Musterprüfung

Vektorgeometrie

Themen:

A. Ortsvektoren, Verbindungsvektoren, Richtungsvektoren

B. Vektoraddion (und Vektorsubtraktion)

C. Der Betrag eines Vektors

D. Skalare Multiplikation eines Vektors. Linearkombinationen von Vektoren

E. Vektorgleichungen

F. Das Skalarprodukt

A.1) Die Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben wie folgt: $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

a) Bestimme die Ortsvektoren der Eckpunkte A, B und C.

b) Bestimme die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CB}$.

B.1) Berechne die Vektorsumme

a) $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}+\left(-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$

B.2) Berechne die Differenz von Vektoren

a) $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}a\\5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

C.1) Berechne den Betrag des Vektors

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\14\\2\end{pmatrix}$

C.2) Berechne den Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}}$.

C.3) Berechne den Umfang des Dreiecks

$A\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}-5\\5\\9\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$.

C.4) Ein Vektor ist gegeben wie folgt: $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\-2\\5\end{pmatrix}$.

Wie gross muss die x-Komponente von $\vec{a}$ sein, damit $|\vec{a}|=15$?

C.5) Berechne $\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}\right|$

D.1) Es sei $\vec{a}=k\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$.

a) Berechne $\vec{a}$ für $k=2$ und $k=-5$.

b) Wie gross muss k sein, damit $|\vec{a}|=77$?

D.2) Berechne die Linearkombination

a) $2\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$

b) $5\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$

D.3) Im Landeanflug folgt ein Passagierflugzeug einem Leitstrahl. Seine Position ist wie folgt:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\30\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}240\\-450\\-32\end{pmatrix}$$

Für welchen Wert von t ist die z-Koordinate gleich null und wie gross sind für diesen Wert von t die x- und y-Koordinaten?

D.4) Für welchen Wert von k ist in der Linearkombination $\begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

die x-Koordinate gleich der Summe von y- und z-Koordinate?

E.1) Berechne x, y und z, wenn

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ z \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$

d) $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

E.2) Berechne k in

a) $\vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

so, dass $\vec{a}$ ein Einheitsvektor wird ($|\vec{a}| = 1$).

E.3) Berechne t in

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 16 \end{pmatrix}$ so, dass $|\vec{a}| = 18$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix}$ so, dass $|\vec{a}| = 9$

E.4) Die Kurve in parametrischer Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

stellt eine Wurfparabel dar. Bestimme die z-Koordinate (Höhe) für

a) $t = 0.8$

b) $x = 2.5$

c) $y = 8$

F.1) Bestimme das Skalarprodukt

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} c \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c-1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} a+b \\ a \\ -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-b \\ -a \\ b \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ 2 \end{pmatrix}$

F.2) Bestimme die Grösse c so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ c-6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2c \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 21 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} c+4 \\ 13 \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} c-1 \\ 4 \\ 3-c \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} c-5 \\ -1 \\ c-2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} c+3 \\ c-7 \\ c+5 \end{pmatrix}$

Lösungen

A.1a) $\vec{r}_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{CB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -\vec{BC}$

B.1a) $\begin{pmatrix} 4-2 \\ 0+3 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}}$, (b) $\begin{pmatrix} 0-2+7 \\ 1+3+2 \\ -1+5+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -1+2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

B.2a) $\begin{pmatrix} 3-2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$, (b) $\begin{pmatrix} a-1 \\ 5-2 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} a-1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}}$

C.1a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$

b) $|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 14^2 + 2^2} = \underline{\underline{15}}$

C.2) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 0-2 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\vec{AB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \underline{\underline{7}}$

C.3) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5+1 \\ 5-3 \\ 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = 6$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 6-3 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1+5 \\ 6-5 \\ 1-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-8)^2} = 9$

$u = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| = 6 + 5 + 9 = \underline{\underline{20}}$

C.4) $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + (-2)^2 + 25} = \sqrt{x^2 + 29} = 15$

$\xrightarrow{\text{quadrieren}} x^2 + 29 = 225 \xrightarrow{-29} x^2 = 196 \rightarrow \underline{\underline{x = \pm 14}}$

C.5) $\left|\begin{pmatrix}-1-3\\3+4\\2+2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\7\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+7^2+4^2} = \underline{\underline{9}}$

D.1a) $k=2 \rightarrow \underline{\underline{\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\4\\-6\end{pmatrix}}}$, $k=-5 \rightarrow \underline{\underline{\vec{a}=\begin{pmatrix}-30\\-10\\15\end{pmatrix}}}$

b) $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}6k\\2k\\-3k\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(6k)^2+(2k)^2+(-3k)^2}$

$= \sqrt{49k^2} = \pm 7k = 77 \xrightarrow{:7} \underline{\underline{k=\pm 11}}$

D.2a) $\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-6\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-3\\0+6\\-4-12\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\6\\-16\end{pmatrix}}}$

b) $\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\12\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-8+0\\0-4+12\\-5+0+6\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-3\\8\\1\end{pmatrix}}}$

D.3) $z(t) = 8-32t = 0 \rightarrow 32t = 8 \rightarrow t = \underline{\underline{0.25}}$

$x(0.25) = 110 + 0.25 \cdot 240 = 170$

$y(0.25) = 30 - 0.25 \cdot 450 = -82.5$

D.4) $7+5k = 20+3k-4-k = 16+2k \xrightarrow[-2k]{-7} 3k = 9$

$\xrightarrow{:3} \underline{\underline{k=3}}$

E.1a) $x = 3-6 = -3$

$y = 0+4 = 4$

$z = -6+2 = -4$

b) $x = 3+2 = \underline{\underline{5}}$, $3 = y-6 \rightarrow y = \underline{\underline{9}}$

$0 = -2+2z \rightarrow z = \underline{\underline{1}}$

c) $4 = 2x-6 \xrightarrow{+6} 2x = 10 \rightarrow x = \underline{\underline{5}}$

$3 = -2-x-y = -7-y \rightarrow y = \underline{\underline{-10}}$

$-2 = 6-z \rightarrow z = \underline{\underline{8}}$

d) $\left|\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 2x-3y \quad\quad =1 \\ 1/2z \quad\quad\quad =1 \end{array}\right| \xrightarrow{\cdot 2} \underline{\underline{z=2}}$ $\quad x-2y=-1 \xrightarrow{\cdot 2} 2x-4y=-2$

$\rightarrow 2x = \underbrace{3y+1 = 4y-2}$

$\underline{\underline{y=3}} \rightarrow x-2y=x-6=-1 \xrightarrow{+6} \underline{\underline{x=5}}$

E.2a) $|\vec{a}| = \sqrt{(14k)^2+(2k)^2+(-5k)^2} = \sqrt{225k^2} = 15k$
$= 1 \rightarrow \underline{\underline{k=1/15}}$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{(7k)^2+(-4k)^2+(4k)^2} = \sqrt{81k^2} = 9k = 1 \rightarrow$
$\underline{\underline{k=1/9}}$

E.3a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2+t^2+16^2} = \sqrt{260+t^2} = 18 \xrightarrow{\text{quadr.}}$
$260+t^2 = 324 \rightarrow t^2 = 64 \rightarrow \underline{\underline{t=\pm 8}}$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{t^2+(-2t)^2+1^2} = \sqrt{5t^2+1} = 9 \xrightarrow{\text{quadr.}}$
$5t^2+1 = 81 \xrightarrow{-1} 5t^2 = 80 \xrightarrow{:5} t^2 = 16 \rightarrow \underline{\underline{t=\pm 4}}$

E.4a) $z = 0+20t-10t^2 = 0+20\cdot 0.8 - 5\cdot 0.8^2 = \underline{\underline{12.8}}$

b) $x = 3-t = 2.5 \rightarrow t=0.5$
$z = 0+20t-10t^2 = 0+20\cdot 0.5 - 5\cdot 0.5^2 = \underline{\underline{8.75}}$

c) $y = 2+8t = 8 \xrightarrow{-2} 8t = 6 \xrightarrow{:8} t = 0.75$
$z = 0+20t-10t^2 = 0+20\cdot 0.75 - 5\cdot 0.75^2 = \underline{\underline{12.2}}$

F.1a) $3\cdot 2+(-1)\cdot 4 = \underline{\underline{2}}$

b) $4\cdot(-1)+3c+10 = \underline{\underline{3c+6}}$

c) $c\cdot 1+2\cdot(c-1)+(-3)\cdot 2 = c+2c-2-6 = \underline{\underline{3c-8}}$

d) $0\cdot 3+(-2)\cdot 1+2\cdot(-1) = \underline{\underline{-4}}$

e) $(a+b)\cdot(a-b)+a\cdot(-a)+(-b)\cdot b = a^2-b^2-a^2-b^2 = \underline{\underline{-2b^2}}$

f) $3\cdot 1+(-4)\cdot z+2\cdot z = 3-4z+2z = \underline{\underline{3-2z}}$

F.2a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot c + 0\cdot c + 1\cdot(c-6) = 3c-6 = 0 \xrightarrow{+6} 3c = 6$
$\xrightarrow{:3} \underline{\underline{c=2}}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2c\cdot 3 + c\cdot 1 + 1\cdot 21 = 7c+21 = 0 \xrightarrow{-21} 7c = -21$
$\xrightarrow{:7} \underline{\underline{c=-3}}$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (c+4)\cdot(c-1) + 13\cdot 4 + c(3-c) = c^2+3c-4$
$+52+3c-c^2 = 6c+48 = 0 \xrightarrow{-48} 6c = -48 \xrightarrow{:6}$
$\underline{\underline{c=-8}}$

d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (c-5)\cdot(c+3) + (-1)\cdot(c-7) + (c-2)\cdot(c+5) =$
$c^2-2c-15-c+7+c^2+3c-10 = 2c^2-18 = 0 \xrightarrow[+18]{}$
$2c^2 = 18 \xrightarrow{:2} c^2 = 9 \longrightarrow \underline{\underline{c=\pm 3}}$

Formelsammlung Vektoren

Ortsvektor: $\overrightarrow{O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix} = \vec{r}_A$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$

Vektoraddition: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_x \pm b_x\\a_y \pm b_y\\a_z \pm b_z\end{pmatrix}$

Betrag (eines Vektors): $a = |\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Skalare Multiplikation (eines Vektors):

$$c \cdot \vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c \cdot a_x\\c \cdot a_y\\c \cdot a_z\end{pmatrix}$$

Linearkombination (von Vektoren):

$$p \cdot \vec{a} + q \cdot \vec{b} = p \cdot \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p \cdot a_x + q \cdot b_x\\p \cdot a_y + q \cdot b_y\\p \cdot a_z + q \cdot b_z\end{pmatrix}$$

Vektorgleichungen: $\vec{a} = \vec{b} \rightarrow \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}a_x = b_x\\a_y = b_y\\a_z = b_z\end{matrix}\right|$

Wenn zwei Vektoren gleich sind stimmen sie in jeder einzelnen Komponenten überein.

Gleichungs-system

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Eigenschaft: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Wenn das Skalarprodukt von zwei Vektoren gleich null ist stehen sie senkrecht aufeinander