

# Gymnasium Juventus

## Schriftliche Zwischenprüfung

**Fach:** Mathematik NN (Passerelle)

**Zugelassene Hilfsmittel:** Regelwerke der DMK/DPK, resp. DMK/DPK/DCK  
Gemäss Weisungen der SMK, Stand 1. Juli 2011

Taschenrechner: Eines der zwei Modelle wie folgt:

- Casio FX-82 Solar
- Texas Instruments TI 30 eco RS

**Dauer:** 3h

### Hinweise:

- Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht bewertet
- Unleserliches wird nicht bewertet
- Ergebnisse sollen deutlich gekennzeichnet (doppelt unterstrichen) werden
- Jede Aufgabe soll auf einem neuen Blatt Papier begonnen werden
- Der Gebrauch roter Farbstifte ist zu vermeiden

max. 54 P\*

\* Für die Note 6 muss nicht die maximale Punktzahl erreicht werden.

**Aufgabe 1:** (6 Punkte)

„Der Spur nach“: Mache eine optimale Zuordnung (1 : 1) von untenstehenden mathematischen Aussagen

<b>Aussagen</b>	<b>Zuordnung</b>
$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$	
<b>Darstellung einer Geraden zur Berechnung des Abstands eines Punktes von der Geraden</b>	
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$	
$a^0$	
<b>Stelle an welcher sowohl Zähler- als auch Nennerpolynom einer gebrochen rationalen Funktion eine Nullstelle haben</b>	
<b>Höhensatz des Euklid</b>	
<b>Beziehung zwischen Vektoren</b>	
<b>Ergebnis beim Auflösen einer Gleichung, das die Probe nicht besteht</b>	
<b>Einsetzen von gefundenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung</b>	
<b>Die kleinste Primzahl</b>	
<b>Stelle an der die Steigung extremal ist</b>	
<b>Gleichung mit der Lösungsvariablen im Exponenten</b>	

mit mathematischen Begriffen und Gesetzen wie folgt:

- A: Ein Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras
- B: Scheinlösung
- C: Exponentialgleichung
- D: 2
- E: Behebbarer Definitionslücke
- F: Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren
- G: Probe
- H: Wendestelle
- I: kollinear
- J: 1
- K: Hessesche Normalform
- L: Mittelpunktgleichung (eines Kreises)



**Aufgabe 3:** (6 Punkte)

Eine gebrochen rationale Funktion hat eine Polstelle bei  $x = -1$  und zwei Nullstellen bei  $x = \pm 2$ . Die Funktion hat keine weiteren Polstellen und Nullstellen. Bestimme eine möglichst einfache Funktionsgleichung so, dass die Funktion eine schräge Asymptote der Steigung  $\frac{1}{2}$  aufweist. Bestimme auch eine Gleichung für diese schräge Asymptote.

**Aufgabe 4:** (6 Punkte)

Ein Kreis  $k_1$  mit Mittelpunkt  $M_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  und Radius  $r_1 = 5$  schneidet im ersten Quadranten (wo  $x > 0$  und  $y > 0$ ) im Punkt  $S_1$  an der Stelle  $x = 2$  einen zweiten gleich grossen Kreis  $k_2$  mit dem Mittelpunkt auf der positiven  $x$ -Achse. Bestimme

a) den Mittelpunkt von  $k_2$  (auf der positiven  $x$ -Achse).

b) den Schnittwinkel der Kreise im Punkt  $S_1$ .

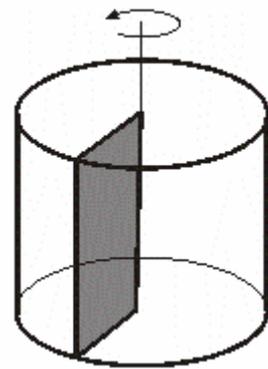
c) Die Länge der gemeinsamen Sehne von  $k_1$  und  $k_2$ .

**Aufgabe 5:** (6 Punkte)

Der Graph einer Exponentialfunktion  $f(x) = B \cdot c^x$  schneidet die Gerade  $g: y = 15x + 19$  an den Stellen  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 3$ . Bestimme den Faktor  $B$  und die Basis  $c$ , sowie die von  $g$  und dem Graphen der Exponentialfunktion eingeschlossene Fläche.

**Aufgabe 6:** (6 Punkte)

Ein 36 cm langer Draht wird zunächst zu einem Rechteck gebogen. Das Rechteck wird um eine seiner Seiten gedreht, so dass die anderen Seiten die Oberfläche eines geraden Kreiszylinders überstreichen. Wie gross sind Durchmesser und Höhe des Kreiszylinders mit dem grösstmöglichen Volumen?



**Aufgabe 7:** (6 Punkte)

Gegeben sind drei Vektoren wie folgt:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Bestimme einen vierten Vektor  $\vec{d}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wie folgt:  
 $\vec{d} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$  so, dass  $\vec{d}$  und  $\vec{c}$  aufeinander senkrecht stehen.

**Aufgabe 8:** (6 Punkte)

Zeige dass die Stammfunktion von  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$  folgende Form hat:  $F(x) = a(\ln|x|)^2$ .

Bestimme alsdann den Parameter  $a$ , sowie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von  $f$ , der positiven  $x$ -Achse und der vertikalen Geraden  $g: x = e^2 \approx 2.718^2$  eingeschlossen wird.



## Musterlösungen

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

Aussagen	Zuordnung
$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$	F
Darstellung einer Geraden zur Berechnung des Abstands eines Punktes von der Geraden	K
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$	L
$a^0$	J
Stelle an welcher sowohl Zähler- als auch Nennerpolynom einer gebrochen rationalen Funktion eine Nullstelle haben	E
Höhensatz des Euklid	A
Beziehung zwischen Vektoren	I
Ergebnis beim Auflösen einer Gleichung, das die Probe nicht besteht	B
Einsetzen von gefundenen Lösungen in die ursprüngliche Gleichung	G
Die kleinste Primzahl	D
Stelle an der die Steigung extremal ist	H
Gleichung mit der Lösungsvariablen im Exponenten	C

$$2a) \quad p: y' = 2x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow \underline{\underline{P\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)}}$$

$$b) \quad m_n = -\frac{1}{4} \rightarrow n: y = -\frac{x}{4} + q \rightarrow P\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \in n: 4 = -\frac{2}{4} + q \rightarrow q = \frac{9}{2} \rightarrow \underline{\underline{n: y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}}}$$

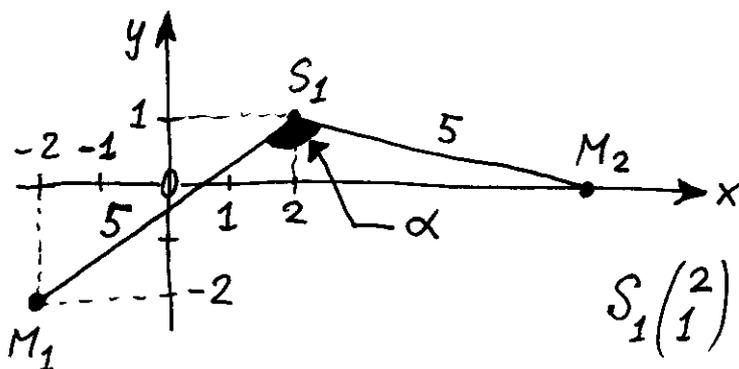
$$c) \quad p \cap n: x^2 = \left(-\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) \rightarrow x^2 + \frac{x}{4} - \frac{9}{2} = (x-2) \cdot (x-x_2) = 0 \\ \rightarrow (-2) \cdot (-x_2) = -\frac{9}{2} \rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\frac{9}{4} = -2.25}}$$

$$3.) f(x) = \frac{a(x+2) \cdot (x-2)}{x+1} = \frac{a(x^2-4)}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Schräge Asymptote: } (ax^2-4a) : (x+1) &= ax - a \\ &\quad - (ax^2 + ax) \qquad \qquad \qquad \uparrow a = \underline{\underline{1/2}} \\ &\quad \quad \quad -ax - 4a \\ &\quad \quad \quad - (-ax - a) \\ &\quad \quad \quad \quad \quad -3a \end{aligned}$$

$$\text{Asymptote: } a: \underline{\underline{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}}$$

4.)

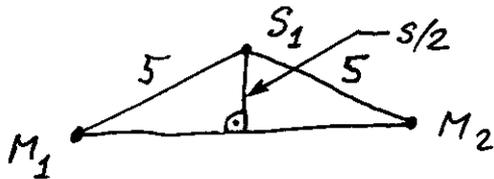


$$a) x_{M_2} = 2 + \sqrt{5^2 - 1^2} = 2(1 + \sqrt{6}) = 6.899 \rightarrow \underline{\underline{M_2 \begin{pmatrix} 6.899 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$b) \alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 131.59^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = \underline{\underline{48.4^\circ}}$$

$$c) |\vec{M_1 M_2}| = \sqrt{[2(2 + \sqrt{6})]^2 + 2^2} = 9.121$$



$$s = 2 \sqrt{5^2 - (9.121/2)^2} = \underline{\underline{4.100}}$$

$$5.) x_1 = -1 \rightarrow g: y = 15 \cdot (-1) + 19 = 4 = B/c, x_2 = 3 \rightarrow g: y = 15 \cdot 3 + 19 = 64 = Bc^3 \rightarrow B = 4c = 64/c^3 \rightarrow c^4 = 16 \rightarrow c = \underline{\underline{2}}, B = 4c = \underline{\underline{8}}$$

$$A = \int_{-1}^3 [15x + 19 - 8 \cdot 2^x] dx = \left[ \frac{15}{2} x^2 + 19x - \frac{8 \cdot 2^x}{\ln 2} \right] \Big|_{-1}^3$$

$$= \frac{15 \cdot 9}{2} + 19 \cdot 3 - \frac{8^2}{\ln 2} - \left[ \frac{15 \cdot 1}{2} + 19 \cdot (-1) - \frac{8 \cdot 2}{\ln 2} \right] = \underline{\underline{49.44}}$$

---

$$6.) z(r, h) = \pi r^2 h$$

$$\text{Randbedingung: } u = 2(h+r) \rightarrow h = \frac{u}{2} - r = 18 - r$$

$$z(r) = \pi (18r^2 - r^3), \quad dz/dr = (36r - 3r^2) \cdot \pi = 0 \rightarrow$$

$$3r(12-r) \cdot \pi = 0 \rightarrow r = 12, h = 18 - r = 6 \rightarrow$$

Durchmesser	24 cm
Höhe	6 cm

---

$$7.) \vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 + 2\lambda \\ 7 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 - 2\lambda + 21 - 3\lambda = 25 - 5\lambda = 5(5 - \lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 5 \rightarrow$$

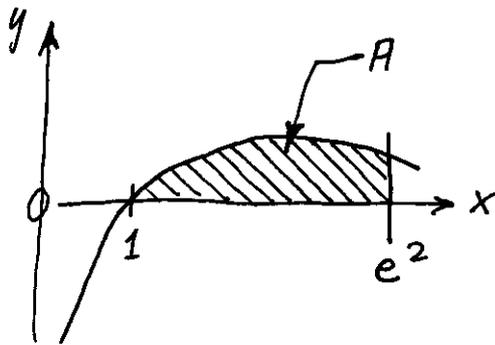
$$\underline{\underline{\vec{d} = \vec{a} + 5\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$8.) \quad \frac{dF}{dx} = a \cdot 2 \ln|x| \cdot \frac{d}{dx} \ln|x| = a \cdot 2 \ln|x| \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2a \ln|x|}{x} \leftarrow \text{q.e.d.} \quad \underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2}}$$

$$\text{Es muss } \frac{dF}{dx} = f(x) = \frac{\ln|x|}{x} = \frac{2a \ln|x|}{x}$$

$$\rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = 1/2$$



$$A = \int_1^{e^2} f(x) dx = F(e^2) - F(1)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2|e^2|) - \frac{1}{2}\ln^2|1|$$

$$\underline{\underline{A = 2}}$$

$$9a) \quad f_a'(x) = \frac{3x^2}{a} - 2x + 4, \quad f_a''(x) = \frac{6x}{a} - 2 = 0 \rightarrow x_w = a/3$$

$$f_a(x_w) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{27}a^2 = 4x_w - \frac{2}{3}x_w^2 \rightarrow \text{Ortskurve:}$$

$$\underline{\underline{y = 4x - \frac{2}{3}x^2}}$$

$$b) \quad \frac{d}{dx} \left( 4x - \frac{2}{3}x^2 \right) = 4 - \frac{4}{3}x = 0 \rightarrow x = x_w = \frac{a}{3} = 3 \rightarrow$$

$$\underline{\underline{a = 9}}$$