Numerische Integration. Rechteckregel[1]

https://youtu.be/Ym-QHcLAcOE

Name: .... , Vorname: .... , Klasse: ....

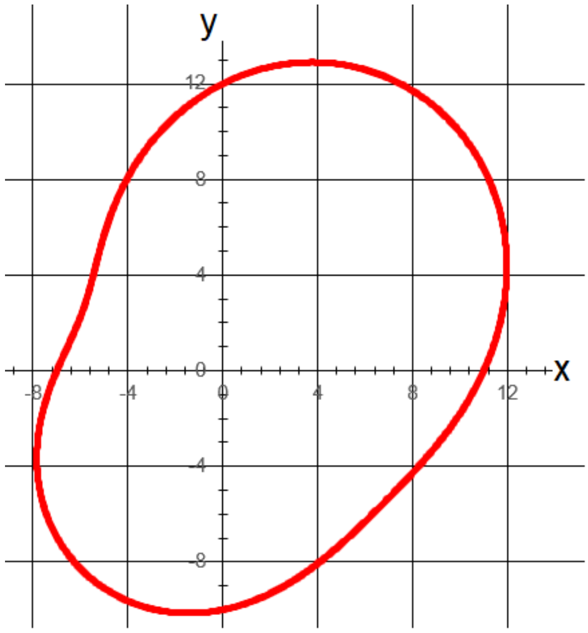
Individueller Parameter (Nummer k): ....

Nebenstehende geschlossene Kurve ist definiert in Polarkoordinaten wie folgt:

$$r(\varphi) = a_0 + a_1 \cos(\varphi) + a_2 \cos(2\varphi) + b_1 \sin(\varphi) + b_2 \sin(2\varphi)$$

mit $a_0 = 10$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$ und $b_2 = 2$.

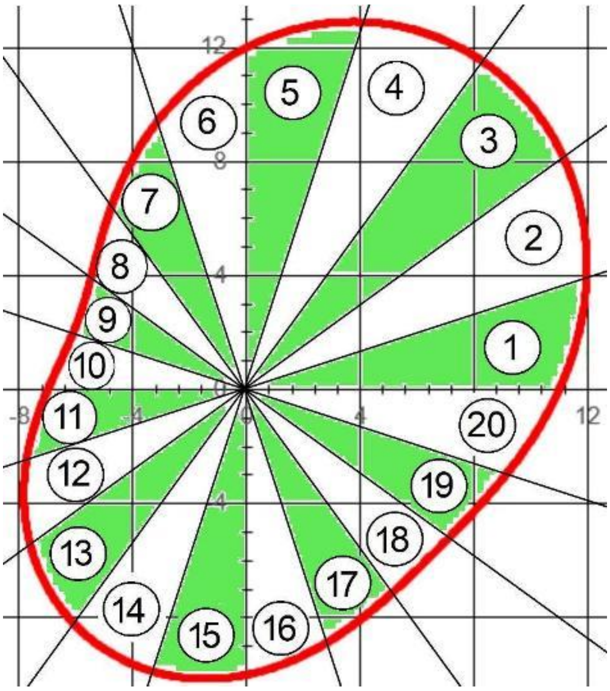
Wir wollen die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche näherungsweise berechnen. Dazu zerlegen wir die Figur in 20 Sektoren wie in untenstehender Figur illustriert.



Für diese Projektarbeit wird eine EXCEL-Tabelle verwendet. Ihr findet sie unter dem Link

https://www.mathepauker.com/Musterex/Benedict/Projektarbeiten/Integration.xlsx

[1] Unterlagen auf https://www.mathepauker.com/Musterex/Benedict/Projektarbeiten/Integration.pdf



Im Folgenden behandeln wir diese Sektoren mit gleichem Zentriwinkel 18º als Kreissektoren. Die Fläche eines Kreissektors mit Zentriwinkel 18º und Radius ρ_k wird wie folgt berechnet:

$$\Delta A_k = \frac{\pi}{2}\ \rho_k^2\ \cdot (18^\circ / 180^\circ) = \frac{\pi}{10}\ \frac{\rho_k^2}{2}$$

Jeder Sektor ist begrenzt durch zwei Werte von r unterschiedlicher Länge. Für die Kreissektoren mit Zentriwinkel nehmen wir den Mittelwert der beiden Werte als Kreisradius. Für den Radius ρk des k-ten Kreissektor gilt

$$\rho_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}$$

Untenstehende Tabelle gilt für die hier gezeigte Kurve.

j	φ	$r_j(\varphi)$	k	$\rho_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}$	$f(\varphi) = ½\ \rho_k^2$
1	0	11	1	11.789	69.488
2	0.314	12.5777	2	13.188	86.966
3	0.628	13.7989	3	13.997	97.962
4	0.942	14.1957	4	13.875	96.254
5	1.257	13.5537	5	12.777	81.624
6	1.571	12	6	10.983	60.316
7	1.885	9.96647	7	9.003	40.531
8	2.199	8.04035	8	7.399	27.376
9	2.513	6.75862	9	6.590	21.717
10	2.827	6.42232	10	6.711	22.520
11	3.142	7	11	7.578	28.711
12	3.456	8.15542	12	8.771	38.468
13	3.770	9.38728	13	9.807	48.088
14	4.084	10.2265	14	10.321	53.262
15	4.398	10.4155	15	10.208	52.099
16	4.712	10	16	9.650	46.563
17	5.027	9.30042	17	9.037	40.833
18	5.341	8.77346	18	8.796	38.687
19	5.655	8.81912	19	9.214	42.447
20	5.969	9.60851	20	10.304	53.089
21	6.283	11			

Die Funktion wird in einer EXCEL-Tabelle berechnet. Den Link dazu siehe oben. Dort findet man eine Wertetabelle der Funktion mit 21 Wertepaaren φ und $r(\varphi)$. Aus zwei benachbarten Werten von r berechnet man zunächst den Radius ρ des von ihnen eingeschlossenen Kreissektors. Man kann z.B. ρ_1 aus $r_1 = 11$ und $r_2 = 12.5777$ berechnen wie folgt: $\rho_1 = (r_1 + r_2)/2 = (11 + 12.5777)/2 = 11.789$. Ähnlich ρ_2. $\rho_2 = (r_2 + r_3)/2 = (12.5777 + 13.7989)/2 = 13.188$.

Danach berechnet man den "Integranden" $f(\varphi)$ wie folgt:

$$f(\varphi_k) = \frac{\rho_k^2}{2}$$

Eine Näherung für die Gesamtfläche erhält man dann als Summe der Flächen der zwanzig Kreissektoren

$$A \approx \Delta A_1 + \Delta A_2 + \ldots\ldots + \Delta A_{20} =$$

$$\frac{\pi}{10}\left[f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \ldots\ldots + f(\varphi_{20})\right] = \frac{\pi}{10}\left(\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\rho_2^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\rho_{20}^2}{2}\right)$$

Auftrag:

1. Exakte Fläche:

Die Fläche kann man als Integral exakt berechnen. Es gilt

$$A = \int_0^{2\pi} [r(\varphi)]^2\, d\varphi = \int_0^{2\pi} [a_0 + a_1 \cos(\varphi) + a_2 \cos(2\varphi) + b_1 \sin(\varphi) + b_2 \sin(2\varphi)]^2\, d\varphi =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(2\,a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2\right)$$

Berechne für deine individuellen Werte von a_0, a_1, a_2, b_1 und b_2 den exakten Wert für die Fläche A.

A = ...

2. Wertetabelle mit EXCEL erstellen

Setze in der EXCEL-Tabelle deine individuellen Werte für a_1, a_2, b_1 und b_2. Der Wert von a_0 ist für alle gleich 10. Mit diesen Werten berechnet EXCEL eine Wertetabelle. Übertrage diese Wertetabelle auf die Tabelle im Anhang.

3. "Integrand" berechnen und grafisch darstellen.

Berechne die Radien ρ_k der Kreissegmente für $k = 1, 2, \ldots, 20$ als arithmetische Mittel und berechne daraus den "Integranden" $f(\varphi_k) = \frac{1}{2}[r(\varphi_k)]^2$. Notiere die je 20 Werte von $r(\varphi_k)$ und $f(\varphi_k)$ in der Tabelle im Anhang.
Stelle den "Integranden" im Anhang grafisch dar.

4. Einen Schätzwert für die Fläche nach der Trapezregel berechnen

Bilde die Summe der 20 Werte in der Spalte für den "Integranden", d.h. berechne

$$f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \ldots\ldots + f(\varphi_{20})$$

Den Schätzwert für A erhält man wenn man diese Summe mit $(\pi/10)$ multipliziert

$$A \approx \frac{\pi}{10}[f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \ldots\ldots + f(\varphi_{20})]$$

Für die oben tabellierten Werte erhält man

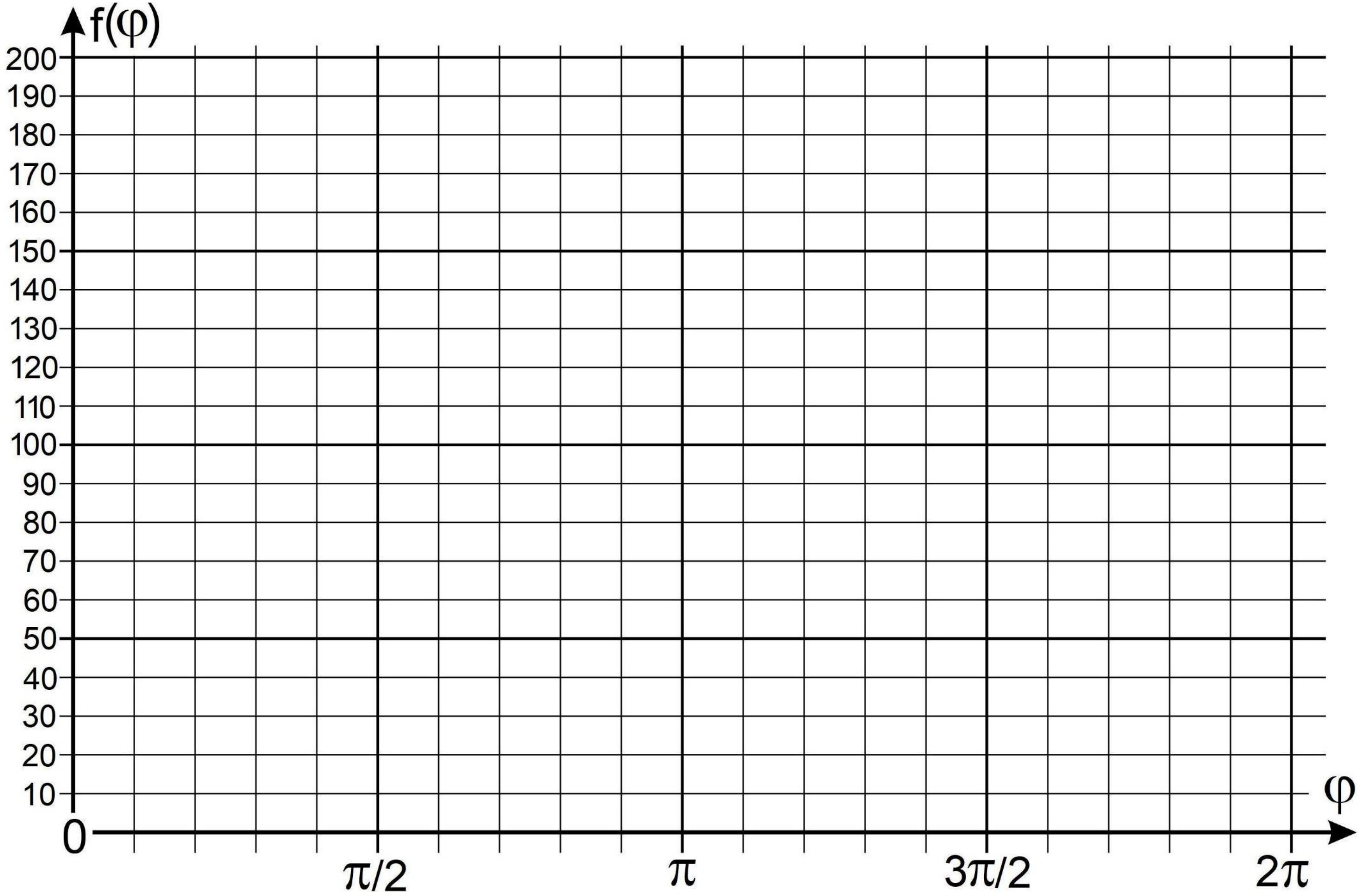
$$A \approx \frac{\pi}{10}[69.488 + 86.966 + 97.962 + \ldots\ldots\ldots + 53.089] = 328.9$$

$$\boxed{A \approx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Vergleiche diesen Wert mit dem im 1. Teil berechneten exakten Wert für A. Die von der Kurve eingeschlossene Fläche erhält man als Fläche unter der Kurve des "Integranden". Dies entspricht dem im 1. Teil gezeigten bestimmten Integral. Für den "Integranden" wurden die Werte in der Mitte der 20 Intervalle berechnet. Dies entspricht der so genannten Trapezregel.

j	φ	$r_j(\varphi)$	k	$\rho_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}$	$f(\varphi) = \tfrac{1}{2}\rho_k^2$
1	0		1		
2	0.314		2		
3	0.628		3		
4	0.942		4		
5	1.257		5		
6	1.571		6		
7	1.885		7		
8	2.199		8		
9	2.513		9		
10	2.827		10		
11	3.142		11		
12	3.456		12		
13	3.770		13		
14	4.084		14		
15	4.398		15		
16	4.712		16		
17	5.027		17		
18	5.341		18		
19	5.655		19		
20	5.969		20		
21	6.283				

Summe =


f(φ)
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
φ
π/2
π
3π/2
2π

Individuelle Parameter

k	a_1	a_2	b_1	b_2	k	a_1	a_2	b_1	b_2	k	a_1	a_2	b_1	b_2
1	-2	-1	-1	-1	41	1	-1	1	-2	81	-2	1	1	-2
2	-2	-1	-1	1	42	1	-1	1	2	82	-2	1	1	2
3	-2	-1	1	-1	43	1	-1	2	-1	83	-2	1	2	-1
4	-2	-1	1	1	44	1	-1	2	1	84	-2	1	2	1
5	-2	1	-1	-1	45	1	1	-2	-1	85	-2	2	-1	-1
6	-2	1	-1	1	46	1	1	-2	1	86	-2	2	-1	1
7	-2	1	1	-1	47	1	1	-1	-2	87	-2	2	1	-1
8	-2	1	1	1	48	1	1	-1	2	88	-2	2	1	1
9	-1	-2	-1	-1	49	1	1	1	-2	89	-1	-2	-2	-1
10	-1	-2	-1	1	50	1	1	1	2	90	-1	-2	-2	1
11	-1	-2	1	-1	51	1	1	2	-1	91	-1	-2	-1	-2
12	-1	-2	1	1	52	1	1	2	1	92	-1	-2	-1	2
13	-1	-1	-2	-1	53	1	2	-1	-1	93	-1	-2	1	-2
14	-1	-1	-2	1	54	1	2	-1	1	94	-1	-2	1	2
15	-1	-1	-1	-2	55	1	2	1	-1	95	-1	-2	2	-1
16	-1	-1	-1	2	56	1	2	1	1	96	-1	-2	2	1
17	-1	-1	1	-2	57	2	-1	-1	-1	97	-1	-1	-2	-2
18	-1	-1	1	2	58	2	-1	-1	1	98	-1	-1	-2	2
19	-1	-1	2	-1	59	2	-1	1	-1	99	-1	-1	2	-2
20	-1	-1	2	1	60	2	-1	1	1	100	-1	-1	2	2
21	-1	1	-2	-1	61	2	1	-1	-1	101	-1	1	-2	-2
22	-1	1	-2	1	62	2	1	-1	1	102	-1	1	-2	2
23	-1	1	-1	-2	63	2	1	1	-1	103	-1	1	2	-2
24	-1	1	-1	2	64	2	1	1	1	104	-1	1	2	2
25	-1	1	1	-2	65	-2	-2	-1	-1	105	-1	2	-2	-1
26	-1	1	1	2	66	-2	-2	-1	1	106	-1	2	-2	1
27	-1	1	2	-1	67	-2	-2	1	-1	107	-1	2	-1	-2
28	-1	1	2	1	68	-2	-2	1	1	108	-1	2	-1	2
29	-1	2	-1	-1	69	-2	-1	-2	-1	109	-1	2	1	-2
30	-1	2	-1	1	70	-2	-1	-2	1	110	-1	2	1	2
31	-1	2	1	-1	71	-2	-1	-1	-2	111	-1	2	2	-1
32	-1	2	1	1	72	-2	-1	-1	2	112	-1	2	2	1
33	1	-2	-1	-1	73	-2	-1	1	-2	113	1	-2	-2	-1
34	1	-2	-1	1	74	-2	-1	1	2	114	1	-2	-2	1
35	1	-2	1	-1	75	-2	-1	2	-1	115	1	-2	-1	-2
36	1	-2	1	1	76	-2	-1	2	1	116	1	-2	-1	2
37	1	-1	-2	-1	77	-2	1	-2	-1	117	1	-2	1	-2
38	1	-1	-2	1	78	-2	1	-2	1	118	1	-2	1	2
39	1	-1	-1	-2	79	-2	1	-1	-2	119	1	-2	2	-1
40	1	-1	-1	2	80	-2	1	-1	2	120	1	-2	2	1