Gymnasium Juventus

Schriftliche Zwischenprüfung

Fach: Mathematik NN

Zugelassene Hilfsmittel: Regelwerke der DMK/DPK, resp. DMK/DPK/DCK
Gemäss Weisungen der SMK, Stand 1. Juli 2011

Taschenrechner: Eines der zwei Modelle wie folgt:

- Casio FX-82 Solar
- Texas Instruments TI 30 eco RS

Dauer: 3h

Hinweise:

- Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht bewertet
- Unleserliches wird nicht bewertet
- Ergebnisse sollen deutlich gekennzeichnet (doppelt unterstrichen) werden
- Jede Aufgabe soll auf einem neuen Blatt Papier begonnen werden
- Der Gebrauch roter Farbstifte ist zu vermeiden

max. 59 P*

---

* Für die Note 6 muss nicht die maximale Punktzahl erreicht werden.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimme Nullstellen und Polstellen, sowie die Funktionsgleichung der schrägen Asymptote von

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 1}$$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Vier unabhängige Aufgaben:

a) Für welche Werte von a hat die quadratische Gleichung $a(x + 2)^2 + 40 = 5x^2$ reelle Lösungen?

b) Bestimme die Lösungsmenge im Bereich $0 \le x \le 360^\circ$ von $\sin(2x - 24^\circ) = \cos 40^\circ$

c) Bestimme die Lösungsmenge von $2x - 5 = \log_4(2 \cdot 8^{x+2})$

d) Von der kubischen Gleichung $x^3 - 8x^2 - bx + 60 = 0$ kennt man die Wurzel $x_1 = 1$. Bestimme den Parameter b und suche nach weiteren Wurzeln.

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A wie folgt: g: $2x - 3y - 15 = 0$ und $B\begin{pmatrix} 5 \\ -19 \end{pmatrix}$. Ein Punkt $C\begin{pmatrix} 15 \\ y \end{pmatrix}$ liegt auf g. Den Punkt A erhält man, wenn man B an g spiegelt. Einen vierten Punkt D erhält man, wenn man die Punkte A, B, C und D zu einem Parallelogramm ABCD ergänzt. Bestimme den

a) Punkt A
b) Punkt D
c) Den Winkel β im Parallelogramm ABCD ($\angle ABC$)
d) Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Ein Kreis k mit dem Mittelpunkt auf der Geraden g: $y = 2x$ geht durch die Punkte $A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme den Mittelpunkt und den Radius von k.
b) Die Sehne AB teilt den Kreis in zwei Kreisbögen der Länge b_1 und b_2. Es sei $b_1 > b_2$. Bestimme das Verhältnis von b_1 und b_2 wie folgt: $b_1 : b_2 = 1 : q$, $q = ?$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Für welchen Punkt B auf dem Graphen von $f(x) = e^x$ geht die Tangente t durch den Koordinatenursprung? Bestimme auch die Funktionsgleichung von t.
[Erläuterung: t berührt den Graphen von f im Punkt B].

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Die Gerade t verläuft parallel zur Geraden g: $2x – 9y + 5 = 0$ und berührt den Graphen von $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ im ersten Quadranten. Bestimme die Funktionsgleichung von t.

Aufgabe 7: (5 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des Rhomboids (Parallelogramm) mit der Seite $a = 20$ und den Diagonalen $e = 26$ und $f = 22$.

Aufgabe 8: (5 Punkte)

Drei Vektoren im Raum sind gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -14 \\ 35 \\ z \end{pmatrix}$
Bestimme die Grössen x und z so, dass **b** auf **a** senkrecht steht und **c** mit **a** einen Winkel von 30° einschliesst.

Aufgabe 9: (5 Punkte)

Bestimme Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und allenfalls Terrassenpunkte des Graphen von $f(x) = x \cdot (x – 4)^3$. Bestimme auch Bereiche, in denen die Funktion monoton fallend ist.

Musterlösungen ZP 2013
(Mathe NN)

1.) Zähler: $(x-5)\cdot(x+2)=0$

Nullstellen: $\underline{\underline{x_1 = 5,\ x_2 = -2}}$

Nenner: $x+1=0 \longrightarrow$ Polstelle: $\underline{\underline{x_3 = -1}}$

$(x^2-3x-10):(x+1) = x-4$

$\underline{x^2+x}$

$\quad -4x-10$

Schräge Asymptote: $\underline{\underline{y = x-4}}$

//

2.a) $(a-5)x^2 + 4ax + 4(a+10) = 0$

$D = 16a^2 - 16(a-5)(a+10) = -80(a-10) \geq 0$

$\longrightarrow a-10 \leq 0 \longrightarrow \underline{\underline{a \leq 10}}$

b) $u = 2x - 24° \rightarrow \sin u = \cos 40° = \sin 50°$

$\rightarrow u \in \begin{cases} \ldots, -310°, 50°, 410°, 770°, \ldots \\ \ldots, -230°, 130°, 490°, 850°, \ldots \end{cases}$

$130° \leftarrow 180° - 50°$

$\downarrow +24°$

$2x \in \begin{cases} \ldots, 74°, 434°, 794°, \ldots \\ \ldots, 154°, 514°, \ldots \end{cases}$

$\downarrow :2$

$\underline{\underline{x \in \{37°, 77°, 217°, 257°\}}}$

c) $2x - 5 = \log_4 2 + (x+2)\cdot \log_4 8$

$\log_4 2 = \lg 2/\lg 4 = 1/2,\ \log_4 8 = \lg 8/\lg 4 = 3/2$

$$2x-5=\frac{1}{2}+(x+2)\frac{3}{2} \xrightarrow{\cdot 2} 4x-10=1+3x+6$$

$$\rightarrow \underline{\underline{x=17}}$$

d) $b = 60+1-8 = \underline{\underline{53}}$

$$(x^3-8x^2-53x+60):(x-1)=x^2-7x-60$$
$$= (x-12)\cdot(x+5)$$

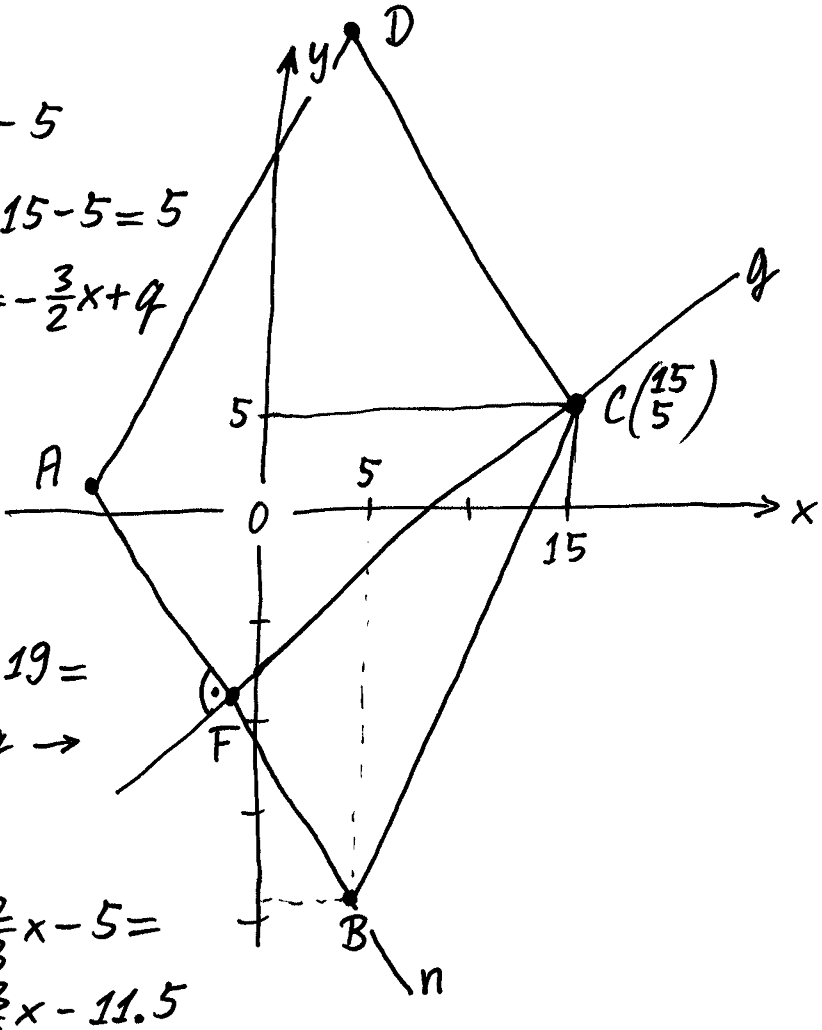
$$\begin{array}{l} x^3-x^2 \\ \hline -7x^2-53x+60 \\ -7x^2+7x \\ \hline -60x+60 \end{array}$$

$$\underline{\underline{x_2=12, \quad x_3=-5}}$$

3.a) $g: y=\frac{2}{3}x-5$

$\rightarrow y_C=\frac{2}{3}\cdot 15-5=5$

$n \perp g: y=-\frac{3}{2}x+q$



$B\binom{5}{-19}\in n: -19 = -\frac{3}{2}\cdot 5+q \rightarrow$

$q=-23/2$

$F=g\cap n: \frac{2}{3}x-5 = -\frac{3}{2}x-11.5$

$$\frac{13}{6}x=-13/2 \rightarrow x_F=-3, \; y_F=\frac{2}{3}\cdot(-3)-5=-7$$

$$F\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix} \longrightarrow \overrightarrow{B\begin{pmatrix}5\\-19\end{pmatrix} F\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_F + \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\5\end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{A\begin{pmatrix}-11\\5\end{pmatrix}}}$$

b) $$\vec{r}_D = \vec{r}_C + 2\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-16\\+24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\29\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D\begin{pmatrix}-1\\29\end{pmatrix}}}$$

c) $$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-11-5\\5+19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\24\end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{832} = 8\sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}15-5\\5+19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{676} = 26$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-16\\24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}}{208\sqrt{13}}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\underline{\underline{\beta = 56.31^\circ}}$$

d) $$A_{\square} = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-16\\24\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10\\24\\0\end{pmatrix}\right|$$

$$= |16\cdot 24 + 10\cdot 24| = \underline{624}$$

oder $$A_{\square} = |\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin\beta =$$

$$8\sqrt{13}\cdot 26\cdot\sqrt{1-4/13} = 8\sqrt{13}\cdot 26\cdot 3/\sqrt{13} = \underline{\underline{624}}$$

4.a) $$m_{AB} = \frac{6+1}{-8+1} = -1$$

$$M_{AB}\begin{pmatrix}-9/2\\5/2\end{pmatrix}$$

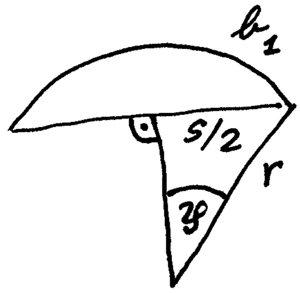
Mittelsenkrechte der Strecke AB:

$$m:\ y = x + q, \quad M_{AB}\begin{pmatrix}-9/2\\5/2\end{pmatrix} \in m: 5/2 = -\frac{9}{2} + q$$

$$m:\ y = x + 7$$

a) $m \cap g$: $x + 7 = 2x \rightarrow x = 7$ u. $y = 2x = 14$

$\rightarrow \underline{\underline{M\binom{7}{14}}}$, $r = \overline{M\binom{7}{14} A\binom{-1}{-1}} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \underline{\underline{17}}$



b) $s = \overline{A\binom{-1}{-1} B\binom{-8}{6}} = 7\sqrt{2}$

$\varphi = \arcsin(s/(2r)) =$

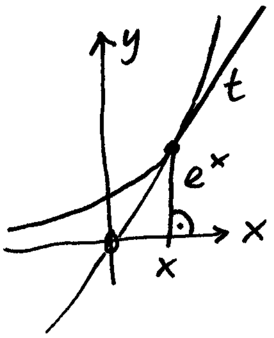
$\arcsin\left(\frac{7\sqrt{2}}{2 \cdot 17}\right) = 16.93°$

$\alpha = 2\varphi = 33.855°$

$b_1 : b_2 = \alpha : (360° - \alpha) = 1 : \left(\frac{360°}{\alpha} - 1\right) = \underline{\underline{1 : 9.63}}$

$\underline{\underline{q = 9.63}}$

5.)



$f'(x) = e^x$

$t: y = f'(x_0) \cdot x + q$

$q = 0 \rightarrow t: y = f'(x_0)x$

$B\binom{x_0}{e^{x_0}} \in t: e^{x_0} = e^{x_0} \cdot x_0$

$\rightarrow x_0 = 1$, $m = f'(x_0) = f'(1) = e^1$

$\underline{\underline{B\binom{1}{e}}}$, $\underline{\underline{t: y = e \cdot x}}$

6.) $g: y = \frac{2}{9}x + \frac{5}{9} \rightarrow m = \frac{2}{9}$

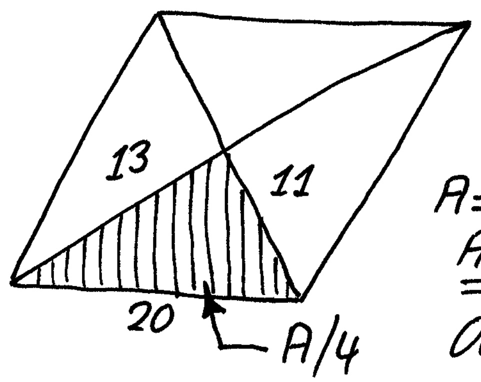
$f'(x) = \frac{x + 1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{9} \rightarrow (x+1)^2 = 9$

$\rightarrow x + 1 = \pm 3 \rightarrow x = -1 \overset{+}{(-)} 3 \rightarrow x = 2$

$f(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$, $f'(2) = \frac{2}{(2+1)^2} = \frac{2}{9} \rightarrow P\binom{2}{1/3} \in$

$t: \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \cdot 2 + q \rightarrow q = -1/9 \rightarrow \underline{\underline{t: y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}}}$

7.)



Heronische Formel:

$$s = \frac{13+11+20}{2} = 22$$

$$A = 4\sqrt{22\cdot(22-20)\cdot(22-13)\cdot(22-11)}$$

$$\underline{\underline{A = 264}}$$

Oder mit Cosinussatz.

8.) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\3\\-2\end{pmatrix} = x+12-6 = x+6 = 0 \rightarrow \underline{\underline{x=-6}}$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-14\\35\\z\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\sqrt{z^2+1421}} = \frac{3(z+42)}{\sqrt{26(z^2+1421)}}$$

$$\sqrt{26(z^2+1421)} = 2\sqrt{3}(z+42) \rightarrow z^2-72z+1127=0$$

$$\rightarrow z = 36 \pm 13 \rightarrow \underline{\underline{z_1 = 49}} \text{ und } \underline{\underline{z_2=23}}$$

Zwei Lösungen für z, resp. den Vektor $\vec{c}$

9.) $f'(x) = (x-4)^3 + 3x(x-4)^2$

$$= 4(x-1)(x-4)^2$$

$$f''(x) = 4(x-4)^2 + 8(x-1)(x-4) =$$

$$4(x-4)[x-4+2(x-1)] = 6(x-2)(x-4)$$

Nullstellen: $x(x-4)^3 = 0 \rightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ und $\underline{\underline{x_2=4}}$

Extrema: $4(x-1)(x-4)^2 = 0$

$f''(1) = 6\cdot(1-2)\cdot(1-4) > 0$, $f(1) = 1\cdot(-3)^3 =$

$-27 \rightarrow \underline{\underline{T\begin{pmatrix}1\\-27\end{pmatrix}}}$

$f''(4) = 6\cdot2\cdot0 = 0 \longrightarrow \underline{\underline{TP\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}}}$ ← Terrassenpunkt