Neuronale Netzwerke

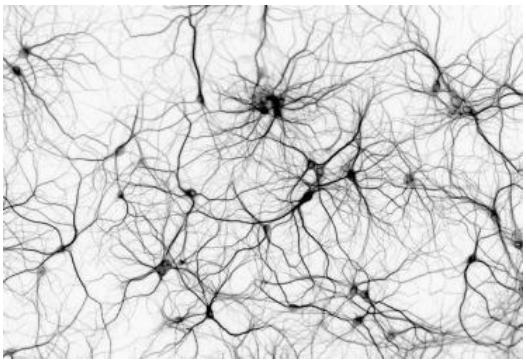
https://youtu.be/RaE7QzmOtDA

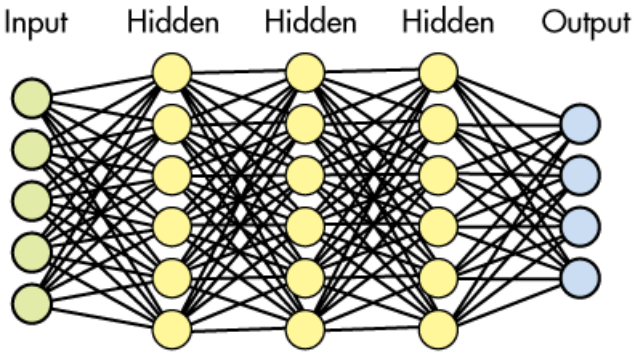
von ..... Klasse .....

Programm: .....

IN: e_1 = ... , e_2 = ... , e_3 = ...

M_{23}: x_{23} (in Teil 5)





Teil 1: Tabellenkalkulation

Berechne mit Tabellenkalkulation (EXCEL) für das oben angegebene Programm (Matrizen U, V und W) die Aktivierungsniveaus der Neuronen M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, O_{31} und O_{32}. Notiere in der Kalkulationstabelle (EXCEL) auch die zum angegebenen Programm gehörigen Werte der Parameter α, β und γ. Drucke das Ergebnis aus und füge das Ergebnis dem Übungsbericht bei.

Die Kalkulationstabelle findet ihr unter

https://mathepauker.com/Musterex/Benedict/Projektarbeiten/Neuronale_Netze.xlsx

Ein Beispiel für eine solche Tabellenkalkulation zeigt Anhang C (Anhang C.1 und C.2). Den Link zum Video über neuronale Netzwerke oder, genauer gesagt, zu dieser Übung findet ihr auch in dieser Kalkulationstabelle.

©2019 mathepunk

Teil 2: Interpretation der Aktivierung der Ausgabeneuronen (Mustererkennung)

Berechne die Anzahl aktivierter Sinneszellen (mit $e_k = 1$) basierend auf den in Teil 1 erhaltenen Werte z_1 und z_2 und den zum angegebenen Programm gehörigen Werte für die Parameter α, β und γ. Dabei gilt

Binärzahl vom Output: z_1 = Aktivierung Zelle O_{31}, z_2 = Aktivierung Zelle O_{32}
Vorderste Ziffer der Binärzahl: 1 falls $z_1 > \beta$, andernfalls 0
Einerziffer der Binärzahl: 1 falls $\alpha < z_2 < \beta \vee z_2 > \gamma$, andernfalls 0

Berechnung:

Ergebnis: Binärzahl: ..... , Dezimalzahl: .....

Ist das Ergebnis richtig? .....

Teil 3: Übertragung von Zahlenwerten von Netzparametern für das gegebene Programm in eine grafische Darstellung des Netzwerks (Anhang B.3)

Übertrage die Elemente der Matrizen $\underline{U}$, $\underline{V}$ und $\underline{W}$ in die grafische Darstellung des neuronalen Netzwerks (Anhang B.3). Verwende dazu diese Darstellung der Matrizen $\underline{U}$, $\underline{V}$ und $\underline{W}$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \end{pmatrix} \quad \underline{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{pmatrix} \quad \underline{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \end{pmatrix}$$

für das angegebene Programm sowie die Vorlage für die grafische Darstellung (Anhang B.1). Bei den Grössen u_{14}, u_{24}, u_{34}, v_{14}, v_{24}, v_{34}, w_{14} und w_{24} handelt es sich um Bias-Werte der Neuronen M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, O_{31}, resp. O_{32}. Sie werden in der grafischen Darstellung des Netzwerks über dem jeweiligen Neuron notiert.

©2019 mathepunk

Teil 4: Übertragung der Zahlenwerte für die Aktivierungsniveaus, e_1, e_2 und e_3, der Sinneszellen in der Eingangsschicht auf die grafische Darstellung des neuronalen Netzwerks (Anhang B.3). Ebenso Übertragung der Zahlenwerte für die aus dieser Eingabe mit Tabellenkalkulation berechneten Aktivierungsniveaus sämtlicher Neuronen im neuronalen Netzwerk auf die grafische Darstellung des neuronalen Netzwerks (Anhang B.3)

Übertrage die gegebenen Werte für e_1, e_2 und e_3, sowie die mit Tabellenkalkulation berechneten Werte der Aktivierungsniveaus x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, z_1 und z_2 der Neuronen M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, O_{31},resp. O_{32} in die grafische Darstellung (Anhang B.3). Wo die jeweiligen Matrixelemente in der grafischen Darstellung hingehören zeigt die Vorlage für die grafische Darstellung (Anhang B.1). Wie es am Schluss aussehen sollte, zeigt das Zahlenbeispiel für die grafische Darstellung eines neuronalen Netzwerks (Anhang B.2).

Teil 5: Berechnung des Aktivierungsniveaus eines einzelnen Neurons in der 1. oder 2. verborgenen Zwischenschicht

Mit Matrixalgebra werden die Aktivierungsniveaus der Neuronen in den verborgenen Zwischenschichten in zwei Schritten wie folgt berechnet:

$$\begin{pmatrix} x_{11}^* \\ x_{12}^* \\ x_{13}^* \end{pmatrix} = \underline{U} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh(x_{11}^*) \\ \tanh(x_{12}^*) \\ \tanh(x_{13}^*) \end{pmatrix}$$

für die 1. verborgene Zwischenschicht und als

$$\begin{pmatrix} x_{21}^* \\ x_{22}^* \\ x_{23}^* \end{pmatrix} = \underline{V} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh(x_{21}^*) \\ \tanh(x_{22}^*) \\ \tanh(x_{23}^*) \end{pmatrix}$$

für die 2. verborgene Zwischenschicht. Zuerst wird aus dem Zufluss von Aktivierung durch Nervenfasern und dem Bias-Wert die Grösse x^* berechnet. In einem zweiten Schritt wird aus x^* mithilfe der Aktivierungsfunktion das eigentliche Aktivierungsniveau x berechnet. Wir verwenden hier den Tangens hyperbolicus als Aktivierungsfunktion, so dass $x = \tanh(x^*)$.

©2019 mathepunk

Die Funktion Tangens hyperbolicus findet man eventuell nicht auf dem Taschenrechner. In EXCEL heisst diese Funktion "TANHYP". Auf der vorbereiteten Kalkulationstabelle befindet sich ein Feld in welchem man diese Funktion berechnen kann.

Hier wird nur ein einzelnes Element eines Vektors gesucht, z.B. x_{23}. Man kann sich auch an der grafischen Darstellung orientieren. Unabhängig ob man sich an der Matrixalgebra oder der grafischen Darstellung orientiert, erhält man für obiges Beispiel

$$x_{23}^* = x_{11} \cdot v_{31} + x_{12} \cdot v_{32} + x_{13} \cdot v_{33} + 1 \cdot v_{34} \text{ und daraus } x_{23} = \tanh(x_{23}^*)$$

Vergleiche das Ergebnis der Berechnung mit dem Wert aus der Tabellenkalkulation.

Berechnung formal (algebraische Formeln):

Berechnung numerisch:

©2019 mathepunk

Teil 6: Berechnung des Aktivierungsniveaus aller Neuronen in der Ausgabeschicht

Die Aktivierungsniveaus z_1 und z_2 der beiden Neuronen in der Ausgabeschicht sollen aus den Aktivierungsniveaus der Neuronen in der 2. verborgenen Zwischenschicht berechnet werden gemäss

$$\begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix} = \underline{W} \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh(z_1^*) \\ \tanh(z_2^*) \end{pmatrix}$$

Man kann sich dabei wiederum an obiger Darstellung in Matrixalgebra oder an der grafischen Darstellung des Netzwerks orientieren.

Berechnung numerisch:

©2019 mathepunk

Anhang A: Programme

Binärzahl vom Output: z_1 = Aktivierung Zelle O_{31}, z_2 = Aktivierung Zelle O_{32}

Vorderste Ziffer der Binärzahl: 1 falls $z_1 > \beta$, andernfalls 0

Einerziffer der Binärzahl: 1 falls $\alpha < z_2 < \beta \vee z_2 > \gamma$, andernfalls 0

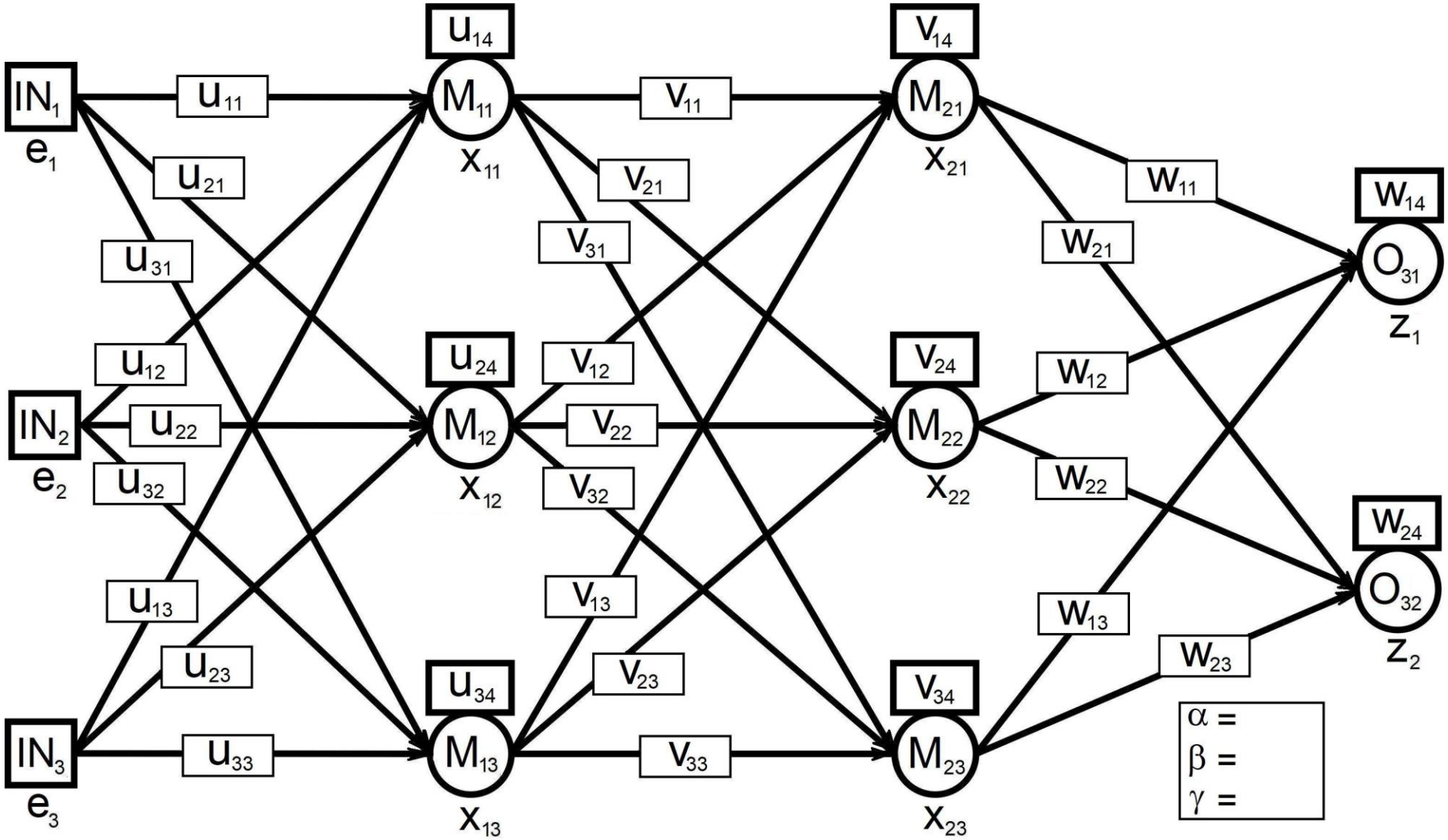
P	Matrix U				Matrix V				Matrix W				Grenzen
A	0.24	0.33	0.08	0.19	0.33	0.17	0.31	0.06	0.24	0.33	0.18	0.12	$\alpha = 0.43$
	0.15	0.34	0.28	0.34	0.19	0.34	0.38	0.08	0.17	0.15	0.38	0.14	$\beta = 0.48$
	0.31	0.28	0.22	0.29	0.15	0.29	0.36	0.22					$\gamma = 0.52$
B	0.38	0.04	0.16	0.02	0.11	0.16	0.33	0.31	0.18	0.16	0.17	0.09	$\alpha = 0.27$
	0.28	0.31	0.36	0.06	0.27	0.31	0.37	0.1	0.23	0.19	0.06	0.1	$\beta = 0.34$
	0.26	0.34	0.27	0.24	0.25	0.12	0.28	0.3					$\gamma = 0.37$
C	0.2	0.25	0.2	0.02	0.37	0.13	0.35	0.37	0.08	0.21	0.29	0.15	$\alpha = 0.32$
	0.3	0.27	0.2	0.38	0.33	0.29	0.31	0.32	0.31	0	0.31	0.13	$\beta = 0.41$
	0.18	0.2	0.1	0	0.3	0.34	0.33	0.05					$\gamma = 0.45$
D	0.39	0.32	0.33	0.01	0.19	0.02	0.16	0.31	0.33	0.34	0.07	0.09	$\alpha = 0.32$
	0.2	0.11	0.19	0.33	0.36	0.1	0.09	0.19	0.36	0.19	0.25	0.07	$\beta = 0.4$
	0.38	0.33	0.28	0.1	0.02	0.25	0.24	0.19					$\gamma = 0.44$
E	0.36	0.32	0.11	0.04	0.18	0.3	0.34	0.25	0.1	0.18	0.19	0.21	$\alpha = 0.32$
	0.13	0.2	0.39	0.14	0.06	0.26	0.05	0.27	0.39	0.15	0.24	0.04	$\beta = 0.4$
	0.33	0.09	0.35	0.24	0.29	0.16	0.08	0.22					$\gamma = 0.44$
F	0.37	0.33	0.26	0.27	0.08	0.24	0.25	0.03	0.03	0	0.12	0.36	$\alpha = 0.32$
	0.13	0.34	0.26	0.38	0.34	0.01	0.39	0.27	0.24	0.12	0.37	0.07	$\beta = 0.41$
	0.37	0.22	0.1	0.31	0.24	0.17	0.33	0.19					$\gamma = 0.45$
G	0.23	0.38	0.29	0.21	0.27	0.11	0.25	0.38	0.36	0.2	0.2	0.09	$\alpha = 0.38$
	0.26	0.39	0.22	0.05	0.19	0.2	0.26	0.26	0.34	0.39	0.18	0.03	$\beta = 0.48$
	0.39	0.22	0.39	0.25	0.08	0.32	0.05	0.23					$\gamma = 0.52$
H	0.33	0.23	0.37	0.08	0.08	0.15	0.07	0.01	0.38	0.19	0.08	0.2	$\alpha = 0.28$
	0.3	0.27	0.24	0.11	0.39	0.16	0.33	0.02	0.16	0.36	0.24	0.12	$\beta = 0.35$
	0.12	0.26	0.26	0.31	0.03	0.02	0.17	0.12					$\gamma = 0.38$
I	0.27	0.25	0.38	0	0.15	0.17	0.28	0.02	0.35	0.32	0.38	0.2	$\alpha = 0.42$
	0.33	0.25	0.29	0.19	0.05	0.15	0.34	0.07	0.36	0.35	0.35	0.14	$\beta = 0.53$
	0.39	0.31	0.29	0.16	0.36	0.39	0.21	0.11					$\gamma = 0.58$

©2019 mathepunk

J	0.15	0.2	0.35	0.2	0.37	0.09	0.22	0.29	0.18	0.28	0.06	0.32	$\alpha = 0.4$
	0.19	0.36	0.12	0.12	0.32	0.12	0.33	0.1	0.23	0.35	0.31	0.15	$\beta = 0.51$
	0.17	0.06	0.28	0.2	0.29	0.37	0.03	0.18					$\gamma = 0.56$
K	0.05	0.2	0.15	0.28	0.22	0.33	0.39	0.07	0.31	0.31	0.22	0.19	$\alpha = 0.43$
	0.26	0.37	0.21	0.38	0.24	0.31	0.1	0.11	0.18	0.36	0.39	0.15	$\beta = 0.54$
	0.39	0.32	0.38	0.26	0.33	0.35	0.19	0.03					$\gamma = 0.59$
L	0.26	0.21	0.08	0.21	0.18	0.26	0.26	0.15	0.36	0.3	0.04	0.14	$\alpha = 0.29$
	0.28	0.35	0.38	0	0.04	0.29	0.09	0.19	0.29	0.05	0.36	0.11	$\beta = 0.37$
	0.27	0.24	0.22	0.04	0.12	0.34	0.3	0.01					$\gamma = 0.4$
M	0.24	0.37	0.09	0.12	0.08	0.35	0.15	0.06	0.29	0.26	0.36	0.09	$\alpha = 0.29$
	0.16	0.35	0.18	0.19	0.19	0.15	0.23	0.25	0.23	0.37	0.31	0.04	$\beta = 0.37$
	0.16	0.01	0.3	0.21	0.02	0.19	0.19	0.13					$\gamma = 0.4$
N	0.01	0.3	0.34	0.16	0.28	0.09	0.31	0.08	0.37	0.36	0.24	0.03	$\alpha = 0.32$
	0.29	0.14	0.19	0.14	0.14	0.19	0.33	0.15	0.21	0.33	0.09	0.18	$\beta = 0.41$
	0.37	0.29	0.08	0.13	0.21	0.32	0.29	0.12					$\gamma = 0.45$
O	0.2	0.3	0.15	0.2	0.1	0.3	0.4	0.35	0.35	0	0.4	0.1	$\alpha = 0.36$
	0.15	0.4	0.35	0.05	0.05	0.05	0.15	0.25	0.45	0.1	0.25	0.05	$\beta = 0.46$
	0.35	0.1	0.25	0.15	0.3	0.15	0.25	0.2					$\gamma = 0.5$

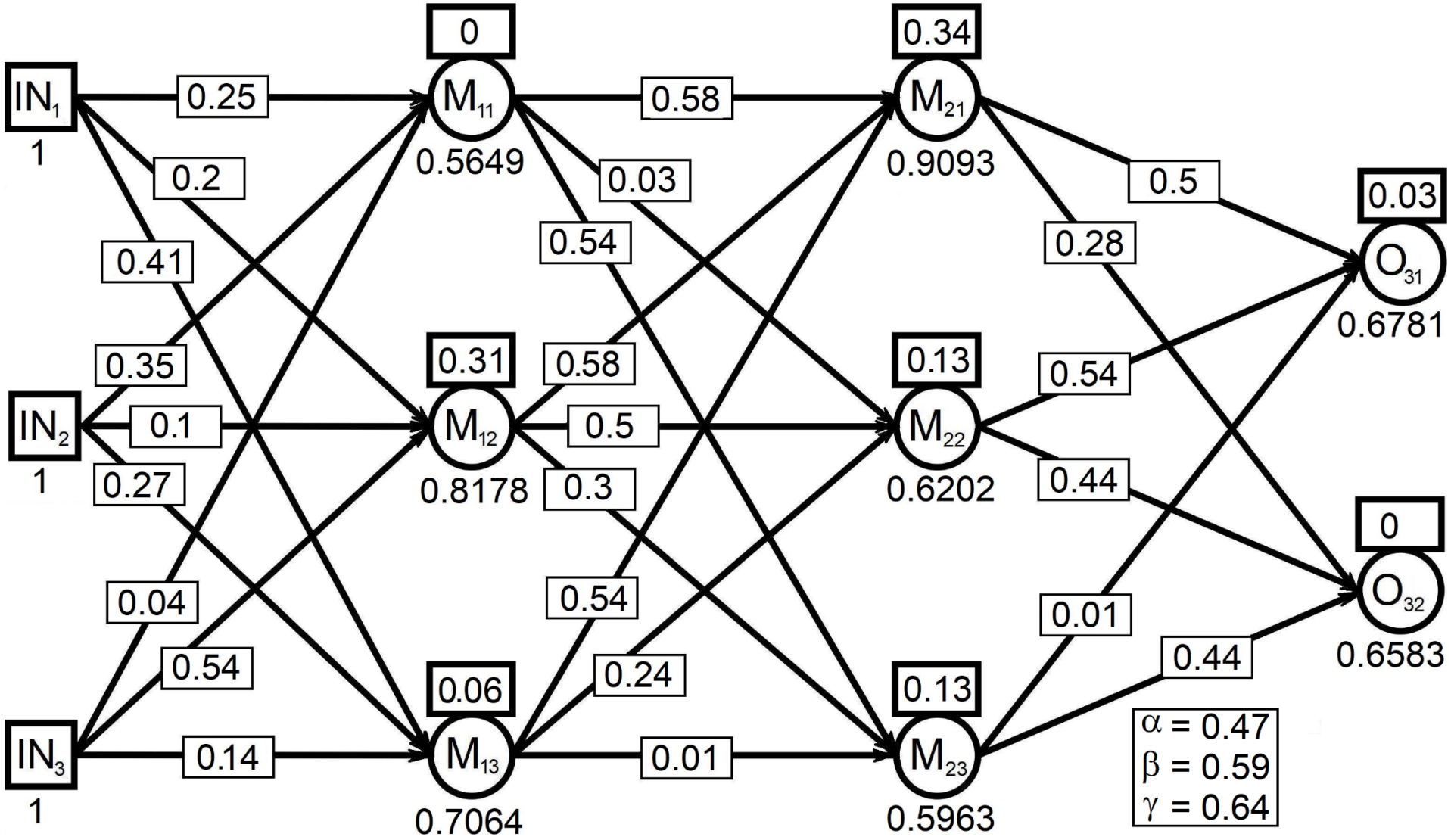
©2019 mathepunk

Anhang B.1: Neuronales Netzwerk. Vorlage für grafische Darstellung



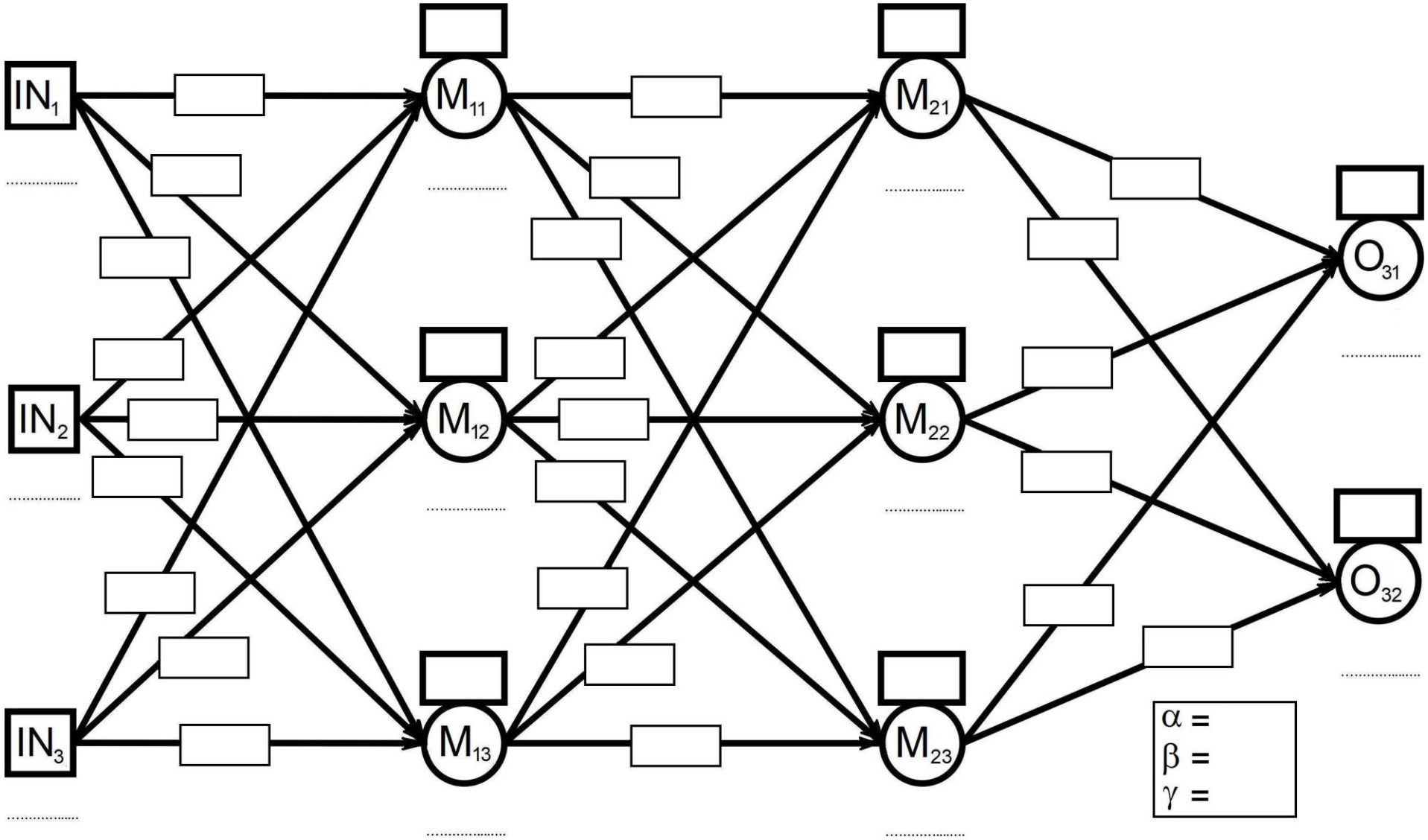
©2019 mathepunk

Anhang B.2: Neuronales Netzwerk. Zahlenbeispiel



©2019 mathepunk

Anhang B.3: Neuronales Netzwerk. Grafische Darstellung



©2019 mathepunk

Anhang C.1: Neuronales Netzwerk. Beispiel für Tabellenkalkulation

Neuronales Netzwerk:

Eingansschicht

1	1	1
e_1	e_2	e_3

Matrix U

0.25	0.35	0.04	0
0.2	0.1	0.54	0.31
0.41	0.27	0.14	0.06

Matrix V

0.58	0.58	0.54	0.34
0.03	0.5	0.24	0.13
0.54	0.3	0.01	0.13

Matrix W

0.5	0.54	0.01	0.03
0.28	0.44	0.44	0

α	β	γ
0.47	0.59	0.64

Berechnete Grössen, Aktiv

1. verborgene Schicht

0.5649	0.8178	0.7064
Zelle M_{11}	Zelle M_{12}	Zelle M_{13}
x_{11}	x_{12}	x_{13}

2. verborgene Schicht

0.9093	0.6202	0.5963
Zelle M_{21}	Zelle M_{22}	Zelle M_{23}
x_{21}	x_{22}	x_{23}

Ausgabeschicht

0.6781	0.6583
Zelle O_{31}	Zelle O_{32}
z_1	z_2

©2019 mathepunk

Anhang C.2: Neuronales Netzwerk. Beispiel für Tabellenkalkulation

Neuronales Netzwerk:

Eingansschicht

1	1	1
e_1	e_2	e_3

Matrix U

0.25	0.35	0.04	0
0.2	0.1	0.54	0.31
0.41	0.27	0.14	0.06

Matrix V

0.58	0.58	0.54	0.34
0.03	0.5	0.24	0.13
0.54	0.3	0.01	0.13

Matrix W

0.5	0.54	0.01	0.03
0.28	0.44	0.44	0

α	β	γ
0.47	0.59	0.64

Berechnete Grössen, Aktivierungsniveaus (nicht verändern!)

1. verborgene Schicht

0.5649	0.8178	0.7064
Zelle M_{11}	Zelle M_{12}	Zelle M_{13}
x_{11}	x_{12}	x_{13}

u_{11} =	0.25	u_{12} =	0.35	u_{13} =	0.04	u_{14} =	0
u_{21} =	0.2	u_{22} =	0.1	u_{23} =	0.54	u_{24} =	0.31
u_{31} =	0.41	u_{32} =	0.27	u_{33} =	0.14	u_{34} =	0.06

2. verborgene Schicht

0.9093	0.6202	0.5963
Zelle M_{21}	Zelle M_{22}	Zelle M_{23}
x_{21}	x_{22}	x_{23}

v_{11} =	0.58	v_{12} =	0.58	v_{13} =	0.54	v_{14} =	0.34
v_{21} =	0.03	v_{22} =	0.5	v_{23} =	0.24	v_{24} =	0.13
v_{31} =	0.54	v_{32} =	0.3	v_{33} =	0.01	v_{34} =	0.13

Ausgabeschicht

0.6781	0.6583
Zelle O_{31}	Zelle O_{32}
z_1	z_2

w_{11} =	0.5	w_{12} =	0.54	w_{13} =	0.01	w_{14} =	0.03
w_{21} =	0.28	w_{22} =	0.44	w_{23} =	0.44	w_{24} =	0

x	TANHYP(X)
0	0
0.1	0.09967
0.2	0.19738
0.3	0.29131
0.4	0.37995
0.5	0.46212

©2019 mathepunk