Gymnasium Juventus

Schriftliche Zwischenprüfung

Fach: Mathematik NN

Zugelassene Hilfsmittel: Regelwerke der DMK/DPK, resp. DMK/DPK/DCK
Gemäss Weisungen der SMK, Stand 1. Juli 2011

Taschenrechner: Eines der zwei Modelle wie folgt:

- Casio FX-82 Solar
- Texas Instruments TI 30 eco RS

Dauer: 3h

Hinweise:

- Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht bewertet
- Unleserliches wird nicht bewertet
- Ergebnisse sollen deutlich gekennzeichnet (doppelt unterstrichen) werden
- Jede Aufgabe soll auf einem neuen Blatt Papier begonnen werden
- Der Gebrauch roter Farbstifte ist zu vermeiden

max. 54 P*

* Für die Note 6 muss nicht die maximale Punktzahl erreicht werden.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

„Der Spur nach": Mache eine optimale Zuordnung (1 : 1) von untenstehenden mathematischen Aussagen

Aussagen	Zuordnung
$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 2 \cdot (x - ½) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$	
Darstellung einer Geraden zur Berechnung des Abstands eines Punktes von der Geraden	
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$	
a^0	
Stelle an welcher sowohl Zähler- als auch Nennerpolynom einer gebrochen rationalen Funktion eine Nullstelle haben	
Höhen**satz des Euklid**	
Beziehung zwischen Vektoren	
Ergebnis beim Auflösen einer Gleichung, das die Probe nicht besteht	
Einsetzen von gefundenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung	
Die kleinste Primzahl	
Stelle an der die Steigung extremal ist	
Gleichung mit der Lösungsvariablen im Exponenten	

mit mathematischen Begriffen und Gesetzen wie folgt:

A: Ein Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras
B: Scheinlösung
C: Exponentialgleichung
D: 2
E: Behebbare Definitionslücke
F: Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren
G: Probe
H: Wendestelle
I: kollinear
J: 1
K: Hessesche Normalform
L: Mittelpunktgleichung (eines Kreises)

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben ist die Normalparabel p: $y = x^2$.

a) Bestimme einen Punkt P auf dem Graphen von p, wo die Steigung 4 beträgt.

b) Bestimme die Funktionsgleichung einer Geraden g, die den Graphen von p im Punkt P senkrecht schneidet.

c) Bestimme die zweite Stelle, wo g den Graphen von p schneidet.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Eine gebrochen rationale Funktion hat eine Polstelle bei $x = -1$ und zwei Nullstellen bei $x = \pm 2$. Die Funktion hat keine weiteren Polstellen und Nullstellen. Bestimme eine möglichst einfache Funktionsgleichung so, dass die Funktion eine schräge Asymptote der Steigung $\frac{1}{2}$ aufweist. Bestimme auch eine Gleichung für diese schräge Asymptote.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Ein Kreis k_1 mit Mittelpunkt $M_1\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ und Radius $r_1 = 5$ schneidet im ersten Quadranten (wo $x > 0$ und $y > 0$) im Punkt S_1 an der Stelle $x = 2$ einen zweiten gleich grossen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt auf der positiven x-Achse. Bestimme

a) den Mittelpunkt von k_2 (auf der positiven x-Achse).

b) den Schnittwinkel der Kreise im Punkt S_1.

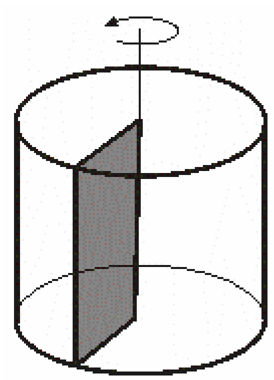
c) Die Länge der gemeinsamen Sehne von k_1 und k_2.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = B \cdot c^x$ schneidet die Gerade $g: y = 15x + 19$ an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Bestimme den Faktor B und die Basis c, sowie die von g und dem Graphen der Exponentialfunktion eingeschlossene Fläche.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Ein 36 cm langer Draht wird zunächst zu einem Rechteck gebogen. Das Rechteck wird um eine seiner Seiten gedreht, so dass die anderen Seiten die Oberfläche eines geraden Kreiszylinders überstreichen. Wie gross sind Durchmesser und Höhe des Kreiszylinders mit dem grösstmöglichen Volumen?



Aufgabe 7: (6 Punkte)

Berechne den Durchstosspunkt der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Ebene E: $2x - 3y + 4z + 6 = 0$. Bestimme auch den Neigungswinkel von g bezüglich E.

Aufgabe 8: (6 Punkte)

Zeige dass die Stammfunktion von $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ folgende Form hat: $F(x) = a\,(\ln|x|)^2$.
Bestimme alsdann den Parameter a, sowie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der positiven x-Achse und der vertikalen Geraden g: $x = e^2 \approx 2.718^2$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 9: (6 Punkte)

Bestimme den Hochpunkt von $f(x) = 3x^2 - x^3$. Die Tangente t_H berührt den Graphen der Funktion im Hochpunkt H. Berechne den Flächeninhalt der von t_H und vom Graphen der Funktion eingeschlossenen Fläche.

Musterlösungen

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Aussagen	Zuordnung
$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 2 \cdot (x - ½) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$	F
Darstellung einer Geraden zur Berechnung des Abstands eines Punktes von der Geraden	K
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$	L
a^0	J
Stelle an welcher sowohl Zähler- als auch Nennerpolynom einer gebrochen rationalen Funktion eine Nullstelle haben	E
Höhen**satz des Euklid**	A
Beziehung zwischen Vektoren	I
Ergebnis beim Auflösen einer Gleichung, das die Probe nicht besteht	B
Einsetzen von gefundenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung	G
Die kleinste Primzahl	D
Stelle an der die Steigung extremal ist	H
Gleichung mit der Lösungsvariablen im Exponenten	C

2a) $p: y' = 2x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow \underline{\underline{P\binom{2}{4}}}$

b) $m_n = -1/4 \rightarrow n: y = -\frac{x}{4} + q \rightarrow P\binom{2}{4} \in n: 4 = -\frac{2}{4} + q \rightarrow$
$q = 9/2 \rightarrow \underline{\underline{n: y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}}}$

c) $p \cap n: x^2 = (-x/4) + (9/2) \rightarrow x^2 + \frac{x}{4} - \frac{9}{2} = (x-2) \cdot (x - x_2) = 0$
$\rightarrow (-2) \cdot (-x_2) = -9/2 \rightarrow \underline{\underline{x_2 = -9/4 = -2.25}}$

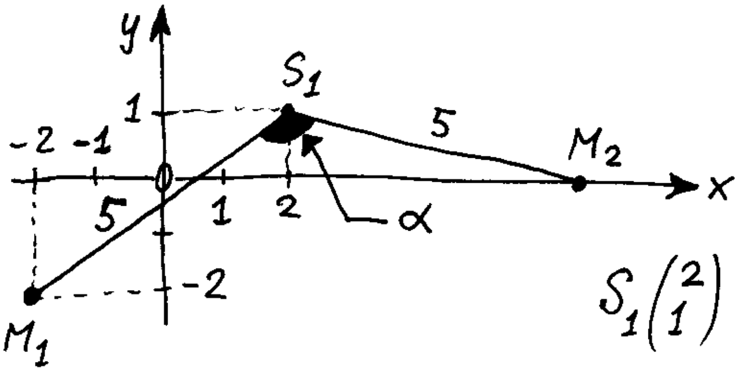
3.) $f(x) = \frac{a(x+2)\cdot(x-2)}{x+1} = \frac{a(x^2-4)}{x+1}$

Schräge Asymptote: $(ax^2-4a):(x+1) = ax - a$ $\leftarrow$ $\underline{\underline{a = 1/2}}$

$$\begin{array}{l} -\underline{(ax^2+ax)} \\ \quad -ax-4a \\ \quad -\underline{(-ax-a)} \\ \qquad -3a \end{array}$$

Asymptote: $\underline{\underline{a: y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}}$

4.)



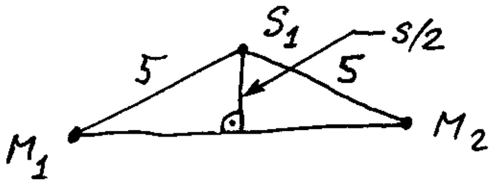
$S_1\binom{2}{1}$

a) $x_{M2} = 2 + \sqrt{5^2 - 1^2} = 2(1+\sqrt{6}) = 6.899 \rightarrow \underline{\underline{M_2\binom{6.899}{0}}}$

b) $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 131.59°$

$\varphi = 180° - \alpha = \underline{\underline{48.4°}}$

c) $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{[2(2+\sqrt{6})]^2 + 2^2} = 9.121$



$s = 2\sqrt{5^2 - (9.121/2)^2} = \underline{\underline{4.100}}$

5.) $x_1=-1 \rightarrow g: y=15\cdot(-1)+19=4=B/c,\ x_2=3 \rightarrow g: y=15\cdot 3+19=64$
$=Bc^3 \rightarrow B=4c=64/c^3 \rightarrow c^4=16 \rightarrow c=\underline{2},\ B=4c=\underline{\underline{8}}$

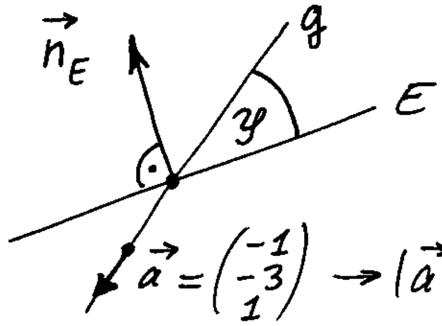
$$A=\int_{-1}^{3}\left[15x+19-8\cdot 2^x\right]dx=\left[\frac{15}{2}x^2+19x-\frac{8\cdot 2^x}{\ln 2}\right]\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$=\frac{15\cdot 9}{2}+19\cdot 3-\frac{8^2}{\ln 2}-\left[\frac{15}{2}\cdot 1+19\cdot(-1)-\frac{8\cdot 1/2}{\ln 2}\right]=\underline{\underline{49.44}}$$

6.) $z(r,h)=\pi r^2 h$
Randbedingung: $u=2(h+r) \rightarrow h=\frac{u}{2}-r=18-r$
$z(r)=\pi(18r^2-r^3),\ dz/dr=(36r-3r^2)\cdot\pi=0 \rightarrow$
$3r(12-r)\cdot\pi=0 \rightarrow r=12,\ h=18-r=6 \rightarrow$
Durchmesser 24cm
Höhe 6cm

7.) $E\cap g:\ 2(3-\lambda)-3(-2-3\lambda)+4(1+\lambda)+6=0$

$$22+11\lambda=0 \rightarrow \lambda=-2 \rightarrow \underline{\underline{S\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}}}\begin{array}{l}\leftarrow 3-\lambda\\ \leftarrow -2-3\lambda\\ \leftarrow 1+\lambda\end{array}$$



$$\vec{n}_E=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{1^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}$$

$$|\vec{n}_E|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{11\cdot 29}}\right)=\arccos\frac{-2+9+4}{\sqrt{319}}$$

$$=\arccos\frac{11}{\sqrt{11\cdot 29}}=\arccos\sqrt{\frac{11}{29}}=51.98^\circ$$

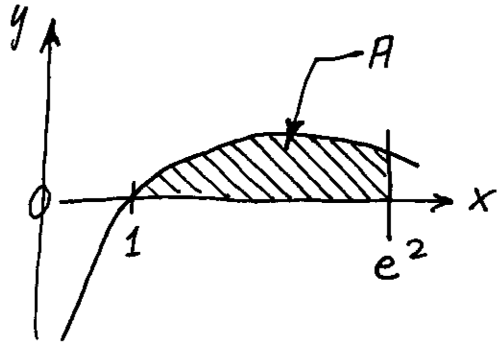
$$\varphi=90^\circ-\alpha=\underline{\underline{38.02^\circ}}$$

8.) $\frac{dF}{dx} = a \cdot 2 \ln|x| \cdot \frac{d}{dx} \ln|x| = a \cdot 2 \ln|x| \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{2a \ln|x|}{x}$ ← q.e.d. $\qquad \underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2}}$

Es muss $\frac{dF}{dx} = f(x) = \frac{\ln|x|}{x} = \frac{2a \ln|x|}{x}$

$\rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = 1/2$



$A = \int_1^{e^2} f(x)dx = F(e^2) - F(1)$

$= \frac{1}{2}(\ln^2|e^2|) - \frac{1}{2}\ln^2|1|$

$\underline{\underline{A = 2}}$

9.) $f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x) = 0$

$f''(x) = 6 - 6x = 6(1-x)$

$x_1 = 0 \rightarrow f''(0) = 6 > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt

$x_2 = 2 \rightarrow f''(2) = 6 \cdot (1-2) = -6 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt

$H\binom{2}{4} \rightarrow t_H : y = 4$

$t_H \cap G_f : 3x^2 - x^3 = 4 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

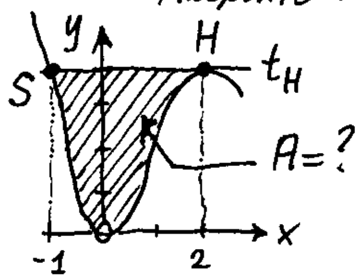
Abspalten von Wurzeln: $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x^2 - 4x + 4) = x + 1$

$\underline{-(x^3 - 4x^2 + 4x)}$

$x^2 - 4x + 4$

$\underline{x^2 - 4x + 4}$

$\emptyset$



$A = \int_{-1}^{2} [4 - 3x^2 + x^3] dx = \left(4x - x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{2}$

$= 4 \cdot 2 - 2^3 + \frac{2^4}{4} - \left[4 \cdot (-1) - (-1)^3 + \frac{(-1)^4}{4}\right] = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$