivgesetz gilt wie folgt: $\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} = \underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C})$?

D.5) Es sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Berechne $\underline{A}^T \cdot \underline{A}$

b) Berechne $\underline{A} \cdot \underline{A}^T$

E.1) Es sei

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & -7 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berechne $\underline{A} \cdot \underline{B}$ und $\underline{B} \cdot \underline{A}$. Kommentiere das Ergebnis!

F.1) Berechne $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$,

$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, $D_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ und $D_6 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Musterlösungen

A.1a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5/2 & -15 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

A.2) $\begin{pmatrix} 5 & -20 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

B.1a) Keine Lösung

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -13 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 6 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

B.2a) $\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\underline{B} + \underline{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) Für die Matrizenaddition gilt das Kommutativgesetz.

C.1a)
$$\begin{array}{c|c|c} 3-3 & -1+6 & 5-0 \\ & & \\ 4-4 & -3+8 & 2-0 \\ 5-5 & 1+10 & -3-0 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{array}{c|c|} 3-3=0 & 5-5=0 \\ 1-6=-5 & 0-10=-10 \\ 4-9=-5 & 2-15=-13 \\ 5+3=8 & -3+5=2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & -10 \\ -5 & -3 & -13 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D.1a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

b) (18)

c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 1 & 1 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 16 & -7 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 7 & 44 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 13 & 0 & 10 \\ 22 & 1 & 17 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 6 & 16 & 23 \\ -31 & 27 & 30 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

D.2) Es wird mit einer Einheitsmatrix multipliziert. Durch eine Multiplikation mit einer Einheitsmatrix wird eine Matrix nicht verändert.

D.3a) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 1 \\ 26 & 14 & 13 \\ 14 & 5 & -2 \end{pmatrix} \neq \underline{B} \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 14 & -3 & 16 \\ 19 & -1 & 31 \end{pmatrix}$

b) Das Kommutativgesetz gilt nicht, denn es ist
$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B} \cdot \underline{A}$

D.4a) $\underline{B} + \underline{C} = \underline{F} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{D} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\underline{A} \cdot \underline{C} = \underline{E} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C} = \underline{D} + \underline{E} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$

e) $\underline{A} \cdot \underline{F} = \begin{pmatrix} 11 & -13 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$

f) Die Berechnungen deuten darauf hin, dass das Distributivgesetz gilt.

D.5a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & 11 \\ 2 & 11 & 17 \end{pmatrix}$

E.1a) Es gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Es gilt $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{A}$ ist die Inverse von $\underline{B}$ und umgekehrt.

F.1) $D_1 = 13$, $D_2 = 0$, $D_3 = 1$, $D_4 = 5$, $D_5 = 8$ und
$D_6 = -48$