



<https://youtu.be/6lLbAmPurKw>

Netzwerke. (15,11) Selbstkorrigierender Hamming-Code^a

Name: Vorname:

Individueller Parameter: k:

Partner: Name: Vorname:

Individueller Parameter des Partners: k:

Einführung

Mit dieser Übung soll sichtbar werden wie in Netzwerken Übertragungsfehler erkannt und korrigiert werden können. Es wird folgende Notation verwendet:

Parität: $\text{Par}(Z_1, Z_2, Z_3, \dots) = 0$ falls $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$ gerade und
 $\text{Par}(Z_1, Z_2, Z_3, \dots) = 1$ falls $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$ ungerade

Beispiele::

$\text{Par}(0) = \text{Par}(2) = \text{Par}(3,5) = \text{Par}(2,2) = \text{Par}(3,4,5) = 0$
 $\text{Par}(1) = \text{Par}(5) = \text{Par}(1,2) = \text{Par}(2,3) = \text{Par}(0,1,6) = 1$

Beim (15,11) Hamming-Code werden Nachrichten in Sequenzen von elf Bit zerstückelt. Die elf Bit werden in einem Block mit $4 \times 4 = 16$ Zellen in den Zellen Z3, Z5, Z6, Z7, Z9, Z10, Z11, Z12, Z13, Z14 und Z15 eingetragen.

^a Unterlagen auf <https://www.mathepauker.com/MustereX/Benedict/Projektarbeiten/Hamming.pdf>

X ₀	Q1 ₁	Q2 ₂	Z3 ₃
Q3 ₄	Z5 ₅	Z6 ₆	Z7 ₇
Q4 ₈	Z9 ₉	Z10 ₁₀	Z11 ₁₁
Z12 ₁₂	Z13 ₁₃	Z14 ₁₄	Z15 ₁₅

			0 ₃
	0 ₅	1 ₆	1 ₇
	0 ₉	0 ₁₀	0 ₁₁
1 ₁₂	1 ₁₃	1 ₁₄	0 ₁₅

Z.B. für die "Nachricht" 00110001110 wäre $Z3 = Z5 = 0$, $Z6 = Z7 = 1$, $Z9 = Z10 = Z11 = 0$, $Z12 = Z13 = Z14 = 1$ und $Z15 = 0$. (Siehe Hamming-Block oben rechts). Die Paritätprüfbits Q1, Q2, Q3 und Q4 werden aus denjenigen der "Nachricht" wie folgt berechnet:

$$Q1 = \text{Par}(Z3, Z5, Z7, Z9, Z11, Z13, Z15)$$

$$Q2 = \text{Par}(Z3, Z6, Z7, Z10, Z11, Z14, Z15)$$

$$Q3 = \text{Par}(Z5, Z6, Z7, Z12, Z13, Z14, Z15)$$

$$Q4 = \text{Par}(Z9, Z10, Z11, Z12, Z13, Z14, Z15)$$

	Q1		
		Q2	
	Q3		
	Q4		

Sie dienen der Paritätsprüfung, resp. der Fehlererkennung.

Der Bit X in der Ecke oben links ist der Zusatzprüfbit. Er wird wie folgt berechnet:

$$X = \text{Par}(Q1, Q2, Z3, Q3, Z5, Z6, Z7, Q4, Z9, Z10, Z11, Z12, Z13, Z14, Z15)$$

D.h. den Zusatzprüfbit erhält man aus der Summe der Bits in den übrigen 15 Zellen des Hamming-Blocks.

Für obiges Beispiel für die "Nachricht" 00110001110 erhält man

0 ₀	0 ₁	1 ₂	0 ₃
1 ₄	0 ₅	1 ₆	1 ₇
1 ₈	0 ₉	0 ₁₀	0 ₁₁
1 ₁₂	1 ₁₃	1 ₁₄	0 ₁₅

Bit-Flipping in der "Nachricht":

Fehler in den elf Bits der "Nachricht" erzeugen "falsche" Paritäten in den unten angezeigten Bits Q1, Q2, Q3 und Q4 zur Paritätsprüfung. "Falsch" bedeutet hier, dass der Prüfbit nicht in Übereinstimmung ist mit der "Nachricht".

	1	2	1,2
3	1,3	2,3	1,2,3
4	1,4	2,4	1,2,4
3,4	1,3,4	2,3,4	1,2,3,4

Der "Nachrichtenbit" Z3 wird zur Berechnung der Paritäten von Q1 und Q2 verwendet. Bei einem Bit-Flipp von Z3 wechseln somit die Paritäten von Q1 und Q2. Ähnlich beim "Nachrichtenbit" Z5. Dort wechseln die Paritäten von Q1 und Q3. Obige Tabelle zeigt welche Prüfbits bei Bit-Flipps der elf "Nachrichtenbits" ihre Parität wechseln. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass bei einem fehlerhaften Hamming-Block genau ein "Nachrichtenbit" geflippt sei. Zunächst stellen wir fest welche Prüfbits im Widerspruch sind zu den "Nachrichtenbits" im Block. Obige Tabelle zeigt welchen "Nachrichtenbit" man flippen muss, um bei den Prüfbits eine Übereinstimmung mit der "Nachricht" herbeizuführen. Wenn z.B. Prüfbits Q1, Q3

und Q4 nicht in Übereinstimmung mit der "Nachricht" sind, kann man eine Übereinstimmung herbeiführen indem man Z13 flippt.

Fehlerkorrektur im Hamming-Block vom Partner:

Der Einfachheit halber gehen wir bei dieser Übung davon aus, dass Bit-Flipping, nur bei genau einem der elf "Nachrichtbits" stattfindet.

Wenn Q3 "richtig" ist und Q1, Q2 und Q4 "falsch" sind, können wir, gemäss obigen Annahmen, umgekehrt davon ausgehen, dass in Wirklichkeit Bit Z11 falsch ist. Prüfbits gelten hier, wie gesagt, stets als richtig. Falsch bedeutet hier einfach, dass sie im Widerspruch zur "Nachricht" stehen. Basierend auf den soeben dargelegten Annahmen, können wir umgekehrt davon ausgehen, dass der Bit Z11 falsch ist, wenn Q3 "richtig" ist und Q1, Q2 und Q4 "falsch" sind. Wir können dann eine entsprechende Korrektur vornehmen und so durch den Wechsel eines einzelnen "Nachrichtebits" eine Übereinstimmung zwischen Prüfbits und der "Nachricht" herbeiführen.

Wir wollen annehmen, dass ich vom Partner untenstehenden Hamming-Block mit einem Bit-Flipp erhalten habe. Siehe unten links!

0	0	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

0	0	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Man sieht sofort, dass der Zusatzprüfbit "falsch" ist, denn die Summe der anderen Bits ist gleich 9, also ungerade. Ausserdem sind die Paritätprüfbits Q2 und Q4 "falsch", resp. im Widerspruch zur "Nachricht", die im Block gespeichert ist. Gemäss dem oben gezeigten Block ist der "Nachrichtenbit" Z10 falsch, wenn Q2 und Q4 im Widerspruch zur "Nachricht" im Block stehen. Die Fehlerkorrektur besteht in diesem Fall somit darin, dass man die Zahl 1 in Z10 durch eine 0 ersetzt.

Das Ziel besteht also darin, dass man einen einzelnen "Nachrichtenbit" identifiziert bei welchem ein Bit-Flipp sämtliche Unstimmigkeiten bei den Prüfbits beseitigt. Bei der vom Partner überreichten Nachricht muss genau ein "Nachrichtenbit" gefälscht sein, was zur Folge hat, dass zwei, drei oder vier der Prüfbits zur "Nachricht" im Widerspruch stehen. Wenn stattdessen fälschlicherweise ein Prüfbit geflippt worden wäre, dann wäre nur dieser eine Prüfbit im Widerspruch zur "Nachricht". Dies sollte jedoch, gemäss Auftrag, nicht der Fall sein.

Auftrag A:

Erstelle für die "Nachricht" entsprechend deinem individuellen Parameter k einen Hamming-Block.

"Nachricht":

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Auftrag B:

Erstelle für deinen Partner einen "falschen" Hamming-Block mit genau einem Bit der "Nachricht" geflippt. Verwende dazu obigen Hamming-Block, der hoffentlich richtig ist und flippe genau einen Bit der "Nachricht". Übergebe diesen falschen Block deinem Partner.

Auftrag C:

Besorge dir von deinem Partner einen ebenso verfälschten Hamming-Block. Falls der Hamming-Block in der beschriebenen Weise verfälscht wurde muss der Zusatzprüfbit X falsch sein.

"Verfälschter" Hamming-Block des Partners:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Ist der Zusatzprüfbit X "falsch"? **Antwort:**

Welche Prüfbits sind "falsch"? **Antwort:**

Welcher "Nachrichtenbit" des Hamming-Blocks des Partners ist geflippt?
Antwort:

Anmerkung: Gemäss unseren Annahmen sind eigentlich nicht die Prüfbits falsch sondern einer der "Nachrichtenbits".

Korrigierter Hamming-Block des Partners:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Markiere den korrigierten "Nachrichtenbit" im Hamming-Block farbig.
 Überprüfe anhand der Tabelle im Anhang und dem individuellen Parameter k deines Partners ob die korrigierte Nachricht richtig ist.

Nachricht des Partners:

Bit-Flipp

ursprünglich											
korrigiert											

Markiere den Bit-Flipp farbig.

Ist die korrigierte Nachricht richtig?

Antwort:

Tabelle der Nachrichten für die k-Werte

k	Nachricht	k	Nachricht	k	Nachricht	k	Nachricht
1	00101001110	41	01011010001	81	01110010110	121	10001110011
2	11001100001	42	11101100010	82	00010010110	122	11011001000
3	01011100111	43	11000110010	83	01001000101	123	10111111000
4	10110010000	44	00001100101	84	01111101000	124	10011111010
5	00110111010	45	11001001111	85	10100010010	125	11000100111
6	00101001101	46	00110111110	86	11110101100	126	01001111100
7	11000111010	47	11000001011	87	10101100110	127	00110111100
8	01000011010	48	11110010001	88	11011100100	128	11011000110
9	11111100100	49	00100111011	89	01011000010	129	11010101010
10	00001100011	50	10011001000	90	00111110001	130	10010111100
11	01000011111	51	00011010111	91	11000010111	131	11000100010
12	01011100000	52	00111111001	92	01011100001	132	01000111001
13	00100011101	53	01010101100	93	11011000010	133	11110100001
14	11001011011	54	01000110010	94	01111100110	134	10110101110
15	11001000110	55	00111011000	95	10011110000	135	01100000110
16	01001011001	56	11110110000	96	00110001111	136	11101001010
17	10011011100	57	11000010100	97	00111101001	137	10001110100
18	11000011001	58	01001110111	98	01100011011	138	00110010101
19	01100000101	59	00011110000	99	01011001000	139	00101110101
20	10111101000	60	10011001010	100	11100001010	140	01101101100
21	11110010110	61	11011000111	101	11000100001	141	10111110100
22	01101011100	62	00110011000	102	11000000111	142	01101010011
23	11101011010	63	10110101010	103	11111101000	143	01101110100
24	01101111010	64	10010011111	104	11101000111	144	10000101010
25	00001110011	65	01100110100	105	01010011101	145	10100101000
26	01000111101	66	10110100001	106	11010100111	146	10100110000
27	10000100011	67	11010110100	107	11010011001	147	10001001011
28	11001101000	68	01010011001	108	01001010101	148	10111100001
29	11110010011	69	01100010011	109	10101111100	149	00101111011
30	01101100011	70	01000011110	110	01010000111	150	01001011110
31	01100100010	71	00001011001	111	10100010110	151	00001100111
32	01001010100	72	11100010110	112	10100001111	152	10110011000
33	01100101111	73	00110101100	113	00011100001	153	11100000001
34	00011100010	74	00011011100	114	00011001101	154	01100101010
35	10010101101	75	10001110110	115	00100111101	155	00001010011
36	10001100100	76	00011101011	116	10010111011	156	00011000011
37	01000110001	77	10010100110	117	00111010111	157	01000101111
38	01010001111	78	01010011011	118	10101000010	158	11110010010
39	11011010000	79	00011110110	119	10100100111	159	11010010100
40	00000111101	80	00001010111	120	01100011111	160	11011110010