Peter Senn, Ph.D.

www.mathepauker.com

1. Teil: Analysis in der Ebene

Inhalt

Analysis, Seite 1:

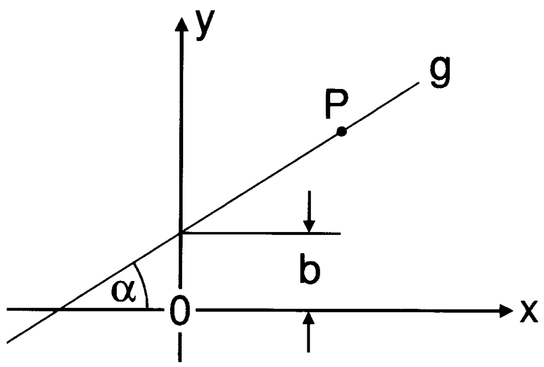
1.1. Geradengleichung aus Steigung und y-Achsenabschnitt

In dieser Form lautet die Gleichung der Geraden wie folgt:

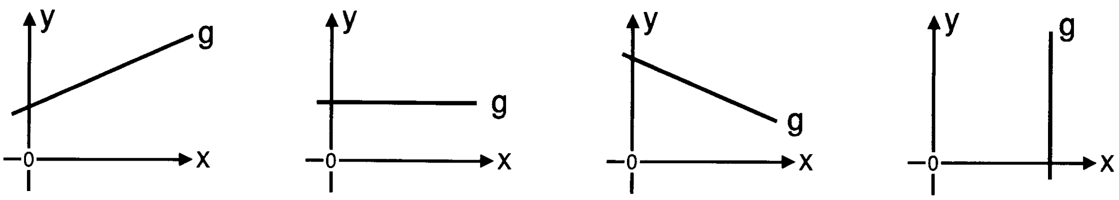
$$g\colon y = m\,x + b$$

Dabei ist m die **Steigung** oder der Tangens des **Steigungswinkels** α, d.h.

$$m = \tan\alpha$$



Der Steigungswinkel ist der Schnittwinkel der Geraden mit der x-Achse.
Es gilt $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.



$\alpha > 0$	$\alpha = 0$	$\alpha < 0$	$\alpha = \pm 90^\circ$
$m > 0$	$m = 0$	$m < 0$	$\lvert m \rvert \to \infty$
Bsp.: $y = 2x - 1$	Bsp.: $y = 7$	Bsp.: $y = 3 - 2x$	Bsp.: $x = 4$

Eine Gleichung der Form $y = mx$ stellt eine Gerade dar, die durch den Koordinatenursprung geht. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, dann erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung. Eine Geradengleichung der Form

$$y = mx + b$$

bezeichnen wir fortan als **Normalform**. Jede Gleichung der Form $ax + by + d = 0$ oder $ax + by = d$ stellt jedoch eine Gerade in der Ebene dar. Gleichungen dieser Art werden fortan als **Koordinatengleichungen** bezeichnet. Sind die zwei Geraden g_1 und g_2 parallel, so sind ihre Steigungen m_1 und m_2 gleich. Umgekehrt gilt, dass zwei Geraden parallel sind, falls ihre Steigungen gleich sind, d.h. $m_1 = m_2 \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$.

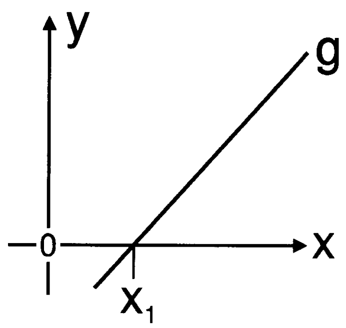
1. Beispiel: Es sei eine Gerade g gegeben wie folgt: $g\colon y = 2x - 7$. Bestimme ob die Punkte $P\binom{5}{3}$ und $Q\binom{3}{-3}$ auf g liegen.

Lösung: Weil $3 = 2 \cdot 5 - 7$ gilt $P \in g$, wohingegen $Q \notin g$, weil $-3 \neq 2 \cdot 3 - 7$.

Analysis, Seite 5:

1.2. Nullstelle einer Geraden

Die Nullstelle x_1 oder den "x-Achsenabschnitt" einer Geraden g erhält man aus ihrer Gleichung, indem man für y den Wert Null einsetzt. Für g: $y = mx + b$ erhält man demzufolge $x_1 = -b/m$.



1. Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Geraden g, deren Gleichung gegeben ist wie folgt: g: $3x - 5y + 18 = 0$.

Lösung: Durch die Substitution $y \leftarrow 0$ erhält man $3x_1 + 18 = 0$. Auflösen nach x_1 ergibt $x_1 = -6$.

2. Beispiel: Bestimme die Gleichung einer Geraden g mit der Steigung $m = -2$ und einer Nullstelle bei $x_1 = 7$.

Lösung: Es gilt $b = -m x_1 = -(-2) \cdot 7 = 14$. Eine Gleichung für g lautet dann g: $y = 14 - 2x$.

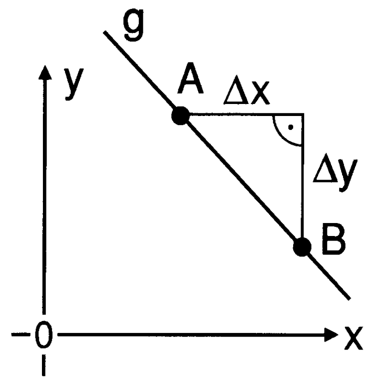
Analysis, Seite 6:

1.3. Gerade durch zwei Punkte

Es soll eine Gerade g durch zwei Punkte $A\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ gelegt werden. Die Gleichung von g wird in zwei Schritten erzeugt.

1. Schritt: Zunächst wird aus den Koordinaten der beiden Punkte A und B die Steigung von g berechnet wie folgt: $\Delta x = b_x - a_x$, $\Delta y = b_y - a_y$, $m = \Delta y / \Delta x = b_y - a_y / b_x - a_x$.

2. Schritt: In die Gleichung von g setzt man die Koordinaten von entweder A oder B ein und berechnet den y-Achsenabschnitt von g. Damit ist g vollständig bestimmt.



Beispiel: Bestimme eine Gleichung für die Gerade g durch zwei Punkte A und B wie folgt: $A\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir berechnen zunächst die Steigung wie folgt: $\Delta x = -3 - 2 = -5$, $\Delta y = -7 - 8 = -15$, $m = \Delta y / \Delta x = -15/(-5) = 3$. Damit haben wir für g eine Gleichung mit vorläufig unbestimmtem y-Achsenabschnitt. g: $y = 3x + b$. In diese Gleichung setzen wir die Koordinaten des Punktes A ein und erhalten $8 = 3 \cdot 2 + b$. Somit ist $b = 2$ und die vollständige Gleichung von g lautet g: $y = 3x + 2$.

Analysis, Seite 7:

1.4. Parallele und lotrechte Geraden

Parallele Geraden haben gleiche Steigungen. Stehen zwei Geraden g_1 und g_2 senkrecht aufeinander, so ist das Produkt ihrer Steigungen gleich -1, d.h.

$$m_1\, m_2 = -1 \;\leftrightarrow\; g_1 \perp g_2$$

Beispiel: Bestimme eine Gerade g_2 so, dass sie durch den Punkt $P\binom{1}{3}$ geht und zur Geraden g_1 senkrecht steht. Die Gerade g_1 ist gegeben wie folgt: g_1: $3x + 5y - 4 = 0$.

Lösung: Aus g_1: $y = (4 - 3x)/5$ erhält man $m_1 = -3/5$. Für die Steigung m_2 von g_2 erhält man folgendes: $m_2 = -1/m_1 = 5/3$. Dies ergibt g_2: $y = (5/3)\,x + b_2$. Weil $P \in g_2$ gilt $3 = (5/3) \cdot 1 + b_2$. Man erhält zunächst $b_2 = 4/3$ und schliesslich für g_2 folgendes: g_2: $y = (5x + 4)/3$ oder g_2: $5x - 3y + 4 = 0$.

Analysis, Seite 8:

1.5. Schnittpunkte von Geraden. 1. Teil

Der Schnittpunkt S von zwei Geraden g_1: $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und g_2: $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ist derjenige Punkt dessen Koordinaten beide Geradengleichungen erfüllen. Man kann die Geradengleichungen beider Geraden demzufolge als ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten wie folgt auffassen:

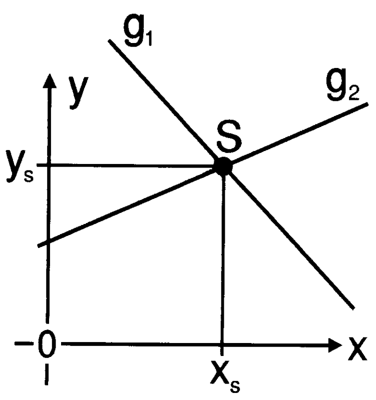
$$\left| \begin{array}{l} g_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ g_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array} \right|$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems entspricht der Schnittmenge der durch die Gleichungen für g_1 und g_2 bestimmten Punktmengen. Dementsprechend kann der Schnittpunkt mithilfe eines beliebigen für die Auflösung von linearen Gleichungssystemen geeigneten Verfahrens bestimmt werden. Die Berechnung des Schnittpunktes S mit den Koordinaten x_S und y_S kann in drei Schritten erfolgen wie folgt:

1. Schritt: Berechne die ***Determinante*** D wie folgt:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

wenn $D = 0$ verlaufen g_1 und g_2 parallel oder sie sind identisch. Dann gibt es keinen oder unendlich viele Schnittpunkte. In diesem Fall kann man die Berechnung an diesem Punkt abbrechen.



2. Schritt: Berechne zwei weitere Determinanten D_x und D_y wie folgt:

$$D_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} = -c_1 b_2 + c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = -a_1 c_2 + a_2 c_1$$

3. Schritt: Die Koordinaten des Schnittpunkts S können aus den Determinanten D, D_x und D_y berechnet werden wie folgt: $x_S = D_x/D$ und $y_S = D_y/D$.

Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2, wenn g_1: $x - 4y - 4 = 0$ und g_2: $3x + 8y + 8 = 0$.

Lösung: Man erhält $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 3 \cdot (-4) = 20$, $D_x =$

$\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - (-8) \cdot (-4) = 0$ und $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-8) - 3 \cdot 4 = -20$.

Daraus erhält man $x_S = D_x/D = 0/20 = 0$ und $y_S = D_y/D = -20/20 = -1$.

Für den Schnittpunkt S erhält man also $S\binom{0}{-1}$.

Analysis, Seite 9:

1.6. Die Punkt-Richtungs-Gleichung

Kennt man einen Punkt $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ auf der Geraden g, so gilt folgendes:

$$g: \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

oder

$$g: y = mx + y_1 - m x_1$$

In dieser Darstellung wird also die Kenntnis eines Punktes auf einer Geraden mit Steigung m berücksichtigt.

Beispiel: Bestimme die Gleichung einer Geraden g_1, welche parallel zu g_2 verläuft und durch den Punkt $P\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ geht, wenn g_2 gegeben ist wie folgt: g_2: y = 5 - 4x.

Lösung: Weil $g_1 \,||\, g_2$ gilt $m_1 = m_2 = -4$. Man erhält dann $g_1: y = -4x + 2 - (-4) \cdot 5$. Somit erhält man für g_1 folgendes: $g_1: y = 22 - 4x$.

Analysis, Seite 10:

1.7. Die Zweipunktegleichung

Sind zwei auf einer Gerade g liegende Punkte $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $P_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ bekannt, so ist die Zweipunktegleichung ein geeigneter Ansatz. Sie lautet im Prinzip gleich wie die Punkt-Richtungs-Gleichung

$$g\colon y = mx + y_1 - mx_1$$

wobei man die Steigung m aus den Koordinaten beider Punkte wie folgt erhält:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

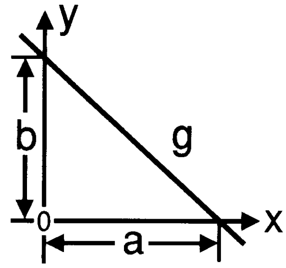
Beispiel: Bestimme die Geradengleichung der Seitenhalbierenden s_a des Dreiecks mit den Eckpunkte A, B und C wie folgt: $A\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Lösung: Den Mittelpunkt M_a der Seite a erhält man wie folgt: $M_a\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5 + 11) \\ \frac{1}{2}(-4 + 8) \end{pmatrix} \rightarrow$ $M_a\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für die Steigung m erhalten wir $m = \frac{2 - 5}{8 - 3} = \frac{-3}{5} = -0,6$. Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt dies folgendes: $g\colon -0,6x + 5 - (-0,6) \cdot 3$. Somit erhalten wir für g eine Gleichung wie folgt: $g\colon y = 6,8 - 0,6x$.

Analysis, Seite 11:

1.8. Achsenabschnittsform der Geradengleichung

Kennt man beide Achsenabschnitte a und b einer Geraden, so lässt sich die Geradengleichung zunächst am einfachsten in der Achsenabschnittsform formulieren. Diese lautet



$$g: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Beispiel: Erstelle die Geradengleichung einer Geraden g, wenn diese die x-Achse bei $x = 5$ und die y-Achse bei $y = -3$ schneidet.

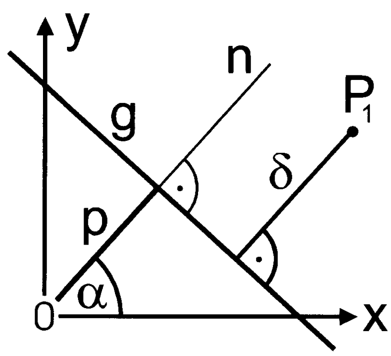
Lösung: Die Achsenabschnitte sind $a = 5$ und $b = -3$. Man erhält also zunächst folgendes: $g: \frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$. Durch Umformung erhält man $g: y = 0{,}6x - 3$.

Analysis, Seite 12:

1.9. Die Hessesche Normalform

Die Hessesche Normalform der Geradengleichung lautet wie folgt:

$$g: x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$



Dabei ist α der Winkel zwischen der Normalen n auf die Gerade g und der x-Achse. Die Grösse p ist im Betrag gleich dem Abstand des Koordinatenursprungs von der Geraden. Allgemein lässt sich der Abstand δ eines beliebigen Punktes $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ aus der Hesseschen Normalform der Geraden berechnen wie folgt:

$$d_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p$$

wobei $\delta = |d_1|$. Die Gerade g teilt die Ebene in zwei sogenannte Halbebenen. Falls $d_1/p > 0$ liegen P_1 und der Koordinatenursprung auf verschiedenen Seiten von g. Falls $d_1/p < 0$ liegen Koordinatenursprung und P_1 in derselben Halbebene. Offensichtlich gilt $P_1 \in g$, wenn $d_1 = 0$. Die Hessesche Normalform lässt sich aus der üblichen Darstellung $g: y = mx + b$ in zwei Schritten gewinnen.

1. Schritt: Durch Umformen erhalten wir aus $g: y = mx + b$ folgendes:

$$g: mx - y + b = 0$$

2. Schritt: Wir dividieren beide Seiten durch $\sqrt{1 + m^2}$ und erhalten

$$g: \frac{mx - y + b}{\sqrt{1 + m^2}} = 0$$

oder

$$g: x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

wobei $\cos\alpha = \dfrac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{1 + m^2}}$ und $p = \dfrac{-b}{\sqrt{1 + m^2}}$.

Analysis, Seite 13:

Aus der Koordinatengleichung einer Geraden erhält man ihre Hessesche Normalform ganz einfach, indem man durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ dividiert. Dies ergibt

$$g: ax + by + c = 0 \xrightarrow{:\sqrt{a^2+b^2}} g: \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Den Abstand eines Punktes $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ von g erhält man durch Einsetzen seiner Koordinaten in die Hessesche Normalform von g wie folgt:

$$d_1 = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und wie zuvor gilt für den Abstand δ des Punktes P_1 von g folgendes: $\delta = |d_1|$.
Punkte für welche d_1 das gleiche Vorzeichen hat wie c liegen auf derselben Halbebene wie der Koordinatenursprung.
Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind, liegen auf den beiden senkrecht zueinander stehenden Winkelhalbierenden. Die Hesseschen Normalformen zweier sich schneidenden Geraden seien

$$g_1: \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 0 \text{ und } g_2: \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

Der Abstand eines Punktes P_1 mit den Koordinaten x_1 und y_1 von g_1 und g_2 erhält man durch Einsetzen von x_1 und y_1 in die Geradengleichungen in der Hesseschen Normalform. Man erhält also zunächst

$$d_1 = \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = 0$$
$$d_2 = \frac{a_2x_2 + b_2y_2 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

Man kann die mit den Hesseschen Normalformen berechneten Abstände eines Punktes von den Geraden im Betrag gleichsetzen, d.h. wir schreiben $d_1 = \pm d_2$. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden w_1 und w_2 von zwei sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 erhält man dann aus ihrer Hesseschen Normalform wie folgt:

$$w_1: \left(\frac{a_1}{D_1} + \frac{a_2}{D_2}\right)x + \left(\frac{b_1}{D_1} + \frac{b_2}{D_2}\right)y + \frac{c_1}{D_1} + \frac{c_2}{D_2} = 0$$

und

$$w_2: \left(\frac{a_1}{D_1} - \frac{a_2}{D_2}\right)x + \left(\frac{b_1}{D_1} - \frac{b_2}{D_2}\right)y + \frac{c_1}{D_1} - \frac{c_2}{D_2} = 0,$$

wobei $D_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ und $D_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$.

Analysis, Seite 16:

1.10. Gleichung des Lots auf eine Gerade

Es sei α der Steigungswinkel der Geraden g. Der Steigungswinkel einer zu g senkrecht stehenden Geraden n beträgt dann $\alpha_n = \alpha \pm 90^o$, wobei $-90^o \leq \alpha_n \leq 90^o$. Man kann zeigen, dass $\tan \alpha = -\cot(\alpha \pm 90^o) = -1 / \tan(\alpha \pm 90^o)$. Somit gilt folgendes:

$$\tan \alpha \cdot \tan \alpha_n = -1$$

d.h.

$$m \cdot m_n = -1$$

Aus der Gleichung einer Geraden g wie folgt: g: y = mx + b erhält man also Gleichungen von Geraden n, die senkrecht stehen zu g wie folgt: n: y = q - (x/m).

Beispiel: Bestimme die Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ für $A\binom{5}{2}$ und $B\binom{-1}{10}$.

Lösung: Die Steigung m der Strecke $\overline{AB}$ ist $m = \frac{10 - 2}{-1 - 5} = \frac{-4}{3}$. Die Steigung m_n des Lots erhält man wie folgt: $m_n = -1/m = ¾$. Für die Gleichung von n erhält man also ein vorläufiges Ergebnis wie folgt: n: y = ¾x + q. Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ liegt auf n. $M\binom{2}{6} \in$ n: 6 = ¾ · 2 + q. Daraus erhält man q = 4,5. Dies ergibt die vollständige Gleichung für n wie folgt: n: y = ¾x + 4,5.

1.11. Schnittpunkte von Geraden. 2. Teil

Die Gleichungen zweier Geraden können als System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten aufgefasst werden. Die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden erfüllen beide Geradengleichungen. Sie stellen somit die Lösung des linearen Gleichungssystems dar. Das Gleichungssystem kann mit einer geeigneten Methode gelöst werden. Für die Koordinaten x_S und y_S des Schnittpunkts $S = g_1 \cap g_2$ mit g_1: $y = m_1 x + b_1$ und g_2: $y = m_2 x + b_2$ erhält man folgendes: $x_S = -(b_1 - b_2)/(m_1 - m_2)$ und $y_S = (m_1 b_2 - m_2 b_1)/(m_1 - m_2)$.

Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt S der Geraden g_1 und g_2 mit den Geradengleichungen g_1: 2x - 3y + 5 = 0 und g_2: 3x - y - 3 = 0.

Lösung: Mit der sogenannten "Gleichsetzungsmethode" erhalten wir 3y = 2x + 5 = 9x - 9. Daraus erhalten wir zunächst x = 2. Durch Einsetzen erhalten wir y = 3x - 3 = 3. Der Schnittpunkt ist also $S\binom{2}{3}$.

Analysis, Seite 18:

1.12. Schnittwinkel von zwei Geraden

Den Schnittwinkel φ zweier Geraden g_1 und g_2 mit Steigungen m_1, resp. m_2 erhält man wie folgt:

$$\varphi_o = |\alpha_1 - \alpha_2| = |\arctan(m_1) - \arctan(m_2)| = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Für den Schnittwinkel φ gilt folgendes: $0 \leq \varphi \leq 90^o$. Deshalb ist $\varphi = \varphi_o$, wenn $\varphi \leq 90^o$ und $\varphi = 180^o - \varphi_o$, wenn $\varphi > 90^o$.

Beispiel: Bestimme den Schnittwinkel φ von zwei Geraden g_1 und g_2 mit Geradengleichungen wie folgt: g_1: $3x - 2y + 5 = 0$ und g_2: $2x - 5y - 1 = 0$.

Lösung: Für die Steigungen der Geraden erhält man folgendes: $m_1 = 3/2 = 1{,}5$ und $m_2 = 2/5 = 0{,}4$. Dies ergibt einen Schnittwinkel wie folgt: $\varphi = \arctan|(1{,}5 - 0{,}4)/(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}4)| = \arctan(0{,}6875) = 34{,}51^o$.

Analysis, Seite 19:

1.13. Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene

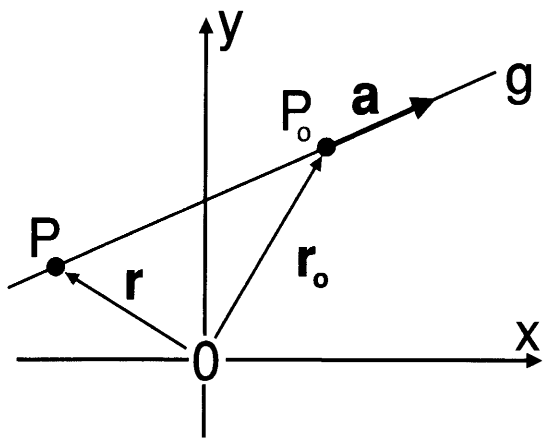
Geraden in der Ebene lassen sich mthilfe eines Parameters darstellen wie folgt:

$$\left| \begin{array}{l} x = x_o + \lambda a_x \\ y = y_o + \lambda a_y \end{array} \right|$$

Obiges System von zwei linearen Gleichungen kann man auch mit Vektoren darstellen wie folgt:

$$g: \mathbf{r} = \mathbf{r_o} + \lambda \mathbf{a}$$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$



Die Vektoren und der Parameter λ in dieser Gleichung haben dann folgende anschauliche Bedeutung:

r: Ortsvektoren von Punkten auf der Geraden g.
$\mathbf{r_o}$: Ortsvektor eines einzelnen Punktes P_o auf der Geraden g.
λ: Streckungsfaktor.
a: Richtungsvektor von g.

1.13.1. Steigung der Geraden aus dem Richtungsvektor

Die Steigung m einerGeraden g erhält man aus ihrem Richtungsvektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wie folgt:

$$m = \tan \alpha = \frac{a_y}{a_x}$$

Beispiel: Bestimme die Normalform der Geradengleichung für eine Gerade g, deren Parameterdarstellung gegeben ist wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Aus obigen Ausführungen ergibt sich folgender Ansatz:

$$g: y = \frac{3}{4} x + b$$

Den y-Koordinatenabschnitt b können wir mithilfe des Aufhängepunkts von g bestimmen

$$P_o\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in g: 5 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$$

Wir erhalten für g folgendes: $g: y = \frac{3}{4} x + \frac{11}{4}$.

Analysis, Seite 20:

1.13.2. Das Lot auf eine Gerade

Die Steigung des Lots auf eine Gerade mit der Steigung m ist bekanntlich gleich dem negativen Kehrwert von m. Demzufolge erhält man aus der Parameterdarstellung von g wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Die Steigung des Lots wie folgt:

$$m_\perp = \frac{1}{m} = -\frac{a_x}{a_y}$$

Die Parameterdarstellung des Lots n können wir wie folgt formulieren:

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$$

Dabei ist $P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ der „Aufhängepunkt" des Lots, d.h. ein Punkt, von dem man weiss, dass er auf dem Lot liegt.

Beispiel: Von einem rechtwinklig gleichschenligen Dreieck (mit a = b) kennt man die Eckpunkte A und B, sowie die Höhe h_c wie folgt:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } h_c = 13.$$

Lösung: Wir bestimmen zunächst den Mittelpunkt M_c der Strecke $\overline{AB}$ wie folgt:

$$M_c\begin{pmatrix} ½(1+6) \\ ½(-7+5) \end{pmatrix} \rightarrow M_c\begin{pmatrix} 3.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Als Richtungsvektor **a** der Geraden durch A und B nehmen wir den Verbindungsvektor wie folgt:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{r_B} - \mathbf{r_A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ lautet dann wie folgt:

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen dann einen Punkt auf n im Abstand h_c vom Punkt M_c wie folgt:

$$\sqrt{(3.5 - 12\lambda - 3.5)^2 + (-1 + 5\lambda - (-1))^2} = \sqrt{(12\lambda)^2 + (5\lambda)^2} = 13\lambda = \pm 13.$$

Man erhält zwei Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Für $\lambda_1 = 1$ liegen die Punkte A, B und C im „Gegenuhrzeigersinn". Man erhält folgendes:

$$\mathbf{r_C} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow C\begin{pmatrix} -8.5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Analysis, Seite 21:

1.13.3. Umformung einer Parameterdarstellung in eine Koordinatengleichung

Wir schreiben die Parameterdarstellung wie folgt:

$$\left| \begin{array}{l} x = x_o + \lambda a_x \\ y = y_o + \lambda a_y \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow \lambda = (x - x_o)/a_x \\ \rightarrow \lambda = (y - y_o)/a_y \end{array}$$

Wenn wir in beiden Gleichungen λ isolieren und gleichsetzen erhalten wir

$$g: \frac{x - x_o}{a_x} = \frac{y - y_o}{a_y}$$

oder

$$g: m = \frac{a_y}{a_x} = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

Daraus erhält man eine Koordinatengleichung für g wie folgt:

$$g: a_y x - a_x y - a_y x_o + a_x y_o = 0$$

Die Geradengleichung für g in der Normalform lautet dann

$$g: y = \frac{a_y}{a_x}(x - x_o) + y_o$$

Beispiel: Bestimme eine Koordinatengleichung der Geraden g aus ihrer Parameterdarstellung wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung: Gemäss obiger Formel für die Koordinatengleichung gilt folgendes:

$$g: 7x - (-4)y - 7 \cdot 3 + (-4) \cdot (-2) = 0 \rightarrow g: 7x + 4y - 13 = 0$$

Analysis, Seite 36:

2. Parabeln

Die Gleichung einer Parabel sei

$$p\colon y = ax^2 + bx + c$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$p\colon y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

Dies entspricht einer Form $p\colon y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$, die man als ***Scheitelpunktsgleichung*** der Parabel bezeichnet. Dabei sind x_S und y_S die Koordinaten des Scheitelpunkts. Durch Koeffizientenvergleich erhält man $x_S = -b/2a$ und $y_S = c - x_S^2$.

Als ***Normalparabel*** wird im allgemeinen die Parabel $p\colon y = x^2$ bezeichnet. Parabeln der Art $p\colon y = (x - x_S)^2 + y_S$ werden als „verschobene Normalparabeln" bezeichnet. Die Steigung der Parabel als Funktion von x ist

$$p\colon y' = 2ax + b$$

Die Steigungsfunktion wird auch als ***Ableitung*** bezeichnet. Im Scheitelpunkt der Parabel ist die Steigung gleich null. Für die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts S gilt dann folgendes:

$$x_S = \frac{-b}{2a}$$

Es sei $B\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ der Berührungspunkt einer Tangenten t an die Parabel. Die Gleichung dieser Tangenten kann dann wie folgt formuliert werden:

$$t\colon y'(x_o) = 2ax_o + b = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

oder umgeformt in die Normalform

$$t\colon y = y'(x_o)\,x - x_o y'(x_o) + y_o$$

Ähnlich erhält man die Gleichung für eine „Normale" zu einer Parabel. Als „Normale" bezeichnet man eine Gerade, welche die Parabel senkrecht schneidet. Die Steigung der Normalen ist gleich dem negativen Kehrwert der Steigung der Kurve im Schnittpunkt $P\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$.

$$n\colon \frac{-1}{y'(x_o)} = \frac{-1}{2ax_o + b} = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

Analysis, Seite 37:

Kennt man zwei oder drei Punkte $P_1\binom{x_1}{y_1}$ und $P_2\binom{x_2}{y_2}$ auf einer Parabel p, so ist es zuweilen vorteilhaft für die Parabel und ihre Steigung einen Ansatz wie folgt zu verwenden:

$$p:\ y(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) + B\,(x - x_1) + C\,(x - x_2)$$
$$p:\ y'(x) = 2ax + B + C - a\,(x_1 + x_2)$$

Offensichtilich gilt $B = -y_2/(x_1 - x_2)$ und $C = y_1/(x_1 - x_2)$. Man erhält dann für die Parabel und ihre Ableitung folgendes:

$$p:\ y(x) = ax^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - a\,(x_1 + x_2)\right)x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} + a x_1 x_2$$
$$p:\ y'(x) = 2ax + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - a\,(x_1 + x_2)$$

1. Beispiel: Von einer Parabel kennt man zwei Punkte P_1 und P_2 und die Steigung bei $x = 4$ wie folgt: $P_1\binom{-3}{5}$ und $P_2\binom{4}{26} \in p$, und $y'(4) = 17$.

Lösung: Mit dem Ansatz $p:\ y = a\,(x + 3)\,(x - 4) + B\,(x + 3) + C\,(x - 4)$ und $y' = 2ax + B + C - a$ erhält man folgendes: $P_1\binom{-3}{5} \in p$: $5 = -7C$. $P_2\binom{4}{26} \in p$: $26 = 7B$. $y'(4) = 8a + B + C - a = 7a + B + C = 17$. Man erhält sofort $B = 26/7$ und $C = -5/7$. Eingesetzt in die Gleichung für die Ableitung bei $x = 4$ erhält man $7a + B + C = 7a + 3 = 17$ und daraus $a = 2$. Zunächst erhält man für die Parabel folgendes: $p:\ y = 2(x + 3)\,(x - 4) + (26/7)\,(x + 3) - (5/7)\,(x - 4)$. Durch Ausmultiplizieren erhält man schliesslich $p:\ y = 2x^2 + x - 10$.

2. Beispiel: Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 geht, wenn $P_1\binom{-3}{40}$, $P_2\binom{2}{-5}$ und $P_3\binom{5}{-8}$.

Lösung: Wir verwenden den Ansatz $p:\ y = a\,(x + 3)\,(x - 2) + B\,(x + 3) + C\,(x - 2)$. Als nächstes setzen wir die Koordinaten eines jeden der drei Punkte auf p in diese Gleichung ein. Wir erhalten dann drei Gleichungen wie folgt: $P_1\binom{-3}{40} \in p$: $40 = -5C$, $P_2\binom{2}{-5} \in p$: $-5 = 5B$ und $P_3\binom{5}{-8} \in p$: $24a + 8B + 3C = -8$. Dies ergibt $B = -1$ und $C = -8$. Eingesetzt in die letzte Gleichung erhält man $a = 1$. Zunächst erhält man also für die Parabel $p:\ y = (x + 3)\,(x - 2) - x - 3 - 8x + 16$. Ausmultiplizieren und vereinfachen ergibt schlussendlich folgendes: $p:\ y = x^2 - 8x + 7$.

Peter Senn, Ph.D.

www.mathepauker.com

2. Teil: Planimetrie

Inhalt

Planimetrie, Seite 40:

3. Goniometrische Gleichungen

Die Winkelfunktionen und ihre Eigenschaften

Für die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus gilt für ganzzahlige n

$$\sin x = \sin(x + 2n\pi)$$
$$\cos x = \cos(x + 2n\pi)$$

oder

$$\sin x = \sin(x + n \cdot 360^\circ)$$
$$\cos x = \cos(x + n \cdot 360^\circ)$$

Zwischen der Tangensfunktion und Sinus und Cosinus besteht folgender Zusammenhang:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Die Periodenlänge der Tangensfunktion ist nur halb so gross wie diejenige von Sinus und Cosinus. Für ganzzahlige Werte von n gilt

$$\tan x = \tan(x + n\pi)$$

oder

$$\tan x = \tan(x + n \cdot 180^\circ)$$

Die Cotangensfunktion wird selten verwendet. Sie ist eng mit der Tangensfunktion verwandt.

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Wie bei der Tangensfunktion gilt

$$\cot x = \cot(x + n\pi)$$

oder

$$\cot x = \cot(x + n \cdot 180^\circ)$$

Noch seltener wird die mit dem Cosinus verwandte Secansfunktion verwendet.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Zwischen dem Sinus und dem Cosinus eines Winkels besteht folgender wichtiger Zusammenhang:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{[trigonometrischer Pythagoras]}$$

Planimetrie, Seite 41:

Daraus erhält man zwei Beziehungen wie folgt:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Mit Hilfe untenstehender Tabelle können Winkelfunktionen ineinander umgerechnet werden.

	sin x	**cos x**	**tan x**	**cot x**
sin x =	•	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
cos x =	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$	•	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
tan x =	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	•	$\frac{1}{\cot x}$
cot x =	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	•

Bezüglich den Vorzeichen bestehen bei den Wurzeln Ungewissheiten, die durch eine geeignete "Probe", im allgemeinen durch Einsetzen der Lösungen in die ursprüngliche goniometrische Gleichung, beseitigt werden muss.

Jede der Winkelfunktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens nimmt im Intervall $0 \leq x \leq 360^\circ$ denselben Funktionswert im allgemeinen zwei Mal an. Für Sinus und Cosinus gilt folgendes:

$\sin x = a \rightarrow x_1 = \arcsin(a)$ und $x_2 = \pi - x_1$ (oder $x_2 = 180^\circ - x_1$)
$\cos x = a \rightarrow x_1 = \arccos(a)$ und $x_2 = 2\pi - x_1$ (oder $x_2 = 360^\circ - x_1$)

Bei der Tangens- und der Cotangensfunktion erhält man weitere Lösungen einfach durch Verschiebung um π (oder 180°).

$\tan x = a \rightarrow x_1 = \arctan(a)$ und $x_k = x_1 + k\pi$ (oder $x_k = x_1 + k \cdot 180^\circ$), $k = \pm 1, \pm 2, \ldots..$

1. Beispiel: Bestimme die Winkel im Intervall $0 \leq x \leq 360^\circ$ für welche gilt $\sin x = \frac{1}{2}$.

Lösung: Eine erste Lösung erhält man aus dem Rechner $x_1 = \arcsin(\frac{1}{2}) = 30^\circ$. Die zweite Lösung erhält man aus der ersten wie folgt: $x_2 = 180^\circ - x_1 = 150^\circ$. Sobald wir also „arcsin" in den Rechner eintippen müssen wir uns vergegenwärtigen, dass uns der Rechner nur ein Element einer Lösungsmenge mit unendlich vielen Elementen liefert. Die Lösungsmenge besteht im allgemeinen aus zwei Serien von Winkeln, die sich um ganzzahlige Vielfache von 360° (oder 2π) unterscheiden.

Planimetrie, Seite 42:

2. Beispiel: Bestimme die Winkel im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ für welche gilt $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$.

Lösung: Durch Umformung erhält man $\sin x/\cos x = \tan x = -\sqrt{3}$. Eine erste Lösung erhält man aus dem Rechner wie folgt $x_o = \arctan(-\sqrt{3}) = -60^\circ$. Die im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ befindlichen Lösungen x_1 und x_2 erhält man durch zweimalige Addition eines Inkrements von 180°. Man erhält $x_1 = 120^\circ$ und $x_2 = 300^\circ$.

Sinus und Cosinus sind gegeneinander um 90° verschoben. Es gilt folgendes:

$$
\begin{aligned}
&\sin x = \sin(90^\circ \pm (90^\circ - x) + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cos x = \cos(\pm x + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\sin x = -\sin(270^\circ \pm (90^\circ - x) + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cos x = -\cos(180^\circ \pm x + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\sin x = \cos(\pm(x - 90^\circ) + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\sin x = -\cos(\pm(x + 90^\circ) + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cos x = \sin(90^\circ \pm x + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cos x = -\sin(270^\circ \pm x + n\cdot 360^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\tan x = \tan(x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\tan x = -\tan(-x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\tan x = \cot(90^\circ - x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\tan x = -\cot(90^\circ + x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cot x = \cot(x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cot x = -\cot(-x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cot x = \tan(90^\circ - x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\\
&\cot x = -\tan(90^\circ + x + n\cdot 180^\circ),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}
$$

Mithilfe obiger Identitäten kann man die vollständige Lösungsmenge für Gleichungen der Art $\sin x = ½$, $\sin x = \pm\cos 2x$, $\tan x = \pm\cot(3x - 60^\circ)$ u.s.w. bequem bestimmen. Enthalten beide Seiten der Gleichung Winkelfunktionen, z.B. $\cot x = -\tan 3x$, dann genügt es für nur eine der beiden Winkelfunktionen eine Substitution gemäss obigen Gleichungen vorgenommen werden.

1. Beispiel: Bestimme alle Lösungen im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ der goniometrischen Gleichung $\cos(2x - 30^\circ) = ½$.

Lösung: Wir ersetzen $\cos(2x - 30^\circ)$ gemäss der zweiten von den obigen Gleichungen und erhalten $\cos(\pm(2x - 30^\circ) + n\cdot 360^\circ) = ½$. Danach lösen wir die Gleichung mithilfe der Umkehrfunktion des Cosinus wie folgt: $\pm(2x - 30^\circ) + n\cdot 360^\circ = \arccos ½ = 60^\circ$ und erhalten $x = 15^\circ \pm (30^\circ - n\cdot 180^\circ)$. Von den unendlich vielen Elementen in der vollständigen Lösungsmenge befinden sich vier im Intervall von Interesse $x \in \{45^\circ; 165^\circ; 225^\circ; 345^\circ\}$.

2. Beispiel: Bestimme alle Lösungen im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ der goniometrischen Gleichung $\cos(x + 45^\circ) = -\sin 2x$.

Planimetrie, Seite 43:

Lösung: Wir ersetzen sin 2x gemäss der sechsten von den obigen Gleichungen und erhalten $\cos(x + 45^o) = \cos(\pm(2x + 90^o) + n \cdot 360^o)$. Mithilfe der Umkehrfunktion des Cosinus erhalten wir für jedes der möglichen Vorzeichen ein Paar von Gleichungen wie folgt: $x = -45^o + n \cdot 360^o$ und $x = -45^o + n \cdot 120^o$. Von den unendlich vielen Elementen in der vollständigen Lösungsmenge befinden sich drei im Intervall von Interesse $x \in \{75^o;195^o;315^o\}$.

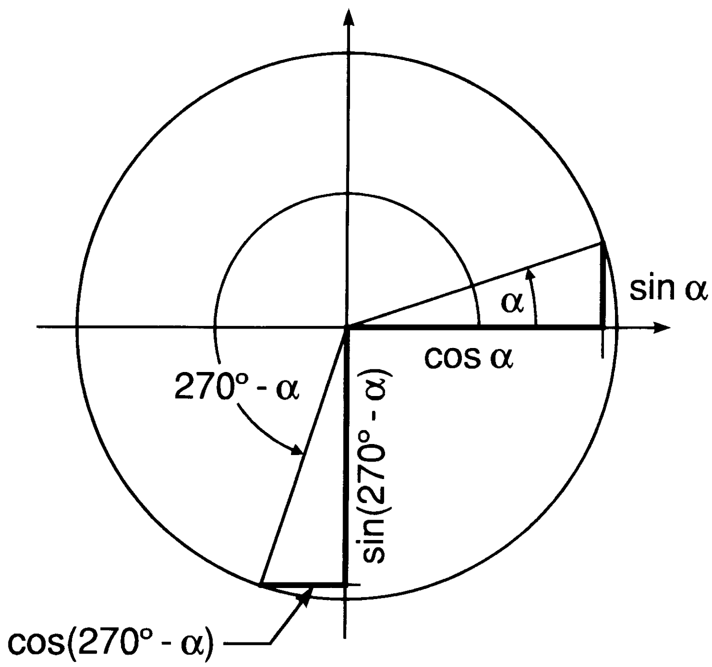
Es gilt also

$$\sin(-x) = -\sin(x + n\cdot 360^o)$$
$$\cos(-x) = \cos(x + n\cdot 360^o)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x + n\cdot 180^o)$$
$$\cot(-x) = -\cot(x + n\cdot 180^o)$$

Eine Verschiebung der Sinus- und Cosinusfunktion um 180° bewirkt einen Vorzeichenwechsel, d.h.

$$\sin(x \pm 180^o) = -\sin x$$
$$\cos(x \pm 180^o) = -\cos x$$

Obige Beziehungen können auch einfachen Skizzen des Einheitskreises entnommen werden. Z.B. aus der untenstehenden Skizze



ist sofort ersichtlich, dass $\sin(270^o - \alpha) = -\cos\alpha$ und $\cos(270^o - \alpha) = -\sin\alpha$.

Beispiel: Bestimme die Winkel im Intervall $0 \le x \le 360^o$ für welche gilt $\sin(30^o - 3x) + \cos 2x = 0$.

Lösung: Mit Hilfe obiger Formeln erhält man $-\cos(90^o + 30^o - 3x + n\cdot 360^o) + \cos 2x = 0$ oder $\cos 2x = \cos(120^o - 3x + n\cdot 360^o)$. Daraus erhält man $2x = 120^o - 3x + n\cdot 360^o$. Dies ergibt unendlich viele Lösungen für x wie folgt: $x_n = 24^o + (n-1)\cdot 72^o$ von welchen fünf Lösungen wie folgt: $x_1 = 24^o$, $x_2 = 96^o$, $x_3 = 168^o$, $x_4 = 240^o$ und $x_5 = 312^o$ im Intervall $0 \le x \le 360^o$ liegen.

Planimetrie, Seite 44:

Jede Linearkombination einer Sinus- und Cosinusfunktion kann mithilfe der Additionstheoreme in eine einzelne Sinus- oder Cosinusfunktion umgeformt werden.

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin(\alpha + \delta_s) = B \cos(\alpha + \delta_c)$$

wobei

$$A = B = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\delta_s = \arctan(b/a) \quad \text{wenn } a > 0$$
$$\delta_s = \arctan(b/a) + 180^\circ \quad \text{wenn } a < 0$$
$$\delta_c = \arctan(-a/b) \quad \text{wenn } b > 0$$
$$\delta_c = \arctan(-a/b) + 180^\circ \quad \text{wenn } b < 0.$$

1. Beispiel: Bestimme die Lösungen im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ von $3 \sin(3x - 30^\circ) + 4 \cos(3x - 30^\circ) = 4$.

Lösung: Durch eine Umformung obiger Art erhält man $5 \cos(3x - 30^\circ + \delta_c) = 4$, wobei $\delta_c = \arctan(-\frac{3}{4}) = -36{,}87^\circ$. Daraus erhält man $\cos(3x - 66{,}87^\circ) = 0{,}8$. Dies ergibt folgendes:

$3x - 66{,}87^\circ \in \{y_1; y_1 + 360^\circ; y_1 + 720^\circ; .....\} \cup \{y_2; y_2 + 360^\circ; y_2 + 720^\circ; .....\}$, wobei $y_1 = \arccos(0{,}8) = 36{,}87^\circ$ und $y_2 = 360^\circ - y_1 = 323{,}13^\circ$. Daraus erhält man $x \in \{z_1; z_1 \pm 120^\circ; z_1 \pm 240^\circ; .....\} \cup \{z_2; z_2 \pm 120^\circ; z_2 \pm 240^\circ; .....\}$, wobei $z_1 = \frac{1}{3}[y_1 + 66{,}87^\circ]$ und $z_2 = \frac{1}{3}[y_2 + 66{,}87^\circ]$. Man erhält schliesslich sechs Lösungen der goniometrischen Gleichung wie folgt: $x \in \{10^\circ; 34{,}58^\circ; 130^\circ; 154{,}58^\circ; 250^\circ; 274{,}58^\circ\}$.

2. Beispiel: Bestimme Lösungen für x im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ von $2 \sin(30^\circ - 2x) + 4 \sin(2x + 60^\circ) = -\sqrt{5}$.

Lösung: Hier muss die ursprüngliche Gleichung für den Sinus zuerst in eine Form der Art $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ überführt werden. Wir nehmen $\alpha = 2x$ und erhalten zunächst $(2 - \sqrt{3}) \sin 2x + (2\sqrt{3} + 1) \cos 2x = -\sqrt{5}$. Man erhält $2\sqrt{5} \sin(2x + 86{,}565^\circ) = -\sqrt{5}$. Schlussendlich bleibt eine Gleichung wie folgt zu lösen: $\sin(2x + 86{,}565^\circ) = -\frac{1}{2}$. Man erhält vier Lösungen wie folgt: $x \in \{61{,}717^\circ; 121{,}717^\circ; 241{,}717^\circ; 301{,}717^\circ\}$.

3. Beispiel: Bestimme Lösungen für x im Intervall $0 \le x \le 360^\circ$ von $\cos(x + 20^\circ) = \cos(110^\circ - 2x)$.

Lösung: Bei der Auflösung von Gleichungen der Art $\cos \alpha = \cos \beta$ muss sowohl die Periodizität

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + 2n \cdot 360^\circ),\ n \in \mathbf{N}$$

als auch die Achsensymmetrien der Cosinusfunktion (bezügl. z.B. der Symmetrieachse s: $\alpha = 180^\circ$) berücksichtigt werden.

Planimetrie, Seite 45:

$$\cos\alpha = \cos(360^\circ - (\alpha + 2n \cdot 360^\circ)),\ n \in \mathbf{N}$$

Man erhält dementsprechend zwei Gleichungen wie folgt:

$$x + 20^\circ = 110^\circ - 2x + n \cdot 360^\circ$$
$$x + 20^\circ = 360^\circ - (110^\circ - 2x + n \cdot 360^\circ)$$

Die Lösungsmenge der ursprünglichen goniometrischen Gleichung ist also $x \in \{30^\circ; 130^\circ; 150^\circ; 270^\circ\}$.

4. Beispiel: Bestimme Lösungen für x im Intervall $0 \leq x \leq 360^\circ$ von $\sin 3x = -\sin 3x$.

Lösung: Es gilt $-\sin 3x = \sin(-3x + n \cdot 360^\circ)$. Eingesetzt in die Gleichung erhält man $\sin 3x = \sin(n \cdot 360^\circ - 3x)$. Bei der Auflösung von Gleichungen der Art $\sin\alpha = \sin\beta$ muss sowohl die Periodizität

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2n \cdot 360^\circ),\ n \in \mathbf{N}$$

als auch die Achsensymmetrien der Sinusfunktion (bezügl. z.B. der Symmetrieachse $s: \alpha = 90^\circ$) berücksichtigt werden.

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - (\alpha + 2n \cdot 360^\circ)),\ n \in \mathbf{N}$$

Man erhält dementsprechend ein Gleichungspaar wie folgt:

$$3x = -3x + n \cdot 360^\circ$$
$$3x = 180^\circ - (-3x + n \cdot 360^\circ)$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $6x = n \cdot 360^\circ$ oder $x = n \cdot 60^\circ$. Die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist leer. Die Lösungsmenge der ursprünglichen goniometrischen Gleichung ist also $x \in \{0; 60^\circ; 120^\circ; 180^\circ; 240^\circ; 300^\circ; 360^\circ\}$.

5. Beispiel: Bestimme Lösungen für x im Intervall $0 \leq x \leq 360^\circ$ von $\sin(2x - 60^\circ) = -\cos 3x$.

Lösung: Es gilt $-\cos 3x = \sin(270^\circ \pm 3x + n \cdot 360^\circ)$. Man erhält dann ein Gleichungspaar wie folgt:

$$2x - 60^\circ = 270^\circ + 3x + n \cdot 360^\circ$$
$$2x - 60^\circ = 270^\circ - 3x + n \cdot 360^\circ$$

Durch Umformung erhält man daraus

$$x = -330^\circ - n \cdot 360^\circ$$
$$x = 66^\circ + n \cdot 72^\circ$$

Aus der ersten Gleichung erhält man (für $n = -1$) eine einzige Lösung $x_1 = 30^\circ$. Aus der zweiten Gleichung erhält man (für $n = 0, 1, 2, 3$ und 4) fünf weitere Lösungen. Als Lösungsmenge der ursprünglichen goniometrischen Gleichung erhält man dann $x \in \{30^\circ; 66^\circ; 138^\circ; 210^\circ; 282^\circ; 354^\circ\}$.

Planimetrie, Seite 46:

6. Beispiel: Für Winkel x im Bogenmass bestimme sämtliche Lösungen der goniometrischen Gleichung $\tan(x^2) = \cot x$ im Bereich $-\pi \le x \le \pi$.

Lösung: Es gilt $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Eingesetzt in die Gleichung

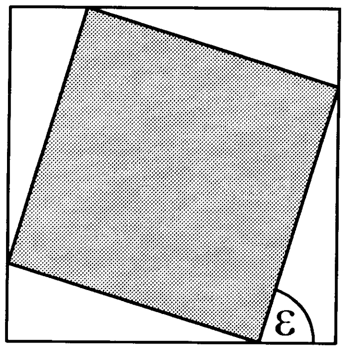
$$\tan(x^2) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Daraus erhält man für ganzzahlige Werte von n folgendes:

$$x^2 = \frac{\pi}{2} - x + n\pi$$
$$x^2 + x - [n + ½]\,\pi = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $x = -½\,[1 \pm \sqrt{1 + 2(2n + 1)\pi}]$. Sechs (der unendlich vielen) Lösungen wie folgt: $x \in \{-2.7276; -1.8494; 0.8494; 1.7276; 2.3467; 2.8534\}$ liegen im Bereich $-\pi \le x \le \pi$.

7. Beispiel: In nebenstehender Figur ist einem Quadrat ein kleineres Quadrat einbeschrieben. Bestimme den Winkel ε so, dass das (schraffierte) innere Quadrat 72% der Fläche des grossen Quadrats bedeckt.



Lösung: Es seien x und s die Seitenlängen des inneren, resp. äusseren Quadrats. Dann gilt offensichtlich $x^2/s^2 = 0.72$ und $x\,[\sin\varepsilon + \cos\varepsilon] = s$. Daraus ergibt sich folgendes $\sin\varepsilon + \cos\varepsilon = s/x = (5/6)\sqrt{2}$. Die Linearkombination von Sinus und Kosinus lässt sich zusammenfassen zu einer Kosinusfunktion wie folgt: $\sin\varepsilon + \cos\varepsilon = \sqrt{2}\cos(\varepsilon - 45^\circ) = (5/6)\sqrt{2}$. Man erhält dann $\varepsilon_1 = 45^\circ + \text{acrrcos}(5/6) = 78.557^\circ$. Eine zweite, spiegelbildliche Lösung erhält man wie folgt: $\varepsilon_2 = 45^\circ + [360^\circ - \arccos(5/6)] - 360^\circ = 11.443^\circ$. Es gilt dann $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 90^\circ$.

Gleichungen der Art $a \sin x + b \cos x = c$ lassen sich auch dadurch lösen, dass man den Sinus durch eine Funktion von Cosinus ersetzt oder umgekehrt. Man erhält z.B. $\pm a\sqrt{1 - \cos^2 x} = c - b\cos x$. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man eine quadratische Gleichung in $\cos x$ wie folgt: $(a^2 + b^2)\cos x - 2\,bc\cos x + c^2 - a^2 = 0$. Man erhält dann für x Lösungen wie folgt:

Planimetrie, Seite 47:

$$x = \arccos\left(\frac{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} \right)$$

Weil eine Wurzelgleichung erzeugt wurde, hat dieses Verfahren den Nachteil, dass **Scheinlösungen** erzeugt werden. Man muss deshalb die gefundenen Lösungen durch eine **Probe**, d.h. durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung, verifizieren!

Beispiel: Bestimme die Lösungen der goniometrischen Gleichung $\cos x + 7 \sin x = 5$.

Lösung: Obige Formel ergibt $x = \arccos(0{,}1 \pm 0{,}7)$. Daraus erhält man formal vier Lösungen wie folgt: 36,87°, 126,87°, 233,13° und 323,13°. Zwei der vier Lösungen erweisen sich allerdings als Scheinlösungen und wir erhalten letztendlich nur zwei Lösungen wie folgt: $x_1 = 36{,}87°$ und $x_2 = 126{,}87°$.

Planimetrie, Seite 52:

Additionstheoreme:

Für Winkelfunktionen gelten Additionstheoreme wie folgt:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

Daraus erhält man Ausdrücke für Winkelfunktionen mit ganzzahligem Vielfachem des Arguments wie folgt:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\sin 4x = 4 \cos x \sin x\,[2\cos^2 x - 1] \qquad \cos 4x = 8\,[\cos^2 x - 1]\cos^2 x + 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x} \qquad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2}$$

Für Funktionswerte des halben Arguments erhält man

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{½\,[1 - \cos x]}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{½\,[1 + \cos x]}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$\cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

1. Beispiel: Vereinfache $\sin(210^o - x) + \cos(x + 60^o)$.

Lösung: Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus ergibt $\sin 210^o \cos x - \cos 210^o \sin x + \cos 60^o \cos x - \sin 60^o \sin x = [\sin 210^o + \cos 60^o] \cos x - [\sin 60^o + \cos 210^o] \sin x = 0$.

2. Beispiel: Bestimme alle Lösungen für x im Intervall $0 \leq x \leq 360^o$ der Gleichung $\sin(x + 30^o) = 2 \cos x$.

Lösung: Anwendung des Additionstheorems für die Sinusfunktion ergibt $\cos 30^o \sin x = [2 - \sin 30^o] \cos x = \frac{3}{2} \cos x$. Daraus erhält man $\sin x/\cos x = \tan x = \sqrt{3}$ und man erhält Lösungen für x wie folgt: $x_1 = 60^o$ und $x_2 = x_1 + 180^o = 240^o$.

Planimetrie, Seite 53:

3. Beispiel: Bestimme alle Lösungen für x im Bereich $0 \leq x \leq 360^\circ$ der Gleichung $\sin(x - 30^\circ) + \cos(x + 15^\circ) = \sqrt{1 - \sqrt{½}}$.

Lösung: Mit den Additionstheoremen erhält man $[\cos 30^\circ - \sin 15^\circ] \sin x + [\cos 15^\circ - \sin 30^\circ] \cos x = \sqrt{1 - \sqrt{½}}$. Diese Gleichung kann umgeformt werden zu $\sin(x + 37{,}5^\circ) = \sqrt{½}$. Dies ergibt Lösungen wie folgt: $x_1 = 45^\circ - 37{,}5^\circ = 7{,}5^\circ$ und $x_2 = 135^\circ - 37{,}5^\circ = 97{,}5^\circ$.

4. Beispiel: Bestimme alle Lösungen für x im Bereich $0 \leq x \leq 360^\circ$ der Gleichung $\sqrt{3}\,[\tan(x - 60^\circ) - \tan(x + 45^\circ)] = 1 + \sqrt{3}$.

Lösung: Es gilt $\tan 45^\circ = 1$ und $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Mit dem Additionstheorem für die Tangensfunktion erhält man $\sqrt{3}\left(\frac{\tan x - \tan 60^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan x} - \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}\right) =$

$[3 + \sqrt{3}]\,\frac{\tan^2 x + 1}{\sqrt{3}\tan^2 x - [\sqrt{3} - 1]\tan x - 1} = 1 + \sqrt{3}$. Schlussendlich erhält man eine Gleichung wie folgt: $\tan x = -\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = -2 - \sqrt{3}$. Die Lösungen für x sind dann $x_1 = 105^\circ$ und $x_2 = x_1 + 180^\circ = 285^\circ$.

Durch Verschiebung um halbzahlige Vielfache von π erhält man aus einer Sinus- eine Cosinusfunktion und umgekehrt. Bei Tangens und Cotangens ist es ähnlich. Aus den Additionstheoremen erhält man folgendes:

$\tan(90^\circ + x) = -\cot x$	$\cot(90^\circ + x) = -\tan x$
$\tan(90^\circ - x) = \cot x$	$\cot(90^\circ - x) = \tan x$
$\tan(x - 90^\circ) = -\cot x$	$\cot(x - 90^\circ) = -\tan x$
$\sin(90^\circ + x) = \cos x$	$\cos(90^\circ + x) = -\sin x$
$\sin(90^\circ - x) = \cos x$	$\cos(90^\circ - x) = \sin x$
$\sin(x - 90^\circ) = -\cos x$	$\cos(x - 90^\circ) = \sin x$
$\sin(180^\circ + x) = -\sin x$	$\cos(180^\circ + x) = -\cos x$
$\sin(180^\circ - x) = \sin x$	$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$
$\sin(x - 180^\circ) = -\sin x$	$\cos(x - 180^\circ) = -\cos x$
$\sin(270^\circ + x) = -\cos x$	$\cos(270^\circ + x) = \sin x$
$\sin(270^\circ - x) = -\cos x$	$\cos(270^\circ - x) = -\sin x$
$\sin(x - 270^\circ) = \cos x$	$\cos(x - 270^\circ) = -\sin x$

Planimetrie, Seite 54:

Für die Sinus- und Cosinusfunktion gelten folgende Regeln:

1. Eine Verschiebung um ein ganzzahliges Vielfaches von 180^o entlang der der x-Achse entspricht einem Vorzeichenwehsel wie folgt:

$$\sin(x + k \cdot 180^o) = (-1)^k \sin x$$
$$\cos(x + k \cdot 180^o) = (-1)^k \cos x$$

2. Durch eine Verschiebung entlang der x-Achse um $\pm 90^o$ wird eine Sinus- zu einer Cosinusfunktion und umgekehrt.

1. Beispiel: Vereinfache $\dfrac{\cos(810^o + x)\ \sin(x - 900^o) - 1}{\sin(990^o - x)}$.

Lösüng: Durch eine Verschiebung um ganzzahlige Vielfache von 180^o erhält man folgendes:

$$\frac{(-1)^4 \cos(90^o + x) \cdot (-1)^5 \sin x - 1}{(-1)^5 \sin(90^o - x)}$$

Durch Anwendung der Formeln für Verschiebungen um 90^o entlang der x-Achse erhält man folgendes:

$$\frac{(-\sin x)\ (-\sin x) - 1}{-\cos x} = \frac{-\cos^2 x}{-\cos x} = \cos x$$

2. Beispiel: Bestimme Lösungen für x im Bereich $0 \le x \le 360^o$ von $\sin(3x + 30^o) = -\cos(2x - 60^o)$.

Lösung: Es gilt $-\cos x = \sin(x - 90^o)$, resp. $-\cos(2x - 60^o) = \sin(2x - 60^o - 90^o) = \sin(2x - 150^o)$. Somit gilt

$$\sin(3x + 30^o) = \sin(2x - 150^o)$$

Man erhält dann ein Gleichungspaar wie folgt:

$$3x + 30^o = 2x - 150^o + n \cdot 360^o$$
$$3x + 30^o = 180^o - (2x - 50^o) + n \cdot 360^o = 330^o - 2x + n \cdot 360^o$$

wobei $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ Aus der ersten Gleichung erhält man $x = -180^o + n \cdot 360^o$. Daraus ergibt sich (für $n = +1$) eine einzige Lösung $x_1 = 180^o$. Aus der zweiten Gleichung erhält man $5x = 300^o + n \cdot 360^o$ oder $x = 60^o + n \cdot 72^o$. Daraus ergeben sich fünf weitere Lösungen wie folgt: $x_2 = 60^o$, $x_3 = 132^o$, $x_4 = 204^o$, $x_5 = 276^o$ und $x_6 = 348^o$.

Planimetrie, Seite 59:

Summen und Produkte trigonometrischer Funktionen

Summen und Produkte trigonometrischer Funktionen können zum Teil ineinander überführt werden. Es gelten folgende Zusammenhänge:

1. $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
2. $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
3. $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
4. $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
5. $\sin x + \cos y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2} + 45^\circ\right) \cos\left(\frac{x-y}{2} - 45^\circ\right)$
6. $\sin x - \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2} + 45^\circ\right) \sin\left(\frac{x-y}{2} - 45^\circ\right)$
7. $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \sin(45^\circ \pm x) = \sqrt{2} \cos(45^\circ \mp x)$
8. $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$
9. $\cot x \pm \cot y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$
10. $\tan x + \cot y = \frac{\cos(x - y)}{\cos x \sin y}$
11. $\cot x - \tan y = \frac{\cos(x + y)}{\sin x \cos y}$
12. $\sin x \ \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
13. $\cos x \ \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
14. $\sin x \ \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$
15. $\cos x \ \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$
16. $\tan x \ \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = - \frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y}$
17. $\cot x \ \cot y = \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y} = - \frac{\cot x - \cot y}{\tan x - \tan y}$
18. $\tan x \ \cot y = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y} = - \frac{\tan x - \cot y}{\cot x - \tan y}$
19. $\sin(x + y) \ \sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x$
20. $\cos(x + y) \ \cos(x - y) = \cos^2 y - \sin^2 x$

Potenzen von Sinus und Cosinus lassen sich als " endliche Fourierreihen" darstellen.

$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos 2x]$ $\qquad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos 2x]$

$\sin^3 x = \frac{1}{4} [3 \sin x - \sin 3x]$ $\qquad$ $\cos^3 x = \frac{1}{4} [3 \cos x + \cos 3x]$

$\sin^4 x = \frac{1}{8} [\cos 4x - 4 \cos 2x + 3]$ $\qquad$ $\cos^4 x = \frac{1}{8} [\cos 4x + 4 \cos 2x + 3]$

Planimetrie, Seite 60:

1. Beispiel: Bestimme die Lösungen für x im Intervall $0 \leq x \leq 360^\circ$ von $\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = 8$.

Lösung: Durch Ausmultiplizieren des Klammerausdrucks erhält man $\frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8$. Dies ergibt eine quadratischen Gleichung wie folgt: $2u^2 - u - 1 = 0$, wobei $u = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind $u_1 = 1$ und $u_2 = -½$. Man erhält Lösungen für x wie folgt: $x \in \{45^\circ; 105^\circ; 165^\circ; 225^\circ; 285^\circ; 345^\circ\}$.

2. Beispiel: Bestimme alle Lösungen für x im Intervall $0 \leq x \leq 360^\circ$ von $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$.

Lösung: Aus obiger Formel Nr. 3 erhält man $2 \cos\left(\frac{6x + 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{6x - 2x}{2}\right) + \cos 4x = \cos 4x\,[2 \cos 2x + 1] = 0$. Einer der beiden Faktoren muss gleich null sein. Aus den Bedingungen $\cos 4x = 0$ und $\cos 2x = -½$ erhält man folgende Lösungen für x: $x \in \{22{,}5^\circ; 60^\circ; 67{,}5^\circ; 112{,}5^\circ; 120^\circ; 157{,}5^\circ; 202{,}5^\circ; 240^\circ; 247{,}5^\circ; 292{,}5^\circ; 300^\circ; 337{,}5^\circ\}$.

3. Beispiel: Bestimme im Bereich $0 \leq x \leq 360^\circ \wedge 0 \leq y \leq 360^\circ$ alle Paare x und y welche das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} \sin x - \sin y = 0{,}2 \\ \cos x - \cos y = -0{,}16 \end{array}\right|$$

erfüllen.

Lösung: Aus den obigen Formeln Nr. 2 und Nr. 4 erhält man

$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos[½(x + y)] \sin[½(x - y)]}{-2 \sin[½(x + y)] \sin[½(x - y)]} = -\cot[½(x + y)] = \frac{0{,}2}{-0{,}16} = -1{,}25$. Daraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen x und y: $x = 2 \arctan(0{,}8) - y = 77{,}32^\circ - y$. Eingesetzt in die erste Gleichung des Systems erhält man dann $\sin y\,[1 + \cos 77{,}32^\circ] - \cos y \sin 77{,}32^\circ = 1{,}5617 \sin(y - 38{,}66^\circ) = -0{,}2$. Daraus erhält man Lösungen $y_1 = 31{,}302^\circ$ und $y_2 = 226{,}017^\circ$. Nur der erste Wert von y ergibt für x einen Wert im gesuchten Bereich. Man erhält schlussendlich ein einziges Paar $x_1 = 46{,}017^\circ$ und $y_1 = 31{,}302^\circ$.

4. Beispiel: Vereinfache $\frac{\sin x - 2 \sin 2x - \sin 5x}{\cos x - 2 \sin 2x - \cos 5x}$.

Lösung: Im Zähler setzen wir $\sin x - \sin 5x = -2 \sin 2x \cos 3x$ und im Nenner $\cos x - \cos 5x = 2 \sin 2x \sin 3x$. Eingesetzt in obigen Ausdruck

$$\frac{-2 \sin 2x \cos 3x - 2 \sin 2x}{2 \sin 2x \sin 3x - 2 \sin 2x} = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \sin 3x}$$

Planimetrie, Seite 61:

5. Beispiel: Vereinfache $\dfrac{\sin 3x + 2 \sin 5x + 2 \sin 7x + \sin 9x}{\sin 3x - 2 \sin 5x - 2 \sin 7x + \sin 9x}$

Lösung: Wir ersetzen in Zähler und Nenner Summen durch Produkte wie folgt: $\sin 3x + \sin 9x = 2\sin 6x \cos 3x$ und $2 [\sin 5x + \sin 7x] = 4 \sin 6x \cos x$ und erhalten

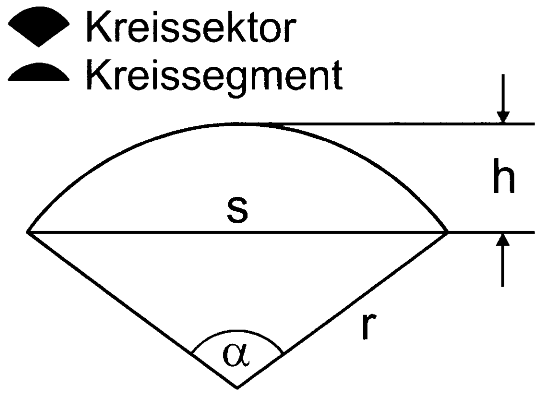
$$\frac{2 \sin 6x \cos 3x + 4 \sin 6x \cos x}{2 \sin 6x \cos 3x - 4 \sin 6x \cos x} = \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{\cos 3x - 2 \cos x}$$

Es gilt $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cos x$. Somit gilt $\cos 3x = [2 \cos 2x - 1] \cos x$. Entsprechende Substitutionen in obiger Gleichung ergeben

$$\frac{[2 \cos 2x - 1 + 2] \cos x}{[2 \cos 2x - 1 - 2] \cos x} = \frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos 2x - 3}$$

Planimetrie, Seite 77:

5. Der Kreis



r:	Kreisradius
s:	Länge der Sehne
h:	Höhe des Kreissegments
α:	Zentriwinkel
b:	Länge des Kreisbogens
A_{Sektor}:	Fläche des Kreissektors
$A_{Segment}$:	Fläche des Kreissegments

Formeln:

$s = 2\ r \sin(\alpha / 2) = 2 \sqrt{h\ (2\ r - h)}$

$h = r\ (1 - \cos(\alpha / 2))$

$b = \pi\ \alpha\ r / 180^o$

$A_{Sektor} = \pi\ r^2\ \alpha / 360^o = ½\ b\ r$

$A_{Segment} = [(\pi\ \alpha / 180^o) - \sin \alpha] \cdot (r^2 / 2)$

Planimetrie, Seite 79:

6. Berechnungen von Dreiecken und regelmässigen Vielecken

A. Sätze

Es sei s der halbe Umfang, d.h. $s = \frac{1}{2}[a + b + c]$

Sinussatz:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Tangenssatz:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} \qquad \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{a + c}{a - c} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)} \qquad \tan\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \cot\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{b + c}{b - c} = \frac{\tan\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)} \qquad \tan\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \cot\frac{\alpha}{2}$$

Inkreisradius:

$$r_i = \frac{A}{s} = s\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 4r_u\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}} = (s - a)\tan\frac{\alpha}{2} = (s - b)\tan\frac{\beta}{2} = (s - c)\tan\frac{\gamma}{2}$$

Umkreisradius:

$$r_u = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4A} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}$$

Halbwinkelsätze:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{A}{s(s - a)} = \frac{r_i}{s - a} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}$$

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{A}{s(s - b)} = \frac{r_i}{s - b} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{A}{s(s - c)} = \frac{r_i}{s - c} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}}$$

Planimetrie, Seite 80:

Mollweidesche Gleichungen:

$$(b + c) \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$
$$(c + a) \sin \frac{\beta}{2} = b \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}$$
$$(a + b) \sin \frac{\gamma}{2} = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$(b - c) \cos \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$$
$$(c - a) \cos \frac{\beta}{2} = b \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}$$
$$(a - b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Fläche:

$$A = \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma = \tfrac{1}{2} ac \sin\beta = \tfrac{1}{2} bc \sin\alpha$$
$$= \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$$
$$= r_i\, s = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)} = \frac{abc}{4r_u} = 2\, r_u^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

Projektionssatz:

$$a = b \cos\gamma + c \cos\beta$$
$$b = a \cos\gamma + c \cos\alpha$$
$$c = a \cos\beta + b \cos\alpha$$

Höhen:

$$h_a = b \sin\gamma = c \sin\beta = \frac{2A}{a}$$
$$h_b = a \sin\gamma = c \sin\alpha = \frac{2A}{b}$$
$$h_c = a \sin\beta = b \sin\alpha = \frac{2A}{c}$$

Das Höhen verhalten sich zu den Seiten wie folgt: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Seitenhalbierende:

$$s_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2\,bc \cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$
$$s_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2 + 2\,ac \cos\beta} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$
$$s_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab \cos\gamma} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Die Seitenhalbierenden werden durch ihren gemeinsamen Schnittpunkt im Verhältnis 1 : 2 geteilt.

Winkelhalbierende:

$$w_\alpha = \frac{2\,bc \cos(\alpha/2)}{b + c} = \frac{\sqrt{bc\,[(b + c)^2 - a^2]}}{b + c}$$
$$w_\beta = \frac{2\,ac \cos(\beta/2)}{a + c} = \frac{\sqrt{ac\,[(a + c)^2 - b^2]}}{a + c}$$
$$w_\gamma = \frac{2\,ab \cos(\gamma/2)}{a + b} = \frac{\sqrt{ab\,[(a + b)^2 - c^2]}}{a + b}$$

Eine Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Es sei z.B. P der Schnittpunkt von w_α mit a. Dann gilt $\overline{CP} : \overline{BP} = b : c$.

Planimetrie, Seite 81:

B. Berechnung von Seiten und Winkeln

Aus drei Seiten:

Gegeben			
a, b und c	$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$	$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

Aus zwei Seiten und einem Winkel:

Gegeben			
a, b und α	$\beta^* = \arcsin\left(\frac{b \sin \alpha}{a}\right)$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$
a, b und β	$\alpha^* = \arcsin\left(\frac{a \sin \beta}{b}\right)$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$
a, c und α	$\gamma^* = \arcsin\left(\frac{c \sin \alpha}{a}\right)$	$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$	$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$
a, c und γ	$\alpha^* = \arcsin\left(\frac{a \sin \gamma}{c}\right)$	$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$	$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$
b, c und β	$\gamma^* = \arcsin\left(\frac{c \sin \beta}{b}\right)$	$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$	$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$
b, c und γ	$\beta^* = \arcsin\left(\frac{b \sin \gamma}{c}\right)$	$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$	$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$

*Für den mit dem Sinussatz berechneten Winkel gibt es im allgemeinen zwei Lösungen.

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel:

Gegeben			
a, b und γ	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$	$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$	$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$
a, c und β	$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$	$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$
b, c und α	$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$	$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

Planimetrie, Seite 82:

Aus zwei Winkeln und einer Seite:

Gegeben			
a, α und β	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$	$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$
a, α und γ	$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$	$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$	$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$
a, β und γ	$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$	$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$	$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$
b, α und β	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$	$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$
b, α und γ	$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$	$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$	$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$
b, β und γ	$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$	$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$	$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$
c, α und β	$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$	$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$	$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$
c, α und γ	$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$	$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$	$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$
c, β und γ	$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$	$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$	$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$

C. Regelmässige Vielecke

Winkel: $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$

Seiten: $s_n = 2\, r_u \sin\alpha = 2\, r_i \tan\alpha$

Umkreisradius: $r_u = \frac{s_n}{2 \sin\alpha} = \frac{r_i}{\cos\alpha}$

Inkreisradius: $r_i = \frac{s_n}{2 \tan\alpha} = r_u \cos\alpha$

Diagonalen: $d_{kn} = 2\, r_u \sin(k\alpha) = \frac{2\, r_i \sin(k\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{s_n \sin(k\alpha)}{\sin\alpha}$,
wobei $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$ und $k \le n/2$.

Umfang: $u = n\, s_n = 2n\, r_u \sin\alpha = 2n\, r_i \tan\alpha$

Fläche: $A = \frac{1}{2} n\, r_u^2 \sin 2\alpha = (n/4)\, s_n^2 \cot\alpha = n\, r_i^2 \tan\alpha$

Peter Senn, Ph.D.

www.mathepauker.com

3. Teil: Vektorgeometrie

Inhaltsverzeichnis

Vektorgeometrie, Seite 1:

1. Skalare und Vektoren

Sämtliche physikalische Grössen lassen sich in zwei Klassen aufteilen wie folgt:

Vektoren: Vektoren haben eine Richtung. Ein Vektor ist vollständig definiert durch seinen Betrag und seine Richtung. Beispiele von Vektorgrössen sind Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft u.s.w.

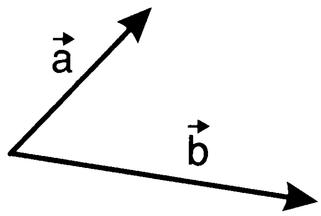
Skalare: Skalare haben keine Richtung. Beispiele von skalaren Grössen sind Temperatur, Fläche, Masse, Energie u.s.w.

Im folgenden wird ein ein ***kartesisches Rechtssystem*** mit den ***Basisvektoren***

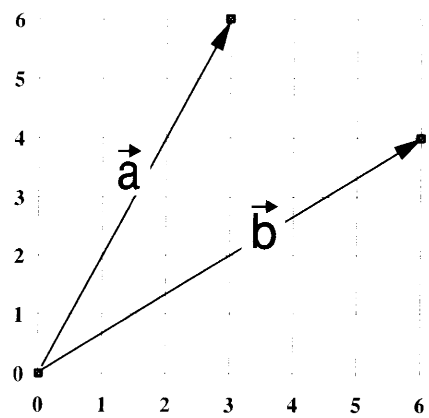
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

verwendet.

Vektorgrössen werden graphisch als Pfeile dargestellt. Symbole, die Vektorgrössen darstellen, werden durch Pfeile gekennzeichnet wie folgt:



Vektoren können auch durch ihre Komponenten in einem Kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, z.B. in nebenstehender Figur wäre $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$. Es gilt folgendes:



Zwei Vektoren sind dann gleich, wenn sie in all ihren Komponenten übereinstimmen.

Wir unterscheiden ***Ortsvektoren*** und ***Richtungsvektoren***. Ortsvektoren haben ihren Angriffspunkt im Koordinatenursprung. Richtungsvektoren kennzeichnen eine Richtung. Sie sind im Raum frei verschiebbar.

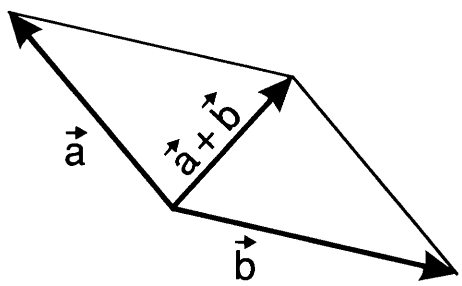
Von den Koordinatenachsen werden drei *Koordinatenebenen* aufgespannt. Diese zerlegen den dreidimensionalen Raum in acht ***Oktanten***. Entsprechend den Vorzeichen der einzelnen Koordinaten ergeben sich Oktanten I, II, III, ... und VIII wie folgt:

Vektorgeometrie, Seite 2:

Oktant:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

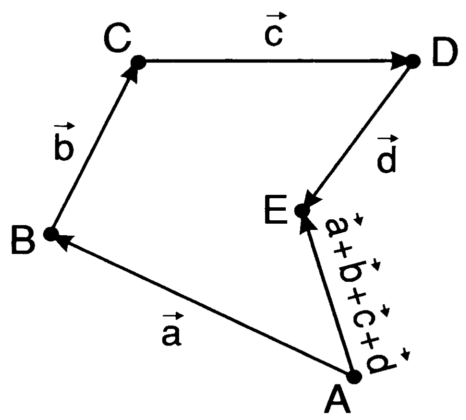
Vektoraddition und Vektorzerlegung

Vektorsummen werden durch sogenannte ***Vektoradditionen*** gebildet. Vektoradditionen lassen sich geometrisch durch sogenannte ***Vektorparallelogramme*** veranschaulichen. In der Koordinatendarstellung erhält man die Vektorsumme durch Addition der einzelnen



Komponenten, wie z.B. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+6\\6+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}$.

Bei der Addition von mehr als zwei Vektoren kann aus den einzelnen Vektoren ein sogenanntes ***Vektorpolygon*** gebildet werden. Die Vektorsumme erhält man dann, indem man den Anfangspunkt des Vektorzugs mit seinem Endpunkt verbindet. Bei der Koordinatendarstellung erhält man die Vektorsumme, indem man die Koordinaten der einzelnen Vektoren aufsummiert, z.B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} =$
$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+0+(-2)\\2+4+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$.



Den *Betrag* eines Vektors erhält man indem man die einzelnen Komponenten addiert und die Quadratwurzel zieht, z.B. $\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ oder $\left|\begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}\right| =$ $\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 6{,}7082$. Der Betrag einer Vektorsumme ist niemals grösser als die Summe der Beträge der einzelnen Vektoren, d.h. $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$. Es gilt folgende „***Dreiecksungleichung***“:

$$\big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big| \leq |\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Vektoren mit einem Betrag 1 werden als ***Einheitsvektoren*** Bezeichnet. Vektoren mit Betrag 1 in Richtung der Koordinatenachsen werden als ***Basisvektoren*** bezeichnet. Im dreidimensionalen Raum gibt es drei Basisvektoren wie folgt:

Vektorgeometrie, Seite 3:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

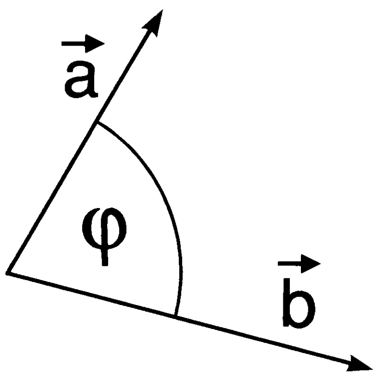
Die von einem Vektor $\vec{a}$ und den Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ eingeschlossenen Winkel seien α, β, resp. γ. Die Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ werden als ***Richtungscosinusse*** bezeichnet. Es gilt folgendes:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ein beliebiger Vektor kann in einen Einheitsvektor verwandelt werden, indem man ihn durch seinen Betrag dividiert. Der Einheitsvektor $\vec{v} = \vec{a}\,/\,|\,\vec{a}\,|$ zeigt in die Richtung des Vektors $\vec{a}$.
Es gilt folgendes:

- Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
- Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen.
- Zwei Vektoren sind ***kollinear***, wenn sie in ihrer Richtung (aber nicht unbedingt im Betrag) übereinstimmen oder wenn ihre Richtungen entgegengesetzt sind. Anders formuliert: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear, wenn $\vec{a} = k\,\vec{b}$, d.h. $a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$. Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}½\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\-6\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\12\end{pmatrix}$ sind also kollinear.
- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die nicht kollinear sind, spannen eine Ebene auf. Liegen weitere Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$, ... in einer von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene, so werden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, ... als ***komplanar*** bezeichnet.

Für den Betrag der Vektorsumme zweier Vektoren, die den Winkel φ einschliessen gilt folgendes:



$$|\,\vec{a} + \vec{b}\,| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}$$

Den zwischen zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}$$

eingeschlossenen Winkel φ kann man wie folgt berechnen:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)\,(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}\right)$$

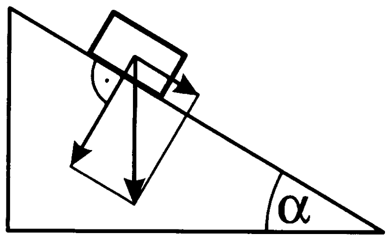
Vektorgeometrie, Seite 4:

Zerlegung von Vektoren: Häufig ist es vorteilhaft Vektoren in Komponenten mit vorgeschriebenen Richtungen zu zerlegen. Dies entspricht sozusagen einer Umkehr der Vektoraddition. Man sucht eine Anzahl Vektoren in vorgeschriebener Richtung, deren Vektorsumme den ursprünglichen Vektor ergibt.

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ beispielsweise kann zerlegt werden wie folgt:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die beiden Komponenten zeichnen sich im vorliegenden Fall dadurch aus, dass sie parallel zur x- und y-Achse gerichtet sind.

In nebenstehendem Beispiel wird die nach unten gerichtete Schwerkraft eines Körpers auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α in zwei Komponenten zerlegt von welchen eine parallel und die andere senkrecht zur schiefen Ebene gerichtet ist.



Ein Vektor in einer Ebene kann in zwei Komponenten (in verschiedene Richtungen!) zerlegt werden wie folgt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

Man erhält dann die Parameter λ und μ aus einem System von zwei linearen Gleichungen.

$$\lambda = \frac{a_x c_y - a_y c_x}{b_x c_y - b_y c_x} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{a_y b_x - a_x b_y}{b_x c_y - b_y c_x}$$

Vektoren im Raum können in drei Komponenten zerlegt werden. Ein Ansatz für eine entsprechende ***Linearkombination*** wäre

$$\vec{a} = \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c} + \nu\, \vec{d}$$

Die Parameter λ, μ und ν erhält man wiederum aus einem System von linearen Gleichungen. Man erhält

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b_x + \mu c_x + \nu d_x \\ \lambda b_y + \mu c_y + \nu d_y \\ \lambda b_z + \mu c_z + \nu d_z \end{pmatrix}$$

Das Thema „Vektorzerlegung“ wird im nächsten Kapitel noch eingehend behandelt.

Beispiel: Stelle den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dar als eine Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ wie folgt: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Mit einem Ansatz wie folgt: $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu\, \vec{c} + \nu\, \vec{d}$ erhalten wir ein System von linearen Gleichungen wie folgt:

Vektorgeometrie, Seite 5:

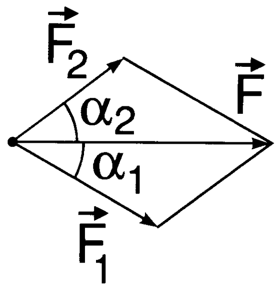
$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu - 2\nu \\ 2\lambda + 3\mu + 3\nu \\ -4\mu + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man eine Linearkombintation wie folgt: $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$.

Linearkombinationen von Vektoren werden in nachfolgenden Kapitel eingehend behandelt.

Soll ein Vektor $\vec{F}$ so in zwei Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerlegt werden, dass $\vec{F}$ mit diesen einen Winkel α_1, resp. α_2 einschliesst so gilt folgendes:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(\sin\alpha_2 \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 \end{pmatrix} + \sin\alpha_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \end{pmatrix}\right) \frac{|\vec{F}|}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$



Die beiden Terme im obigen Ausdruck entsprechen den Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$.

Vektorgeometrie, Seite 13:

2. Vektorzerlegung, Linearkombinationen

Unter einer ***Vektorzerlegung*** versteht man eine Darstellung eines Vektors a als ***Linearkombination*** von Vektoren b, c, d, etc wie folgt:

$$\mathbf{a} = \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} + \delta\,\mathbf{d} + \ldots\ldots$$

Sind die Vektoren **b**, **c**, **d**, ... linear abhängig, so lässt sich eine entsprechende Linearkombination unter Umständen nicht erstellen. Drei Vektoren, die voneinander linear abhängig sind werden als ***komplanar*** bezeichnet, wenn sie in einer Ebene liegen oder ***kollinear***, wenn sie die gleiche Richtung haben.

Beispiel: Stelle den Vektor **a** dar als eine Linearkombination von **b**, **c** und **d**. Es sei $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Aus dem Ansatz $\mathbf{a} = \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} + \delta\,\mathbf{d}$ erhält man ein System von linearen Gleichungen wie folgt:

$$\left|\begin{array}{c} \gamma = 3 \\ \beta - \gamma + 2\delta = -9 \\ 2\beta + \gamma + \delta = 3 \end{array}\right|$$

Mit der Lösung $\beta = 2$, $\gamma = 3$ und $\delta = -4$. Die Linearkombination lautet also: $\mathbf{a} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c} - 4\mathbf{d}$.

Vektorgeometrie, Seite 16:

3. Abstand zwischen zwei Punkten

Der Abstand zwischen zwei Punkten $A\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ wird wie folgt berechnet:

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}$$ „Abstandsformel"

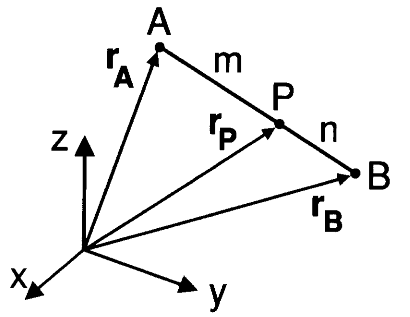
Beispiel: Berechne den Abstand zwischen den Punkten $A\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\overline{AB} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (-1 - 4)^2 + (4 - (-6))^2} = \sqrt{10^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{225} = 15.$

Vektorgeometrie, Seite 19:

4. Teilung von Strecken
(Punktspiegelung)

Ein Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}_P$ teilt die Strecke $\overline{AB}$ zwischen den Punkten A und B mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_A$, resp. $\mathbf{r}_B$ im Verhältnis m : n, wenn folgendes gilt:



$$\mathbf{r}_P = \frac{n\,\mathbf{r}_A + m\,\mathbf{r}_B}{m+n}$$

Im speziellen Fall, dass m = n, d.h. wenn P in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ liegt gilt folgendes:

$$\mathbf{r}_P = \tfrac{1}{2}[\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B]$$

1. Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden eines Dreiecks mit Eckpunkten A, B und C wie folgt:

$$A\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}\ \text{und}\ C\begin{pmatrix}5\\10\\-2\end{pmatrix}.$$

Lösung: Der Punkt M mit Ortsvektor $\mathbf{r}_M$ sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Es gilt $\mathbf{r}_M = \tfrac{1}{2}[\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B]$. Der Flächenschwerpunkt S teilt die Seitenhalbierende s_c (Verbindungslinie zwischen C und M) im Verhältnis 2 : 1. Folglich gilt für den Ortsvektor $\mathbf{r}_S$ von S folgendes: $\mathbf{r}_S = [\mathbf{r}_C + 2\,\mathbf{r}_M]/3 = [\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C]/3$. Dies ergibt folgendes:

$$S\begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

In manchen Fällen ist ein Punkt, der eine Strecke in einem vorgegebenen Verhältnis teilt vorgegeben. Das wichtigste Beispiel dieser Art ist die ***Punktspiegelung***. Es sei P' der am Punkt S gespiegelte Punkt P. Der Ortsvektor $\mathbf{r}_{P'}$ von P' lässt sich aus den Ortsvektoren $\mathbf{r}_S$ und $\mathbf{r}_P$ von S, resp. P wie folgt berechnen:

$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r}_S + (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P) = 2\,\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_P$$

Vektorgeometrie, Seite 20:

2. Beispiel: Der Punkt P' sei der am Punkt $S\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$ gespiegelte Punkt $P\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$.

Bestimme P'.

Lösung: Es seien $\mathbf{r_P}$, $\mathbf{r_{P'}}$ und $\mathbf{r_S}$ die Ortvektoren der Punkte P, P' resp. S. Es gilt dann $\mathbf{r_{P'}} = 2\,\mathbf{r_S} - \mathbf{r_P} = 2\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

3. Beispiel: Es seien $A\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}7\\-4\\2\end{pmatrix}$ und $S\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ zwei Eckpunkte und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks. Bestimme den fehlenden Eckpunkt C des Dreiecks.

Lösung: Es sei M der Mittelpunkt der Seite c des Dreiecks [Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$]. Man erhält $M\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$. Es seien $\mathbf{r_M}$, $\mathbf{r_S}$ und $\mathbf{r_C}$ die Ortsvektoren von M, S resp. C. Es gilt dann $\mathbf{r_C} = \mathbf{r_M} + 3\,[\mathbf{r_S} - \mathbf{r_M}] = 3\,\mathbf{r_S} - 2\,\mathbf{r_M} = 3\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-5\end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie, Seite 22:

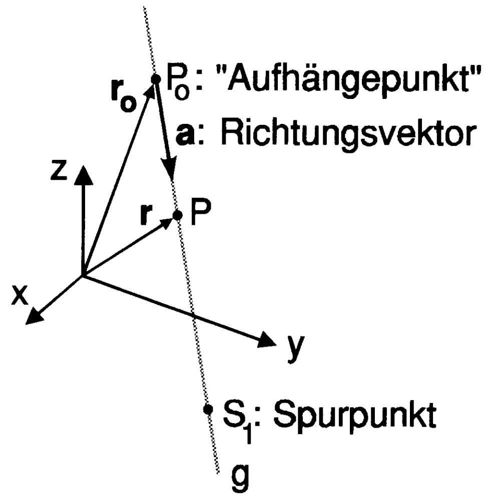
5. Geradengleichungen

Eine Geradengleichung (im dreidimensionalen Raum) lautet wie folgt:

$$g: \mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \lambda\, \mathbf{a}$$

oder in "Komponentenschreibweise"

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$



Die in der Formel erscheinenden Grössen werden nachfolgend wie folgt bezeichnet:

$\mathbf{r}_o$: Ortsvektor des "***Aufhängepunkts***".
a: ***Richtungsvektor*** (der Geraden).
λ: ***Streckungsfaktor.***

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen (E_1: x = 0, E_2: y = 0 und E_3: z = 0) werden als ***Spurpunkte*** (der Geraden) bezeichnet. Die Spurpunkte S_1, S_2 und S_3 erhält man wie folgt: $g \cap E_1 \rightarrow S_1$, $g \cap E_2 \rightarrow S_2$ und $g \cap E_3 \rightarrow S_3$. Es ist leicht ersichtlich, dass man die Spurpunkte einer Geraden dadurch erhält, dass man für den Streckungsfaktor λ Werte einsetzt wie folgt:

$$S_1 = E_1 \cap g: \quad \lambda \leftarrow -x_o/a_x$$
$$S_2 = E_2 \cap g: \quad \lambda \leftarrow -y_o/a_y$$
$$S_3 = E_3 \cap g: \quad \lambda \leftarrow -z_o/a_z$$

Eine Gerade kann mit unendlich vielen Gleichungen definiert werden. Es gelten folgende Aussagen:

Satz 1: Zwei Geraden g_1: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1$ und g_2: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ kollinear sind.

Satz 2: Zwei Geraden g_1: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1$ und g_2: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ sind identisch wenn $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ kollinear sind.

Eine Gerade durch zwei Punkte A und B mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{r}_B$ erhält man, indem man einen der beiden Punkte als Aufhängepunkte wählt und für den Richtungsvektor **a** der Geraden die Differenz der beiden Ortsvektoren einsetzt, z.B. g: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \lambda\,(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$, g: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B + \lambda\,(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \lambda\,(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$ oder $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B + \lambda\,(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)$. Eine einmal festgelegte Definition einer Geraden sollte jedoch beibehalten werden.

Vektorgeometrie, Seite 23:

Geraden im dreidimensionalen Raum schneiden sich gewöhnlich nicht. Es seien g_1 und g_2 Geraden wie folgt:

$$g_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} \text{ und } g_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix}$$

Nur wenn für das überbestimmte lineare Gleichungssystem in λ_1 und λ_2 wie folgt:

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 a_{1x} - \lambda_2 a_{2x} + x_1 - x_2 = 0 \\ \lambda_1 a_{1y} - \lambda_2 a_{2y} + y_1 - y_2 = 0 \\ \lambda_1 a_{1z} - \lambda_2 a_{2z} + z_1 - z_2 = 0 \end{array} \right|$$

eine Lösung existiert schneiden sich die Geraden. Dies ist der Fall, wenn $(x_1 - x_2)$ $[a_{1y} a_{2z} - a_{1z} a_{2y}] + (y_1 - y_2)$ $[a_{1z} a_{2x} - a_{1x} a_{2z}] + (z_1 - z_2)$ $[a_{1x} a_{2y} - a_{1y} a_{2x}] = 0$.

In den nachfolgenden Beispielen sei die Gerade g stets definiert wie folgt:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Beispiel: Überprüfe, ob $A\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \in g$ und $B\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in g$.

Lösung: Für den Punkt A erhält man $\lambda = (-1 - 1)/1 = (4 - 2)/(-1) = (-7 - (-3))/2 = -2$. Der Punkt A liegt demzufolge auf g. Für den Punkt B hingegen erhält man für den Streckungsfaktor λ unterschiedliche Werte von 3, -1 und -1. Der Punkt B liegt also nicht auf g.

2. Beispiel: Bestimme den Spurpunkt S_1 von g.

Lösung: Für $x = 0$ ist der Streckungsfaktor gleich -1. Setzt man für λ diesen Wert in die Gleichung für g ein, so erhält man $S_1\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. Beispiel: Bestimme denjenigen Punkt P auf g, für welchen gilt $x = y$.

Lösung: Aus $x = y = 1 + \lambda = 2 - \lambda$ erhält man $\lambda = \frac{1}{2}$. Eingesetzt in die Geradengleichung erhält man für P folgendes: $P\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. Beispiel: Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2 wie folgt:

$$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie, Seite 24:

Lösung: Man erkennt sofort, dass $\mathbf{a_1} = -2\,\mathbf{a_2}$. Die beiden Geraden sind also parallel und eventuell identisch. Für $\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ erhät man $\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = 3\,\mathbf{a_1}$. Die Geraden g_1 und g_2 sind demzufolge identisch.

5. Beispiel: Überprüfe, ob die zwei Geraden g_1 und g_2 wie folgt:

$$g_1\!: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2\!: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sich schneiden. Bestimme gegebenenfalls ihren Schnittpunkt S.

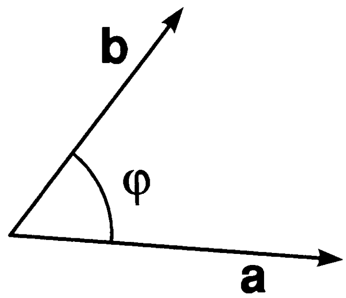
Lösung: Durch Gleichsetzen von der Koordinaten erhält man ein System von drei linearen Gleichungen für die Streckungsfaktoren λ_1 und λ_2. Man kann zwei (beliebige) dieser Gleichugen nach λ_1 und λ_2 auflösen. Wenn die gefundenen Werte auch die nicht verwendete Gleichung erfüllen, so schneiden sich die Geraden. [Überbestimmtes Gleichungssystem!]. Im vorliegenden Beispiel erhält man drei Gleichungen wie folgt: $1 + \lambda_1 = 3 + 3\,\lambda_2$, $2 - \lambda_1 = -5 + 2\,\lambda_2$ und $-3 + 2\,\lambda_1 = 9 - 2\,\lambda_2$. Alle drei Gleichungen werden erfüllt für die Werte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 1$. Dies bedeutet, dass g_1 und g_2 sich schneiden. Der Schnittpunkt ist $S\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Definition: Eine Gerade, die im dreidimensionalen Raum zwei Geraden g_1 und g_2 schneidet wird als Transversale (von g_1 und g_2) bezeichnet.

Vektorgeometrie, Seite 31:

6. Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren **a** und **b** wie folgt:



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi$$

$$a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\ \cos \varphi$$

Der von den Vektoren **a** und **b** eingeschlossene Winkel φ kann aus dem Skalarprodukt **a · b** wie folgt berechnet werden:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right)$$

Weil $\cos 90° = 0$ ist das Skalarprodukt von zwei senkrecht zueinanderstehenden Vektoren null. Es gilt folgendes:

Satz 3:	Das Skalarprodukt von zwei Vektoren ist dann und nur dann gleich null, wenn die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen, d.h. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Wie bei der normalen Multiplikation (von Skalaren) wird beim Skalarprodukt das Multiplikationszeichen häufig weggelassen. Man schreibt z.B. **ab** anstatt **a · b** oder $\mathbf{a}^2$ anstelle von **a · a**.

Satz 4:	Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist gleich dem Quadrat seines Betrags, d.h. $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$. Es gilt also $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Satz 5:	Gilt $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2$ so sind die Vektoren **a** und **b** kollinear.

Für kollineare Vektoren **a** und **b** gilt $a = \kappa b$ Man erhält also $\kappa = a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$. Daraus erhält man zwei linear unabhängige Gleichungen, z.B. $a_x/b_x = a_y/b_y$ und $a_x/b_x = a_z/b_z$. Weil $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$ werden wir im folgenden anstelle von $\mathbf{a}^2$ meist einfach a^2 schreiben. Für das Skalarprodukt gilt das

Vektorgeometrie, Seite 32:

Kommutativgesetz: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
Distributivgesetz: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Das Assoziativgesetz ist hingegen nicht gültig, d.h. im allgemeinen gilt $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Es gilt die ***Schwarzsche Ungleichung*** wie folgt: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$.

1. Beispiel: Bestimme das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Lösung: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 9 = 7$.

2. Beispiel: Es seien zwei Vektoren **a** und **b** gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q \\ q-1 \\ q \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -q \\ 2 \\ q+1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Grösse q so, dass **a** und **b** senkrecht zueinander stehen.

Lösung: $q \cdot (-q) + 2 \cdot (q - 1) + q\,(q + 1) = 0 \;\rightarrow\; q = 2/3$.

3. Beispiel: Von welchem Punkt P auf der Geraden g sieht man die Strecke $\overline{AB}$ unter einem rechten Winkel, wenn g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$.

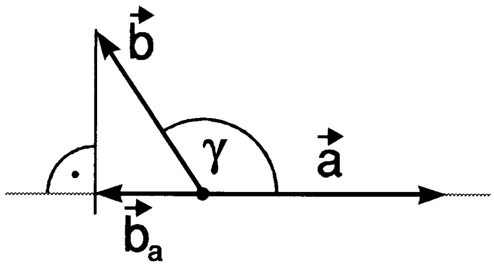
Lösung: Es seien $\mathbf{r_A}$, $\mathbf{r_B}$ und $\mathbf{r}$ Ortsvektoren von A, B, resp. P, wobei $P \in g$.
Dann gilt $(\mathbf{r_A} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r_B} - \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2 - 3\lambda \\ 3 + \lambda \\ 1 - 2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 3\lambda \\ 5 + \lambda \\ 25 - 2\lambda \end{pmatrix} = 14\lambda^2 - 62\lambda + 48 = 0$.
Man erhält für λ Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 24/7 = 3{,}4286$. Dies ergibt die gesuchten Punkte wie folgt: $P_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $P_2\begin{pmatrix} 10{,}2857 \\ -3{,}4286 \\ 6{,}8571 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie, Seite 43:

7. Normalprojektion eines Vektors auf eine Gerade

Die Normalprojektion eines Vektors **b** auf eine Gerade mit dem Richtungsvektor **a** kann mit dem Skalarprodukt wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbf{b_a} = \left(\frac{b}{a}\cos\gamma\right)\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a^2}\right)\mathbf{a}$$



Die Grösse $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a^2}$ wird als ***skalare Komponente von*** **b** ***bezüglich*** **a** bezeichnet.

Die Grösse $\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{a^2}\right)\mathbf{a}$ wird als ***vektorielle Komponente von*** **b** ***bezüglich*** **a** bezeichnet.

Vektorgeometrie, Seite 44:

8. Schnittwinkel von zwei sich schneidenden Geraden

Es seien g_1 und g_2 zwei sich schneidende Geraden.

$$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix}$$

Den Schnittwinkel φ erhält man dann mit Hilfe des Skalarprodukts aus den Richtungsvektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ von g_1 resp. g_2 wie folgt:

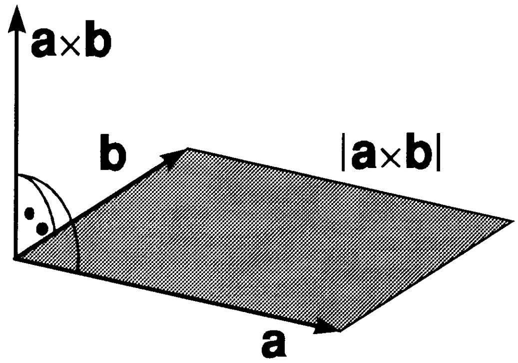
$$\delta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{a_{1x}\, a_{2x} + a_{1y}\, a_{2y} + a_{1z}\, a_{2z}}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|}\right)$$

Falls $\varphi > 90^\circ$ wird $180^\circ - \varphi$ als „Schnittwinkel" bezeichnet, d.h. als „Schnittwinkel" von zwei Geraden gilt der sogenannte „spitze Schnittwinkel", d.h. für den Schnittwinkel von g_1 und g_2 gilt $\varphi = \min(\delta, 180^\circ - \delta)$.

Vektorgeometrie, Seite 45:

9. Das Vektorprodukt
(Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt **a** × **b** von zwei Vektoren **a** und **b** ergibt einen Vektor, der sowohl zu **a**, als auch zu **b** senkrecht steht. Der Betrag des Vektorprodukts ist zudem gleich der Fläche des von **a** und **b** aufgespannten Vektorparallelogramms. Das Vektorprodukt wird wie folgt berechnet:



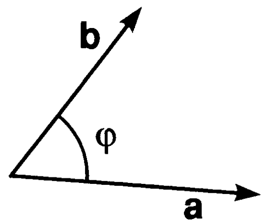
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix}$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-6) - 3(-5) \\ -[1(-6) - 3(-4)] \\ 1(-5) - 2(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren **a**, **b** und **a** × **b** bilden ein sogenanntes ***orthogonales Rechtssystem***. [Siehe dazu obige Figur!]. Das Kommutativgesetz ist demzufolge nicht gültig; stattdessen gilt **a** × **b** = - [**b** × **a**].

Der Betrag des Vektorprodukts kann mit Hilfe des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels φ wie folgt berechnet werden:



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\varphi$$

Daraus ist ersichtlich, dass **a** × **a** = **0**. Es gilt folgendes:

Vektorgeometrie, Seite 46:

Satz 6:	Das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ von zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist ein Vektor, der sowohl zu $\mathbf{a}$, als auch zu $\mathbf{b}$ normal steht (Orthogonalsystem). Insbesondere is $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ein Normalenvektor zu jeder von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ "aufgespannten" Ebene.

Satz 7:	Der Betrag eines Vektorprodukts $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist gleich der Fläche des Vektorparallelogramms von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Aus den geometrischen Eigenschaften des Vektorprodukts ergeben sich hauptsächlich zwei verschiedene praktische Anwendungen A und B wie folgt:

A. Berechnung von ***Normalenvektoren*** zu einem Vektorpaar, resp. zu jeder von diesem Vektorpaar aufgespannten Ebene.

1. Beispiel: Eine Ebene E geht durch drei Punkte $A\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$ mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ resp. $\mathbf{r}_C$. Bestimme einen Normalenvektor $\mathbf{n}$ zur Ebene E.

Lösung: Ein Normalenvektor zu E kann z.B. wie folgt berechnet werden: $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)$ oder $n = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)$. Im ersteren Fall erhält man $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}-1-3\\1-4\\-3+2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2-3\\1-4\\-5+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-11\\9\end{pmatrix}$.

B. ***Flächenberechnungen***. Hauptsächlich zur Berechnung von Dreiecksflächen.

2. Beispiel: Berechne die Fläche des Dreiecks mit Eckpunkten $A\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}3\\6\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung: $F_{ABC} = ½\left|(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)\right| = ½\left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right| = ½\left|\begin{pmatrix}-1\\4\\8\end{pmatrix}\right| = 4{,}5.$

Vektorgeometrie, Seite 47:

3. Beispiel: Für welche Vektoren **b** gilt folgendes: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$?

Lösung: Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht sowohl zu **a** als auch zu **b**. Es gibt im obigen Beispiel nur dann Lösungen für **b**, wenn der erste Vektor zum gegebenen Vektorprodukt senkrecht steht. Dies ist der Fall, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

Aus der gegebenen Gleichung erhält man drei lineare Gleichungen mit Unbekannten b_x, b_y und b_z wie folgt:

$$\begin{vmatrix} -2 & b_y \\ 1 & b_z \end{vmatrix} = -b_y - 2b_z = 2$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & b_x \\ 1 & b_z \end{vmatrix} = b_x - b_z = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_x \\ -2 & b_y \end{vmatrix} = 2b_x + b_y = -4$$

Man erhält also drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten. Man kann zeigen, dass diese voneinander linear abhängig sind. Eine der Unbekannten ist also frei wählbar. Es sei $b_x = q$. Durch Einsetzen in obige Gleichungen erhält man $b_y = -4 - 2b_x = -4 - 2q$ und $b_z = b_x + 1 = q + 1$. Es gibt also unendlich viele Vektoren **b** wie folgt:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} q \\ -2q - 4 \\ q + 1 \end{pmatrix}, \text{ q beliebig}$$

welche die gegebene Gleichung erfüllen.

Für die Multiplikation mit einem Skalar gilt folgende Regel:

$$\mathbf{a} \times (c\mathbf{b}) = (c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Es gilt das ***Distributivgesetz*** wie folgt:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Das ***Kommutativgesetz*** gilt jedoch nicht. Stattdessen gilt folgendes:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Vektorgeometrie, Seite 48:

Eine Gleichung der Art $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ hat nur dann eine Lösung (für $\mathbf{r}$), wenn $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, d.h. $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. In diesem Fall stellt diese Gleichung eine Gerade dar, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen. Diese wird als ***vektorielle Gleichung der Geraden*** bezeichnet. Es gilt folgendes:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2} + \lambda \mathbf{a}, \text{ wenn } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

Beispiel: Bestimme die Punkte mit Koordinaten x, y und z welche folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zuerst vergewissern wir uns, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Dies ist tatsächlich der Fall. Wenn wir auf der linken Seite die Faktoren im Vektorprodukt vertauschen wechselt auf der rechten Seite das Vorzeichen. Wir können schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Punkte liegen auf einer Geraden g wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{2^2 + 1^2 + 5^2} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

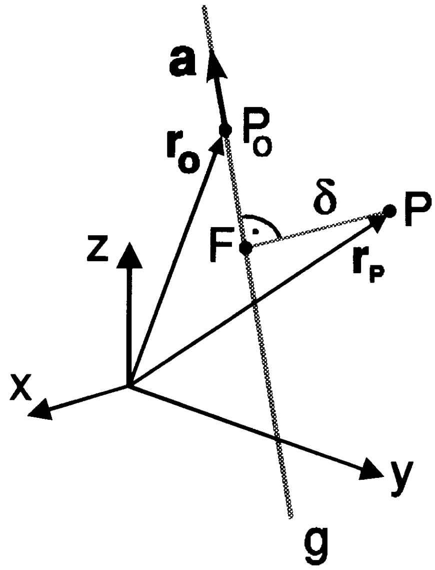
Vektorgeometrie, Seite 55:

10. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden

(Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade. Spiegelung eines Punktes an einer Geraden).

Eine Gerade g sei gegeben wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r_o} + \lambda \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$



Unter dem Abstand δ eines Punkts P mit Ortsvektor $\mathbf{r_P}$ von der Geraden versteht man den kürzesten Abstand zwischen P und einem Punkt auf der Geraden, d.h. die Länge $\overline{PF}$ des Lots von P auf g.
Der Abstand δ wird als Betrag eines Vektorprodukts wie folgt berechnet:

$$\delta = \frac{|\mathbf{a} \times (\mathbf{r_P} - \mathbf{r_o})|}{|\mathbf{a}|}$$

und den Fusspukt F des Lots erhält man für einen Streckungsfaktor λ_F wie folgt:

$$\lambda_F = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r_P} - \mathbf{r_o})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Den Ortsvektor des Fusspunkts F des Lots erhält man aus λ_F wie folgt:

$$\mathbf{r_F} = \mathbf{r_o} + \lambda_F \mathbf{a}$$

Der Punkt P' sei das Speigelbild von P bei einer Spiegelung an g. Den Ortsvektor von P' erhält man wie folgt:

$$\mathbf{r_{P'}} = 2\,\mathbf{r_F} - \mathbf{r_P}$$

Beispiel: Eine Gerade g und ein Punkt P seien gegeben wie folgt:

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Es sei P' der an g gespiegelte Punkt P.

Bestimme folgendes:

a) Den Abstand δ des Punktes P von der Geraden g.
b) Den Fusspunkt F des Lotes von P auf g.
c) Den Punkt P'.

Vektorgeometrie, Seite 56:

Lösung: Im vorliegenden Beispiel gilt $\mathbf{r_P} - \mathbf{r_o} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) $$\delta = \frac{|\mathbf{a} \times (\mathbf{r_P} - \mathbf{r_o})|}{|\mathbf{a}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{14}} = \sqrt{5}.$$

b) $$\lambda_F = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r_P} - \mathbf{r_o})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{14}{14} = 1.$$ Eingesetzt in die Geradengleichung für g erhält man für den Fusspunkt des Lots folgendes: $F\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Es seien $\mathbf{r_F}$, $\mathbf{r_P}$ und $\mathbf{r_{P'}}$ die Ortsvektoren von F, P, resp. P'. Dann gilt folgendes:

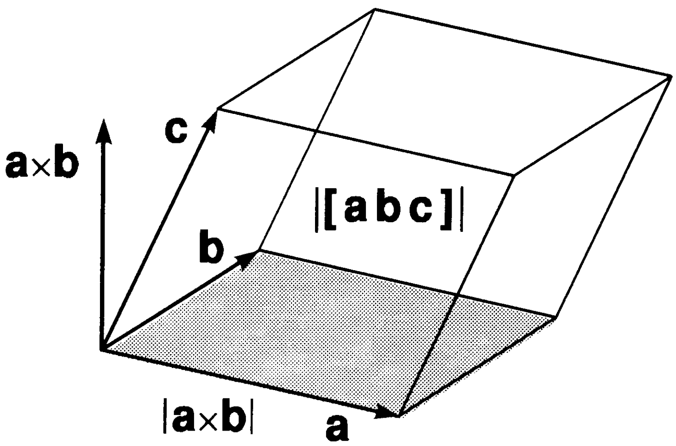
$\mathbf{r_{P'}} = 2\,\mathbf{r_F} - \mathbf{r_P} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dies ergibt $P'\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Punkte, die von einer Geraden g einen Abstand ρ haben liegen auf dem Mantel eines geraden Kreiszylinders um g mit Radius ρ. Die Koordinaten dieser Punkte erfüllen die Koordinatengleichung des Kreiszylinders. Siehe dazu das separate Kapitel über gerade Kreiszylinder.

Vektorgeometrie, Seite 59:

11. Das Spatprodukt

Anstatt einfache Skalar- und Vektorprodukte von Vektoren können auch mehrfache Produkte von Vektoren, wie z.B. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ u.s.w. berechnet werden. Von diesen mehrfachen Produkten hat ein als "***Spatprodukt***" bezeichnetes Produkt dreier Vektoren wie folgt:



$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$$
$$= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$$
$$= -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$$

eine spezielle (geometrische) Bedeutung. Das Spatprodukt ist dem Betrag nach gleich dem Volumen des von den drei Vektoren **a**, **b** und **c** "aufgespannten" Prismas, welches auch als "Spat" bezeichnet wird. Es gilt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Es gilt deshalb folgende Notation: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{abc}]$. (Wenn $[\mathbf{abc}] > 0$ bilden **a**, **b** und **c** ein Rechtssystem). In dieser Schreibweise wird obige Gleichung wie folgt geschrieben: $[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}]$. Das Spatprodukt wird wie folgt berechnet:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x$$

Liegen die drei Vektoren **a**, **b** und **c** in einer Ebene (komplanare Vektoren), so gilt $[\mathbf{abc}] = 0$. Die drei Vektoren werden dann als linear abhängig bezeichnet, d.h. man kann einen beliebigen der drei Vektoren als eine ***Linearkobintion*** der beiden andern darstellen, z.B.

$$\mathbf{c} = \alpha\, \mathbf{a} + \beta\, \mathbf{b}$$

Das Volumen eines unregelmässigen Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C und D mit Ortsvektoren $\mathbf{r_A}$, $\mathbf{r_B}$, $\mathbf{r_C}$ und $\mathbf{r_D}$ kann als Spatprodukt wie folgt berechnet werden:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[(\mathbf{r_B} - \mathbf{r_A})\ (\mathbf{r_C} - \mathbf{r_A})\ (\mathbf{r_D} - \mathbf{r_A})]\right| = \frac{1}{6}\left|[(\mathbf{r_A} - \mathbf{r_B})\ (\mathbf{r_C} - \mathbf{r_B})\ (\mathbf{r_D} - \mathbf{r_B})]\right| = \ldots.$$

$$= \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B & z_C - z_B \\ x_D - x_B & y_D - y_B & z_D - z_B \end{matrix}\right\| = \ldots..$$

Vektorgeometrie, Seite 60:

Es gilt folgendes:

Satz 8:	Das Spatprodukt **[abc]** von drei Vektoren **a**, **b** und **c** ist im Betrag gleich dem Volumen des von **a**, **b** und **c** "aufgespannten" Prismas, welches auch als "***Spat***" bezeichnet wird.

Satz 9:	Ist ein Spatprodukt **[abc]** von drei Vektoren **a**, **b** und **c** gleich null, so sind diese Vektoren ***komplanar***, d.h. sie liegen in einer Ebene. Die Vektoren werden in diesem Fall auch als ***linear abhängig*** bezeichnet. Ein beliebiger der drei Vektoren lässt sich dann als Linearkombination der zwei andern darstellen, z.B. $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$.

Im dreidimensionalen Raum sind mehr als drei Vektoren stets linear abhängig. Mit Hilfe des Spatprodukts kann man einen beliebigen Vektor **d** als Linearkombination von drei linear unabhängigen Vektoren **a**, **b** und **c** darstellen wie folgt:

$$\mathbf{d} = \frac{[\mathbf{bcd}]\,\mathbf{a} - [\mathbf{acd}]\,\mathbf{b} + [\mathbf{abd}]\,\mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]}$$

1. Beispiel: Es seien drei Vektoren **a**, **b** und **c** gegeben wie folgt: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ q \end{pmatrix}$. Bestimme die Grösse q so, dass **a**, **b** und **c** voneinander linear abhängig sind und stelle für die gefundenen Werte von q **c** als eine Linearkombination von **a** und **b** dar wie folgt: $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$.

Lösung: Vektoren sind linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt gleich null ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} q & 2 & 3 \\ q & 1 & -1 \\ 3 & -2 & q \end{vmatrix} = -q^2 - 8q - 15 = 0.$$

Dies ist der Fall, wenn $q_1 = -5$ und $q_2 = -3$.

Im ersten Fall gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Man erhält $\alpha_1 = -1{,}4$ und $\beta_2 = 0{,}8$, d.h. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = -1.4 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}8 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ähnlich erhält man für die Lösung $q_2 = -3$ eine Linearkombination wie folgt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha_2 = -1$ und $\beta_2 = 0$.

Vektorgeometrie, Seite 61:

2. Beispiel: Die Punkte $A\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}7\\-5\\1\end{pmatrix}$ und $D\begin{pmatrix}q\\1\\4\end{pmatrix}$ seien Eckpunkte eines unregelmässigen Tetraeders. Bestimme die Grösse q in D so, dass das Volumen des Tetraeders gleich 14 wird.

Lösung: Hier gilt $\begin{vmatrix}(4-3) & (1-1) & (2-4)\\(7-3) & (-5-1) & (1-4)\\(q-3) & (1-1) & (4-4)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\4 & -6 & -3\\(q-3) & 0 & 0\end{vmatrix} = 12\,(3-q) = 6 \cdot$ $(\pm 14) = \pm 84$. Für die beiden Vorzeichen erhält man zwei verschiedene Lösungen für q wie folgt: $q_1 = 10$ und $q_2 = -4$.

Vektorgeometrie, Seite 64:

12. Mehrfache Produkte von Vektoren

Weder beim skalaren noch beim vektoriellen Produkt können mehr als zwei Vektoren ohne weiteres miteinander verbunden werden. Vielmehr müssen Produkte wie z.B. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ durch die Verwendung von Klammern auf Produkte von nur zwei Vektoren zurückgeführt werden.

Für das Vektordreierprodukt gilt der ***Entwicklungssatz*** wie folgt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a}$$

Für das Skalarprodukt von zwei Vektorprodukten erhält man die ***Identität von Lagrange*** wie folgt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

Für Vektorprodukte mit vier Faktoren gilt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}\,[\mathbf{abd}] - \mathbf{d}\,[\mathbf{abc}] = \mathbf{b}\,[\mathbf{acd}] - \mathbf{a}\,[\mathbf{bcd}]$$
$$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \times \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{abd}]\,\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Vektorgeometrie, Seite 65:

13. Gleichungen von Ebenen

Für die Darstellung von Ebenen bestehen verschiedene Möglichkeiten.

13.1. Koordinatengleichungen von Ebenen:

$$E: ax + by + cz + d = 0.$$

Wenn $a = 0$, $b = 0$ oder $c = 0$ verläuft E parallel zur x-, y-, resp. z-Achse. Wenn $d = 0$ geht E durch den Koordinatenursprung. Die Gleichungen der sogenannten ***Koordinatenebenen*** in dieser Darstellung lauten E_1: $x = 0$, E_2: $y = 0$ und E_3: $z = 0$. E_1 wird nachfolgend auch als ***Grundrissebene*** bezeichnet. Normalprojektionen von Punkten (oder Geraden) Auf E_1 werden kurz als ***Grundriss*** bezeichnet. Ebenengleichungen bei welchen $d = 0$ stellen Ebenen dar, die durch den Koordinatenursprung gehen. Gleichungen, bei welchen einer der Koeffizienten a, b oder c gleich null ist verlaufen parallel zur x-, y- resp. z-Achse.

Die Gleichung einer Ebene E durch einen Punkt $P_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ lautet $E: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Beispiel: Bestimme in der Ebenengleichung $E: 4x - 3y + pz - 1 = 0$ die Grösse d so, dass $P\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \in E$.

Lösung: Einsetzen der Koordinaten ergibt $E: 4x - 3y + pz - 4 \cdot 2 - (-3) \cdot (-3) - p \cdot (-8)$ $= 4x - 3y + pz - 8 - 9 - p = 4x - 3y + pz - 17 + 8p = 0$. Ein Vergleich mit der ursprünglichen Form der Gleichung für E ergibt $-17 + 8p = -1$ und man erhält für p folgendes: $p = 2$.

Aus der Koordinatengleichung einer Ebene kann man die ***Achsenabschnitte auf den Koordinatenachsen*** wie folgt bestimmen:

$E: ax + by + cz + d = 0$

x-Achse: $\delta_x = -d/a$
y-Achse: $\delta_y = -d/b$
z-Achse: $\delta_z = -d/c$

Die Gleichung der Ebene kann mit Hilfe der Achsenabschnitte δ_x, δ_y und δ_z formuliert werden wie folgt:

$$E: \frac{x}{\delta_x} + \frac{y}{\delta_y} + \frac{z}{\delta_z} = 1$$

Aus den Koeffizienten a, b und c einer Gleichung für eine Ebene E erhält man einen Normalenvektor **n** zu E wie folgt:

Vektorgeometrie, Seite 66:

$$\mathbf{n} = \kappa \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Dabei ist κ ein beliebiger Streckungsfaktor. Dies ist ersichtlich aus der nachfolgenden Möglichkeit der Darstellung einer Ebene.

Es gilt also

Satz 10: Auf eine Ebene mit der Koordinatengleichung $E: ax + by + cz + d = 0$ stehen die Vektoren $\mathbf{n}_{\pm} = \pm \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ senkrecht.

13.2. Achsenabschnittsgleichung der Ebene:

Eine Koordinatengleichung einer Ebene in der Form

$$E: \frac{x}{\delta_x} + \frac{y}{\delta_y} + \frac{z}{\delta_z} = 1$$

wird als Achsenabschnittsgleichung der Ebene bezeichnet. Die Grössen δ_x, δ_y und δ_z sind gleich den Achsenabschnitten von E auf der x-, y- resp. z-Achse.

Beispiel: Eine Koordinatengleichung einer Ebene E sei wie folgt gegeben: $E: 5x + 6y + qz - 60 = 0$. Für das Volumen V des von E, der xy-, der yz- und der xz-Ebene eingeschlossene Volumen gelte $V = 150$. [Anmerkung: Die Gleichungeb xy-, die yz- und die xz-Ebene lauten: $z = 0$, $x = 0$, resp. $y = 0$]. Bestimme q.

Lösung: Aus der Achsenabschnittsgleichung

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{10} + \frac{q}{60} z = 1$$

erhält man $V = [12 \cdot 10 \cdot (60/q)]/6 = 150$. Daraus erhält man $q = 8$.

13.3. Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene:

Es sei $\mathbf{n}$ ein Normalenvektor von E und $\mathbf{r}_o$ der Ortsvektor eines Punkts P_o auf E, d.h. $P_o \in E$. Für einen beliebigen Punkt P in E mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ liegt $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$ in der Ebene. Somit steht $\mathbf{n}$ senkrecht zu $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$ und das Skalarprodukt $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$ wird null. Daraus ergibt sich eine weitere Möglichkeit eine Ebene darzustellen wie folgt:

Vektorgeometrie, Seite 67:

$$E: \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = \mathbf{n} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} \right) = 0$$

Beispiel: Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene, die senkrecht steht zur Geraden g wie folgt

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und durch den Punkt $P_o \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ geht.

Lösung: Der Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor zu E. Somit erhält man

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 3 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich folgende Koordinatengleichung für E: E: $2x + y - 3z + 2 = 0$.

13.4. Die Hessesche Normalform

Ist der Betrag des Normalenvektors **n** in der Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene gleich 1, so erhält man die ***Hessesche Normalform***. Für einen Normalenvektor mit beliebigem Betrag erhält man die Hessesche Normalform aus einer Punkt-Richtungs-Gleichung wie folgt:

$$E: \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = 0$$

Aus einer Koordinatengleichung wie folgt: E: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$ erhält man

$$E: \frac{n_x x + n_y y + n_z z + d}{\pm\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} = 0$$

Die Hessesche Normalform einer Ebenengleichung hat folgende zwei wichtige Eigenschaften:

Vektorgeometrie, Seite 68:

1. Abstand eines Punktes von der Ebene: Setzt man die Koordinaten eines Punktes P, der nicht in E liegt in eine Hessesche Normalform der Gleichungen für E, so erhält man den Abstand δ des Punktes $P\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix}$ von der Ebene, d.h.

$$\delta = \left| \frac{n_x x_o + n_y y_o + n_z z_o + d}{\pm\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \right|$$

(Die Wurzel hat stets das entgegengesetzte Vorzeichen von d!). Ist der Ausdruck im Betragzeichen positiv, so liegen Koordinatenursprung und der Punkt P auf derselben Seite von E. Im umgekehrten Fall liegen P und der Koordinatenursprung auf der verschiedenen Seiten der Ebene.

1.Beispiel: Bestimme den Abstand des Punktes P von der Ebene E. Es sei E: $2x - 2y + z - 4 = 0$ und $P\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Lösung: Man erhält $\delta = \left| \frac{-4 + 2 - 3 - 4}{3} \right| = 3.$

2. Beispiel: Bestimme den Abstand zwischen den beiden parallelen Ebenen E_1 und E_2 wie folgt:

$$E_1: 10x + 14y - 35z - 50 = 0$$
$$E_2: 10x + 14y - 35z + 28 = 0$$

Lösung: Wir berechnen für die Abstände des Koordinatenursprungs von E_1 und E_2 folgendes: $\delta_1 = |-50/39|$, resp. $\delta_2 = |28/39|$. Weil die Ausdrücke im Betragzeichen der Formeln für δ_1 und δ_2 unterschiedliche Vorzeichen haben, liegt der Koordinatenursprung zwischen den beiden parallelen Ebenen. Somit erhält man deren Abstand δ wie folgt: $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2$.

2. Parallele Ebenen: Es seien E_1 und E_2 zwei parallele Ebenen im Abstand δ mit Koordinatengleichungen wie folgt: $E_1: ax + by + cz + d_1 = 0$ und $E_2: ax + by + cz + d_2 = 0$. Dann besteht folgender Zusammenhang zwischen d_1 und d_2:

$$d_2 = d_1 \pm \delta\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Beispiel: Bestimme Koordinatengleichungen von Ebenen im Abstand 2 parallel zur Ebene E_1 wie folgt: $E_1: 3x - 6y + 2z - 1 = 0$ verlaufen.

Lösung: Aus obiger Gleichung erhält man $d_2 = -1 \pm 2\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = -1 \pm 14$. Dies ergibt ein Paar Ebenen E_2 und E_3 wie folgt: $E_2: 3x - 6y + 2z + 13 = 0$ und $E_3: 3x - 6y + 2z - 15 = 0$.

Vektorgeometrie, Seite 69:

3. Winkelhalbierende Ebenen: Setzt man die Abstände δ_1 und δ_2 von zwei Ebenen E_1, resp. E_2 gleich, so erhält man die Menge aller Punkte, welche von E_1 und E_2 gleich weit entfernt sind, d.h. die winkelhalbierenden Ebenen W_1 und W_2. Es sei E_1: $n_{x1}x + n_{y1}y + n_{z1}z + d_1 = 0$ und E_2: $n_{x2}x + n_{y2}y + n_{z2}z + d_2 = 0$. Aus $\delta_1 = \pm\delta_2$ erhält man für die winkelhalbierenden Ebenen folgendes:

$$W_1: \frac{n_{x1}x + n_{y1}y + n_{z1}z + d}{\sqrt{n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2}} + \frac{n_{x2}x + n_{y2}y + n_{z2}z + d}{\sqrt{n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2}} = 0$$

$$W_2:: \frac{n_{x1}x + n_{y1}y + n_{z1}z + d}{\sqrt{n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2}} - \frac{n_{x2}x + n_{y2}y + n_{z2}z + d}{\sqrt{n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2}} = 0$$

Beispiel: Bestimme Gleichungen der winklehalbierenden Ebenen von E_1 und E_2 wie folgt: E_1: $2x + 5y - 2z + 3 = 0$ und E_2: $4x - 4y + z - 5 = 0$.

Lösung: Aus der Bedingung $\delta_1 \pm \delta_2 = 0$ erhält man folgendes:

$$\frac{2x + 5y - 2z + 3}{\sqrt{33}} \pm \frac{4x - 4y + z - 5}{\sqrt{33}} = 0$$

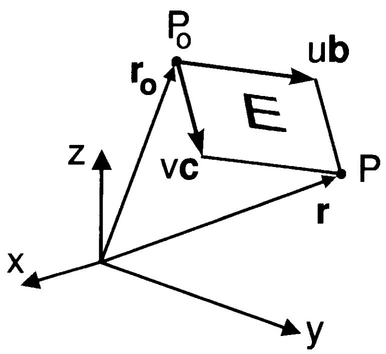
Die Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen lauten wie folgt:

$$W_1: 6x + y - z - 2 = 0$$
$$W_2: 2x - 9y + 3z - 8 = 0$$

Obige Problemstellungen werden später noch eingehend behandelt.

13.5. Parameterdarstellung von Ebenen

Eine Ebene wird durch zwei Richtungsvektoren "aufgespannt". Es seien **b** und **c** zwei Richtungsvektoren der Ebene E und r_o sei der Ortsvektor eines Punktes P_o auf E, d.h. $P_o \in E$. Dann gilt für jeden Punkt mit Ortsvektor **r** auf der Ebene folgendes:



$$E: \mathbf{r} = \mathbf{r_o} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$$

oder

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Dabei sind u und v Streckungsfaktoren.

Vektorgeometrie, Seite 70:

1. Beispiel: Bestimme eine Parametergleichung einer Ebene E, die durch drei Punkte geht wie folgt: $A\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} \in E$, $B\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \in E$ und $C\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \in E$.

Lösung: Wir wählen willkürlich den Punkt C als Aufhängepunkt. Für die Richtungsvektoren kann man die Differenz der Ortsvektoren von zwei beliebigen der drei Punkte verwenden (oder ein Vielfaches davon). Wir nehmen $\mathbf{b} = ½\,(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C)$ und $\mathbf{c} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B$. Man erhält dann folgende Parameterdarstellung von E:

$$E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$$

2. Beispiel: Bestimme eine Parametergleichung für eine Ebene E, die durch die Gerade g wie folgt: $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ und den Punkt $P\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ geht.

Lösung: Wir verwenden P als Aufhängepunkt und den Richtungsvektor der Geraden als einen der beiden Richtungsvektoren von E, z.B. $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. Den zweiten Richtungsvektor bestimmen wir als Differenz der Ortsvektoren von P und des Aufhängepunkts von g, d.h. $\mathbf{c} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_o$. Dies ergibt folgendes:

$$E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

13.6. Bestimmung einer Koordinatengleichung einer Ebene aus einer Parameterdarstellung:

Es gilt folgendes:

Satz 11: Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren einer Ebene in ihrer Parameterdarstellung ergibt einen Vektor, der zur Ebene senkrecht steht.

Es seien **b** und **c** Richtungsvektoren der Parameterdarstellung einer Ebene E und $\mathbf{r}_o$ sei der Ortsvektor ihres Aufhängepunkts. Obige Aussage ergibt eine Bestimmung der Koordinatengleichung von E wie folgt:

$$E: (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_o\\y_o\\z_o\end{pmatrix}\right) = 0$$

Vektorgeometrie, Seite 71:

Beispiel: Bestimme eine Koordinatengleichung einer Ebene E mit einer Parameterdarstellung wie folgt:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Man erhält $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Den berechneten Normalenvektor kann man um einen Faktor 3 verkürzen und erhält folgendes:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y + 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dies ergibt $E: x + y - z - 1 = 0$.

13.7. Bestimmung einer Parameterdarstellung einer Ebene aus einer Koordinatengleichung:

In seltenen Fällen muss aus einer Koordinatengleichung einer Ebene E eine Parameterdarstellung bestimmt werden. Man kann drei beliebige Punkte auf der Ebene bestimmen, indem man für zwei seiner Koordinaten willkürliche Werte einsetzt und die verbleibende Koordinate aus der Koordinatengleichung so bestimmt, dass der Punkt in E liegt. Nachdem drei Punkte auf E in dieser Weise bestimmt wurden, wird einer der Punkte als Aufhängepunkt verwendet und die beiden Richtungsvektoren der Ebene werden als Differenz von Ortsvektoren zweier Punkte bestimmt.

Beispiel: Bestimme eine Parameterdarstellung einer Ebene E aus einer Koordinatengleichung wie folgt: $E: 3x - y + 2z - 4 = 0$.

Lösung: Wir bestimmen drei Punkte P_1, P_2 und P_3 wie folgt:

P_n	x	y	z
n = 1	$(2 - 2 \cdot 0 + 4)/3$ $= 2$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$
n = 2	$\boxed{0}$	-4 / 1= -4	$\boxed{0}$
n = 3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	4 / 2 = 2

Die eingerahmten Zahlen stellen die willkürlich gewählten Koordinaten dar.

Man erhält $P_1\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ und $P_3\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. Wir wählen willkürlich $\mathbf{r}_o = \mathbf{r}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ und $\mathbf{c} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ und erhalten

Vektorgeometrie, Seite 72:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13.8. Die mittelsenkrechte Ebene einer Strecke

Den Ortsvektor $\mathbf{r_M}$ des Mittelpunkts einer Strecke mit den Endpunkten P_1 und P_2 erhält man aus deren Ortsvektoren $\mathbf{r_1}$, resp. $\mathbf{r_2}$ wie folgt:

$$\mathbf{r_M} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2}] = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

Die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ steht senkrecht zur mittelsenkrechten Ebene E_M, es ist also $\mathbf{n} = \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$. Die Koordinatengleichung von E_M erhält man dann wie folgt:

$$E_M: (x_1 - x_2)\,[x - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)] + (y_1 - y_2)\,[y - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)] + (z_1 - z_2)\,[z - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)]$$

Daraus erhält man folgendes:

$$E_M: (x_1 - x_2)\,x + (y_1 - y_2)\,y + (z_1 - z_2)\,z - \tfrac{1}{2}[x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2] = 0$$

Beispiel: Zwei gegenüberliegende Eckpunkte A und C auf den Diagonalen eines Quadrats seien gegeben wie folgt: $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme eine Koordinatengleichung einer Ebene E auf welcher sich die fehlenden Eckpunkte B und D befinden.

Lösung: Die mittelsenkrechte Ebene der Strecke $\overline{AC}$ ist eine solche Ebene. Aus obiger Formel erhält man $E: 2x - 3y - 2z - 7 = 0$.

Zu Ebenen (und Geraden) gibt es folgende nützliche Aussagen:

1. Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht zu beiden Richtungsvektoren der Ebene in einer Parameterdarstellung.
2. Das Vektorprodukt beider Richtungsvektoren der Parameterdarstellung einer Ebene steht senkrecht zur Ebene.
3. Eine Gerade steht senkrecht zu einer Ebene, wenn ihr Richtungsvektor und ein Normalenvektor zur Ebene kollinear sind.
4. Eine Ebene verläuft parallel zu einer Geraden, wenn die Richtungsvektoren von der Geraden und der Ebene voneinander linear abhängig (komplanar) sind und im Speziellen gilt folgendes: Ist ein Richtungsvektor einer Ebene kollinear zum Richtungsvektor einer Geraden, so sind Ebene und Gerade zueinander parallel. Liegt zudem der Aufhängepunkt der Geraden in der Ebene, so liegt die Gerade in der Ebene.

Vektorgeometrie, Seite 73:

5. Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren kollinear sind. Für Koordinatengleichungen von zwei parallelen Ebenen, E_1: $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ und E_2: $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$, gilt dementsprechend $a_1 / a_2 = b_1 / b_2 = c_1 / c_2$.

6. Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn ihre Normalenvektoren einen rechten Winkel einschliessen. Anders formuliert: Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Normalenvektoren beider Ebenen gleich null ist.
7. Wenn einer der Richtungsvektoren einer Ebene E_1 und ein Normalenvektor einer zweiten Ebene E_2 kollinear sind, dann stehen E_1 und E_2 senkrecht aufeinander.
8. Der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen verläuft parallel zum Vektorprodukt der Normalenvektoren beider Ebenen.
9. Eine Ebene E_1 steht senkrecht zu einer Ebene E_2, wenn sie zu einer zu E_2 senkrecht stehenden Geraden parallel verläuft.
10. Eine Ebene mit Normalenvektor $\mathbf{n}$ verläuft parallel zu einer Geraden mit Richtungsvektor $\mathbf{a}$, wenn $\mathbf{n}$ und $\mathbf{a}$ senkrecht zueinander stehen, d.h. wenn folgendes gilt: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$.
11. Wenn die beiden Richtungsvektoren einer Ebene E_1 kollinear zu den Normalenvektoren $\mathbf{n_2}$ und $\mathbf{n_3}$ zweier Ebenen E_2 und E_3 sind, dann steht E_1 senkrecht sowohl zu E_2 als auch zu E_3. Insbesondere steht E_1 senkrecht zur Schnittgeraden von E_2 und E_3.
12. Wenn eine Ebene E_1 senkrecht zur Schnittgeraden zweier Ebenen E_2 und E_3 steht, dann steht E_1 senkrecht sowohl zu E_2 als auch zu E_3.
13. Eine Ebene E_1 steht senkrecht zu einer Ebene E_2, wenn ein Normalenvektor zu E_1 als Linearkombination der Richtungvektoren von E_2 dargestellt werden kann.
14. Von einer Ebene E_1 sei ein Normalenvektor $\mathbf{n_1}$ gegeben. Wenn einer der Richtungvektoren einer Ebene E_2 kollinear ist zu $\mathbf{n_1}$, dann schneiden sich E_1 und E_2 rechtwinklig.

Vektorgeometrie, Seite 84:

14. Normalebene zu einer Geraden

Der Normalenvektor der Normalebene verläuft parallel (oder in der Gegenrichtung) zum Richtungsvektor der Geraden. Aus der Geradengleichung wie folgt:

$$g\colon \mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \lambda\,\mathbf{a} \quad \text{oder} \quad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

erhält man Koordinatengleichungen einer Schar von (unendlich vielen) Normalebenen wie folgt:

$$E\colon a_x x + a_y y + a_z z + d = 0$$

mit d beliebig.

Beispiel: Bestimme eine Koordinatengleichung der Normalebene zu einer Geraden g wie folgt: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, die durch den Koordinatenursprung geht.

Lösung: Für die Gleichung der Schar von Normalebenen erhält man $E\colon 3x + 2y + 5z + d = 0$. Weil E durch den Koordinatenursprung geht gilt $d = 0$. Somit erhält man folgendes: $E\colon 3x + 2y + 5z = 0$.

Vektorgeometrie, Seite 86:

15. Lot auf eine Ebene

Der Richtungsvektor des Lots zu einer Ebene verläuft parallel oder in Gegenrichtung zum Normalenvektor der Ebene. Aus einer Koordinatengleichung einer Ebene E wie folgt: E: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$ erhält man eine Gleichung für eine Schar von (unendlich vielen) Normalen wie folgt:

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

mit x_o, y_o und z_o willkürlich. Aus einer Parametergleichung der Ebene wie folgt: E: $\mathbf{r} = \mathbf{r_o} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ erhält man folgende Gleichung für eine Schar von Normalen:

$$n: \mathbf{r} = \mathbf{r_o} + \lambda\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$$

Beispiel: Bestimme eine Gleichung für das Lot zu einer gegebenen Ebene E durch den Punkt P. Es sei E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösung: Der Punkt P dient als „Aufhängepunkt" von n. Man erhält folgendes:

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -23 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie, Seite 87:

16. Normalebene zu einer Ebene

Eine Ebene E_n, die zu einer gegebenen Ebene E normal steht verläuft parallel zu einem Normalenvektor zu E. Man kann deshalb einen Normalenvektor zu E als Richtungsvektor für E_n verwenden und erhält eine Schar von (unendlich vielen) Normalenebenen zu E. Wenn die Koordinatengleichung von E gegeben ist wie folgt: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$, erhält man für E_n folgende Parametergleichung:

$$E_n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

mit x_o, y_o, z_o, c_x, c_y und c_z willkürlich. Falls E in einer Parameterdarstellung gegeben ist kann man zunächst einen Normalenvektor zu E erzeugen, indem man das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren von E bestimmt.

Beispiel: Bestimme eine Koordinatengleichung der Normalenebene E_n zu einer gegebenen Ebene E, die durch eine gegebene Gerade g geht. Es sei $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir schreiben $E_n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + v \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Dies ergibt $E_n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Eine Umwandlung in eine Koordinatengleichung ergibt folgendes: $E: 2x - 9y - 25z - 61 = 0$.

Vektorgeometrie, Seite 88:

17. Durchstosspunkpunkt einer Geraden in einer Ebene

1. Fall: Parameterdarstellung der Ebene

Es seien eine Ebene E und eine Gerade g gegeben wie folgt:

$$g\colon \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \lambda\mathbf{a}$$
$$E\colon \mathbf{r} = \mathbf{r_2} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$$

oder

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$E\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

Der Ortsvektor des Schnittpunkts erfüllt beide Gleichungen

$$g \cap E\colon \mathbf{r_S} = \mathbf{r_1} + \lambda_S\mathbf{a} = \mathbf{r_2} + u_S\mathbf{b} + v_S\mathbf{c}$$

Daraus erhält man ein lineares Gleichungssystem (in λ_S, u_S und v_S). Gemäss Kramerscher Regel erhält man daraus die Lösung für λ_S wie folgt:

$$\lambda_S = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & -b_x & -c_x \\ y_2 - y_1 & -b_y & -c_y \\ z_2 - z_1 & -b_z & -c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & -b_x & -c_x \\ a_y & -b_y & -c_y \\ a_z & -b_z & -c_z \end{vmatrix}}$$

Wird dieser Wert für λ in die Geradengleichung eingesetzt, erhält man den Ortsvektor $\mathbf{r_S}$ des Schnittpunkts.

Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E, wenn

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } E\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie, Seite 89:

Lösung: Aus obiger Formel erhält man

$$\lambda_S = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \\ -5 & -5 & 4 \end{vmatrix}} = -2$$

Eingesetzt in die Gleichung für g ergibt dieser Wert für λ folgenden Schnittpunkt: $S\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

2. Fall: Koordinatengleichung der Ebene:

In diesem Fall werden die Koordinaten x, y und z in der Koordinatengleichung der Ebene ausgedrückt in λ. Wir schreiben die Geradengleichung wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o + \lambda_S a_x \\ y_o + \lambda_S a_y \\ z_o + \lambda_S a_z \end{pmatrix}$$

und die Koordinatengleichung von E sei E: $Ax + By + Cz + d = 0$. Man erhält dann $A[x_o + \lambda_S a_x] + B[y_o + \lambda_S a_y] + C[z_o + \lambda_S a_z] + d = 0$. Daraus erhält man für λ_S folgendes:

$$g \cap E: \lambda_S = -\frac{Ax_o + By_o + Cz_o + d}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}$$

1. Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene E wie folgt: E: $x - 2y + 3z - 10 = 0$ und g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung: Aus obiger Formel für λ_S erhält man

$$g \cap E: \lambda_S = -\frac{-9 - 14 + 3 - 10}{3 + 4 + 3} = -\frac{-30}{10} = 3$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt dies einen Schnittpunkt S wie folgt: $S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie, Seite 90:

2. Beispiel: Wenn man den Punkt P an der Geraden g spiegelt, erhält man den Punkt P'. Bestimme P', wenn g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $P\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir bestimmen zunächst eine Ebene E, die zu g senkrecht steht und durch den Punkt P geht. Wir erhalten folgendes: E: $2x - y + 4z + 36 = 0$. Für den Streckungsfaktor des Durchstosspunkts S erhalten wir folgendes:

$$g \cap E: \lambda_S = -\frac{6 - 5 - 16 + 36}{4 + 1 + 16} = -1.$$

Damit erhalten wir den Durchstosspunkt S. Dieser befindet sich in der Mitte der Strecke $\overline{P'P}$, d.h. $\mathbf{r_S} = \frac{1}{2}(\mathbf{r_P} + \mathbf{r_{P'}})$. Somit erhalten wir den Ortsvektor des Punkts P' wie folgt:

$$\mathbf{r_{P'}} = 2\mathbf{r_S} - \mathbf{r_P} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\,(-1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \rightarrow P'\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie, Seite 94:

18. Der Schnittpunkt von drei Ebenen.

Um den Schnittpunkt von drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 zu bestimmen, sollten diese als Koordinatengleichungen dargestellt werden wie folgt:

$$E_1\colon a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$E_2\colon a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$
$$E_3\colon a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

Die Koordinaten des Schnittpunkts erfüllen die Koordinatengleichungen von E_1, E_2 und E_3. Es sei

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

wenn $D = 0$ schneiden sich die Ebenen nicht in einem Punkt. Andernfalls erhält man die Koordinaten des Schnittpunkts S wie folgt:

$$x_s = \frac{D_x}{D},\ y_s = \frac{D_y}{D} \text{ und } z_s = \frac{D_z}{D}$$

wobei

$$D_x = \begin{vmatrix} -d_1 & b_1 & c_1 \\ -d_2 & b_2 & c_2 \\ -d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & -d_1 & c_1 \\ a_2 & -d_2 & c_2 \\ a_3 & -d_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und } D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & -d_3 \end{vmatrix}$$

Falls $D = 0$ gibt es keine oder unendlich viele Lösungen für x_s, y_s und z_s. Falls es keine Lösungen gibt, schneiden sich die Ebenen meist in drei zueinander parallelen Schnittlinien. Es kann auch sein, dass zwei oder alle Ebenen parallel verlaufen. Unendlich viele Lösungen gibt es im allgemeinen dann, wenn alle drei Ebenen durch eine gemeinsame Schnittlinie gehen. Wenn $D = 0$ gilt folgendes:

$D_x = D_y = D_z = 0 \rightarrow$ unendlich viele Lösungen!

$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$ oder $D_z \neq 0 \rightarrow$ keine Lösungen!

Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt der Ebenen $E_1\colon x - y + z - 4 = 0$, $E_2\colon x + y - z - 2 = 0$ und $E_3\colon 3x - 4y + z - 7 = 0$.

Lösung: Die Determinante des Gleichungssystems ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

Die Ebenen schneiden sich also in einem Punkt. Die Koordinaten des Schnittpunkts sind

Vektorgeometrie, Seite 95:

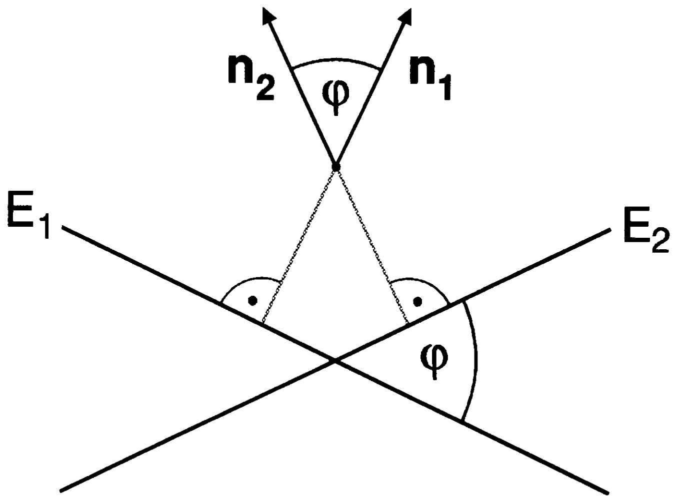
$$x_S = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ y_S = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ und } z_S = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

Der Schnittpunkt ist somit $S\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektorgeometrie, Seite 98:

19. Schnittwinkel von zwei Ebenen

Der Schnittwinkel φ von zwei Ebenen E_1 und E_2 ist gleich dem Winkel, den ihre Normalenvektoren $\mathbf{n_1}$, resp. $\mathbf{n_2}$ einschliessen. Aus deren Skalarprodukt erhält man folgendes:



$$\cos\varphi = \arccos\left|\frac{\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}|\;|\mathbf{n_2}|}\right|$$

Die Ebenen E_1 und E_2 werden betrachtet aus einer Perspektive bei welcher die Schnittgerade von E_1 und E_2 senkrecht zur Wandtafelebene steht.

Für Koordinatengleichungen für E_1 und E_2 wie folgt:

E_1: $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$
E_2: $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$$\cos\varphi = \arccos\left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\cdot(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}\right|$$

Dabei ist $\varphi \leq 90^\circ$.

Beispiel: Bestimme den Schnittwinkel von zwei Ebenen E_1 und E_2 wie folgt:
E_1: $2x - 3y + z - 4 = 0$ und E_2: $x + 2y + 3z - 12 = 0$.

Lösung: Es seien $\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{n_2}$ Normalenvektoren zu E_1, resp. E_2. Aus obigen Koordinatengleichungen für E_1 und E_2 erhält man

$\mathbf{n_1} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{n_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $|\mathbf{n_1}| = |\mathbf{n_2}| = \sqrt{14}$. Ausserdem ist $\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2} = -1$.

Daraus erhält man für φ folgendes: $\varphi = \arccos\left|\frac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}\right| =$

$\arccos\left|\frac{-1}{14}\right| = 85{,}90^\circ$.

Vektorgeometrie, Seite 100:

20. Schnittgerade von zwei Ebenen

Zur Berechnung der Schnittgeraden von zwei Ebenen E_1 und E_2 verwendet man am besten Koordinatengleichungen der Ebenen.

$$E_1:\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$E_2:\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Der Richtungsvektor **a** der Schnittgeraden steht senkrecht zu den Normalenvektoren $\mathbf{n_1}$ und $\mathbf{n_2}$ von E_1, resp. E_2. Man kann schreiben $\mathbf{a} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$. Als Aufhängepunkt P_o von g ist jeder beliebige Punkt geeignet, der sowohl auf E_1 als auch auf E_2 liegt. Hierfür macht man eine geeignete Annahme für die x-, y- oder z-Koordinate von P_o. Das Ganze läuft darauf hinaus, dass man eine dritte Ebene mit einer „einfachen" Gleichung, z.B. E_3: $x = 0$, einführt und den Schnittpunkt der drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 bestimmt. So ist es im Prinzip möglich, zwei Punkte auf der Schnittgeraden zu bestimmen. Wenn man die zwei Punkte auf der Schnittgeraden einmal hat, ist es ein Leichtes, aus ihnen die Gleichung der Schnittgeraden zu bestimmen. Die andern beiden Koordinaten werden dann aus den Koordinatengleichungen für E_1 und E_2 berechnet. Die Gleichung der Schnittgeraden lautet dann wie folgt:

$$g:\ \mathbf{r} = \mathbf{r_o} + \lambda[\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}]$$

oder

$$g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right)$$

Dabei ist $\mathbf{r_o}$ der Ortsvektor für den Aufhängepunkt. Den bestimmt man wie oben beschrieben.

Beispiel: Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden g von zwei Ebenen E_1 und E_2 mit Koordinatengleichungen wie folgt: E_1: $3x + y - z - 9 = 0$ und E_2: $x - y + z + 1 = 0$.

Lösung: Für den Aufhängepunkt P_o setzen wir willkürlich $z_o = 0$ und erhalten für die beiden andern Koordinaten von P_o, x_o und y_o, ein lineares Gleichungssystem wie folgt:

$$\left| \begin{array}{l} 3x_o + y_o = 9 \\ x_o - y_o = -1 \end{array} \right|$$

mit Lösungen $x_o = 2$ und $y_o = 3$. Es ist also $P_o\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Den Richtungsvektor von g berechnen wir als Vektorprodukt von Normalenvektoren der beiden Ebenen E_1 und E_2.

$$\mathbf{a} \propto \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie, Seite 101:

wir nehmen $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und erhalten für g folgendes: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Sind beide Ebenengleichungen in Parameterdarstellung gegeben wie folgt:

$$E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} b_{1x} \\ b_{1y} \\ b_{1z} \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} c_{1x} \\ c_{1y} \\ c_{1z} \end{pmatrix}$$

$$E_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} b_{2x} \\ b_{2y} \\ b_{2z} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} c_{2x} \\ c_{2y} \\ c_{2z} \end{pmatrix}$$

Erhält man durch Gleichsetzen der Ortsvektoren der auf E_1 und E_2 befindlichen Punkte ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem wie folgt:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 b_{1x} + v_1 c_{1x} - u_2 b_{2x} - v_2 c_{2x} = x_2 - x_1 \\ u_1 b_{1y} + v_1 c_{1y} - u_2 b_{2y} - v_2 c_{2y} = y_2 - y_1 \\ u_1 b_{1z} + v_1 c_{1z} - u_2 b_{2z} - v_2 c_{2z} = z_2 - z_1 \end{array} \right|$$

Für einen der Parameter u_1, v_1, u_2 oder v_2 muss man dann einen willkürlich gewählten Wert einsetzen und das Gleichungssystem nach den übrigen Parametern auflösen. Meistens wählt man den Wert null, z.B. $v_2 = 0$.

Beispiel: Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden g zweier Ebenen E_1 und E_2 wie folgt:

$$E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Gleichung von g sei g: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \lambda\mathbf{a}$. Den Richtungsvektor von g erhält man wie folgt:

$$\mathbf{a} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 15 \\ -58 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Wir setzen willkürlich $v_2 = 0$ und erhalten ein System linearer Gleichungen wie folgt:

$$\left| \begin{array}{l} u_1 + 2v_1 + u_2 = -3 \\ -2u_1 \quad - \quad 2u_2 = -2 \\ -u_1 + 3v_1 - 2u_2 = -5 \end{array} \right|$$

Vektorgeometrie, Seite 102:

Daraus erhält man $u_2 = -2$. Eingesetzt in die Gleichung für E_2 (zusammen mit $v_2 = 0$) erhält man einen Punkt P_o auf der Schnittgeraden g wie folgt: $P_o\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Man erhält dann für g eine Gleichung wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}15\\-58\\-50\end{pmatrix}$$

Wenn eine der beiden Ebenen mit einer Parametergleichung und die andere mit einer Koordinatengleichung definiert wird wie folgt:

$$E_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_o\\y_o\\z_o\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}c_x\\c_y\\c_z\end{pmatrix}$$
$$E_2: \ a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

dann wird eine Koordinate des Aufhängepunkts der Schnittgeraden g willkürlich festgelegt. Für $x = x_o$, $y = y_o$ oder $z = z_o$ erhält man für die Koordinaten x_1, y_1 und z_1 des Aufhängepunkts P_1 von g folgendes:

Fall	x_1	y_1	z_1
A	x_o	$y_o + \frac{(b_y c_x - b_x c_y)\,A}{B_x}$	$z_o + \frac{(b_z c_x - b_x c_z)\,A}{B_x}$
B	$x_o + \frac{(b_x c_y - b_y c_x)\,A}{B_y}$	y_o	$z_o + \frac{(b_z c_y - b_y c_z)\,A}{B_y}$
C	$x_o + \frac{(b_x c_z - b_z c_x)\,A}{B_z}$	$y_o + \frac{(b_y c_z - b_z c_y)\,A}{B_z}$	z_o

wobei $B_x = b_x\,(b\,c_y + c\,c_z) - c_x\,(b\,b_y + c\,b_z)$, $B_y = b_y\,(a\,c_x + c\,c_z) - c_y\,(a\,b_x + c\,b_z)$, $B_z = b_z\,(a\,c_x + b\,c_y) - c_z\,(a\,b_x + b\,b_y)$ und $A = \mathbf{n_2} \cdot \mathbf{r_o} = a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d$.

Beispiel: Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden g von zwei Ebenen E_1 und E_2 wie folgt:

$$E_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$$
$$E_2: \ x + 2y + 5z + 27 = 0$$

Lösung: Die Gleichung von g sei g: $\mathbf{r} = \mathbf{r_o} + \lambda\mathbf{a}$. Den Richtungsvektor $\mathbf{a}$ von g erhält man dann wie folgt:

$$\mathbf{a} = \left(\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\12\\-5\end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie, Seite 103:

Den Aufhängepunkt von g bestimmen wir nach Fall A, d.h. wir setzen willkürlich $x_1 = x_o = 2$. Dann ist $A = \mathbf{n_2} \cdot \mathbf{r_o} + d = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + 27 = 60$. $Bx = 3\,(2 \cdot 4 + 5 \cdot 3) - 5\,(2 \cdot 2 + 5 \cdot 2) = -1$. Dies ergibt für die fehlenden Koordinaten y_1 und z_1 von P_1 folgendes:
$y_1 = 3 + \frac{(2 \cdot 5 - 3 \cdot 4) \cdot 60}{-1} = 123$ und $z_1 = 5 + \frac{(2 \cdot 5 - 3 \cdot 3) \cdot 60}{-1} = -55$. Eine Gleichung für g lautet dann

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\123\\-55\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\12\\-5\end{pmatrix}$$

Wäre für eine Koordinate von P_1 $y_1 = y_o = 3$ (Fall B) oder $z_1 = z_o = 5$ (Fall C) festgelegt worden, so hätten sich Aufhängepunkte von g wie folgt ergeben:

$$P_1\begin{pmatrix}-8\\3\\-5\end{pmatrix} \text{ oder } P_1\begin{pmatrix}-10\\-21\\5\end{pmatrix}$$

20.1. Parameterfreie Darstellungen von Geraden

Geraden können als Schnittgeraden zweier Ebenen dargestellt werden. Für eine derartige Darstellung einer Geraden sind also zwei Ebenengleichungen notwendig. Aus der bis anhin verwendeten Punkt-Richtungsgleichung einer Geraden wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_o\\y_o\\z_o\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$$

erhält man

$$\lambda = \frac{x}{a_x} - \frac{x_o}{a_x} = \frac{y}{a_y} - \frac{y_o}{a_y} = \frac{z}{a_z} - \frac{z_o}{a_z}$$

Beliebige zwei von den drei Ebenengleichungen

$$\frac{x}{a_x} - \frac{y}{a_y} - \frac{x_o}{a_x} + \frac{y_o}{a_y} = 0$$

$$\frac{x}{a_x} - \frac{z}{a_z} - \frac{x_o}{a_x} + \frac{z_o}{a_z} = 0$$

$$\frac{y}{a_y} - \frac{z}{a_z} - \frac{y_o}{a_y} + \frac{z_o}{a_z} = 0$$

stellen dann eine Gerade g dar.

Vektorgeometrie, Seite 104:

Beispiel: Erstelle Koordinatengleichungen für eine Geraden g durch die Punkte $A\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $B\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ und bestimme den Schnittpunkt von g mit einer Ebene E wie folgt: E: $3x - 2y + 5z - 17 = 0$.

Lösung: Eine Parametergleichung von g erhält man aus den Punkten A und B auf g wie folgt:

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$$

Daraus erhält man $\lambda = x - 3 = \frac{1}{3}(y - 1) = \frac{1}{5}(- z + 2)$. Die Gerade g kann dann beispielsweise wie folgt dargestellt werden: g: $\left|\begin{array}{c}3x - y = 8\\5x + z = 17\end{array}\right|$. Für den Schnittpunkt S von g und E gelten dann Gleichungen wie folgt:

$$\left|\begin{array}{c}g\text{: } 3x - y = 8\\g\text{: } 5x + z = 17\\E\text{: } 3x - 2y + 5z = 17\end{array}\right| \quad \rightarrow \quad S\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

Durch Auflösen der linearen Gleichungen erhält man dann den Schnittpunkt S von g und E wie oben gezeigt.

Vektorgeometrie, Seite 107:

21. Winkelhalbierende von zwei sich schneidenden Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 wie folgt:

$$g_1: \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \lambda_1 \mathbf{a_1}$$
$$g_2: \mathbf{r} = \mathbf{r_2} + \lambda_2 \mathbf{a_2}$$

schneiden sich im Punkt P_o. Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_1 und w_2 lauten dann wie folgt:

$$w_1: \mathbf{r} = \mathbf{r_o} + \omega_1 [|\mathbf{a_2}|\, \mathbf{a_1} + |\mathbf{a_1}|\, \mathbf{a_2}]$$
$$w_2: \mathbf{r} = \mathbf{r_o} + \omega_2 [|\mathbf{a_2}|\, \mathbf{a_1} - |\mathbf{a_1}|\, \mathbf{a_2}]$$

Beispiel: Die beiden Geraden g_1 und g_2 wie folgt:
$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden sich im Punkt $P_o \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Punkte auf der Koordinatenebene E_2: $y = 0$, welche auf der Winkelhalbierenden von g_1 und g_2 liegen.

Lösung: Die Beträge der Richtungsvektoren sind $|\mathbf{a_1}| = 18$ $|\mathbf{a_2}| = 9$. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden lauten dann wie folgt:

$$w_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \omega_1 \left(9 \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + 18\,\omega_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \omega_2 \left(9 \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} - 18 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - 18\,\omega_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Winkelhalbierende w_1 schneidet die Koordinatenebene E_2, wenn $-6 + 18 \cdot 12\, \omega_1 = 0$, d.h. wenn $\omega_1 = 1/36$. Die Winkelhalbierende w_2 schneidet die Koordinatenebene E_2, wenn $-6 + 18 \cdot 4\, \omega_2 = 0$, d.h. wenn $\omega_2 = 1/12$. Werden die Streckungsfaktoren ω_1 und ω_2 eingesetzt in die Gleichung für w_1, resp. w_2, so erhält man die gesuchten Punkte wie folgt:

$$w_1 \cap E_2:\ S_1 \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix},\quad w_2 \cap E_2:\ S_2 \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}.$$

Die Winkelhalbierenden und ein gemeinsamer Normalenvektor von zwei sich schneidenden Geraden spannen zwei zueinander senkrechte Ebenen auf, auf denen die Punkte liegen, welche von beiden Geraden gleich weit entfernt sind.

Vektorgeometrie, Seite 110:

22. Winkelhalbierende Ebenen von zwei sich schneidenden Ebenen

Die winkelhalbierenden Ebenen erhält man am besten aus der Hesseschen Normalform beider Ebenen. Es sei E_1: $n_{x1}x + n_{y1}y + n_{z1}z + d_1 = 0$ und E_2: $n_{x2}x + n_{y2}y + n_{z2}z + d_2 = 0$. Koordinatengleichungen der winkelhalbierenden Ebenen erhält man dann wie folgt:

$$W_1: \frac{n_{x1}x + n_{y1}y + n_{z1}z + d}{\sqrt{n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2}} + \frac{n_{x2}x + n_{y2}y + n_{z2}z + d}{\sqrt{n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2}} = 0$$

$$W_2: \frac{n_{x1}x + n_{y1}y + n_{z1}z + d}{\sqrt{n_{x1}^2 + n_{y1}^2 + n_{z1}^2}} - \frac{n_{x2}x + n_{y2}y + n_{z2}z + d}{\sqrt{n_{x2}^2 + n_{y2}^2 + n_{z2}^2}} = 0$$

Ein Rechenbeispiel wurde im Kapitel „Gleichungen von Ebenen“ vorgeführt.

Vektorgeometrie, Seite 111:

23. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene

Es sei $\mathbf{r}_o$ der Ortsvektor eines Punkts P_o auf einer Ebene E und P_1 sei ein Punkt für welchen gilt $P_1 \notin E$. Die Koordinatengleichung von E sei E: ax + by + cz + d = 0. Der Abstand δ des Punktes P_1 von der Ebene E mit Normalenvektor $\mathbf{n}$ kann (mithilfe der Hesseschen Normalform von E) wie folgt berechnet werden:

$$\delta = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{a x_1 + b y_1 + c z_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Ausserdem gilt folgendes: P_1 und der Koordinatenursprung befinden sich auf derselben Seite von E, falls $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_1) < 0$.

1. Beispiel: Bestimme den Abstand δ des Punktes $P\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ von der Ebene

E: 2x + 4y - 5z - 6 = 0.

Lösung: Aus obiger Formel erhält man $\delta = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) - 6}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \sqrt{5}$.

2. Beispiel: Bestimme den Abstand des Punkten $P_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$ von der Ebene E wie folgt:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Aus den Richtungsvektoren von E erhält man einen Normalenvektor $\mathbf{n}$ wie folgt:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man den Abstand δ wie folgt:

$$\delta = \left| \frac{1}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} \right) \right| = \sqrt{53}.$$

Die Entfernung p des Koordinatenursprungs von E ist

$$p = \left| \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Vektorgeometrie, Seite 112:

Der Abstand eines Punktes von einer Ebene mit Hilfe der Hesseschen Normalform der Ebenengleichung

Mit p und den Richtungscosinussen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ kann man die Gleichung der Ebene E: $ax + by + cz + d = 0$ wie folgt schreiben:

$$E: \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cos\alpha + y \cos\beta + c \cos\gamma = p \quad \text{(Hessesche Normalform)}$$

wobei

$$\cos\alpha = \frac{-a\,d}{|d|\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ \cos\beta = \frac{-b\,d}{|d|\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ \cos\gamma = \frac{-c\,d}{|d|\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ und}$$

$$p = \left| \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

1. Beispiel: Bestimme die Hessesche Normalform der Ebenengleichung E: $9x + 20y - 12z - 75 = 0$ und bestimme den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E.

Lösung: Die Hessesche Normalform der Ebenengleichung lautet

$$E: \frac{9x + 20y - 12z}{\sqrt{9^2 + 20^2 + 12^2}} = \frac{75}{\sqrt{9^2 + 20^2 + 12^2}}$$

und man erhält E: $0{,}36x + 0{,}8y - 0{,}48z = 3$. Der Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene beträgt also 3.

2. Beispiel: Bestimme die Hessesche Normalform der Ebenengleichung
$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und bestimme den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E.

Lösung: Das Vektorprodukt der Richtungsvektoren ergibt einen Normalenvektor wie folgt: $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Man erhält folgendes: E: $x - 2y - 2z + d = 0$. Der Aufhängepunkt liegt in E, d.h. es gilt folgendes: $2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + d = 0$ und man erhält $d = 16$. Daraus erhält man die Hessesche Normalform der Ebenengleichung für E wie folgt:

$$E: \frac{-x + 2y + 2z}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

Man erhält E: $-\frac{x}{3} + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{16}{3}$. Der Abstand des Koordinatenursprungs von E beträgt also 5,333.

α, β, γ sind Winkel, welche das Lot vom Koordinatenursprung auf die Ebene mit der positiven x-, y-, resp. z-Achse einschliesst.

Vektorgeometrie, Seite 116:

24. Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene.
Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Eine Koordinatengleichung einer Ebene E sei gegeben wie folgt:

$$E: n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

Die Geradengleichung des vom Punkt P_o mit Ortsvektor $\mathbf{r_o}$ gefällten Lots h lautet dann

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r_o} + \lambda \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Den Fusspunkt F des Lots erhält man, indem man in obige Geradengleichung einen Streckungsfaktor λ_F wie folgt einsetzt:

$$\lambda_F = \frac{-[\mathbf{n} \cdot \mathbf{r_o} + d]}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{-[n_x x_o + n_y y_o + n_z z_o + d]}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Den an der Ebene E gespiegelten Punkt P^* erhält man indem man in der Geradengleichung des Lots einen Streckungsfaktor λ^* verwendet, der zwei Mal so gross ist wie derjenige des Fusspunkts, d.h.

$$\lambda^* = 2\lambda_F$$

Beispiel: Ein vom Punkt $L\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ ausgehender Strahl wird an einer Ebene E reflektiert und trifft auf den Punkt $P\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme eine Geradengleichung der Geraden g auf welcher der reflektierte Strahl liegt, wenn die Ebene E gegeben ist wie folgt: E: $12x + 15y + 16z - 60 = 0$.

Lösung: Der Streckungsfaktor λ_F des Fusspunkts des Lots vom Punkt P auf die Ebene E ist

$$\lambda_F = \frac{-[12 \cdot 6 + 15 \cdot 4 + 16 \cdot 8 - 60]}{12^2 + 15^2 + 16^2} = -\frac{200}{25} = -0{,}32.$$

Der gespiegelte Punkt P^* befindet sich also bei

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - 0{,}64 \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}68 \\ -5{,}6 \\ -2{,}24 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie, Seite 117:

Der Punkt P^* liegt auf der Geraden g_L auf welcher der beim Punkt L ausgesandte Strahl liegt. Man erhält dafür eine Geradengleichung wie folgt:

$$g_L\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4{,}68 \\ 13{,}6 \\ 4{,}24 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt S auf E in welchem der Strahl reflektiert wird erhält man folgendes:

$g_L \cap E$: $12\,[3 + 4{,}68\,\mu] + 15\,[8 + 13{,}6\,\mu] + 16\,[2 + 4{,}24\,\mu] - 60 = 128 + 268$
$\mu = 0$

Daraus erhält man $\mu = -32/67$. Eingesetzt in die Geradengleichung von g_L erhält man für den Ortsvektor des Durchstosspunkts S folgendes:

$$g_L \cap E\colon \mathbf{r_S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{32}{67} \begin{pmatrix} 4{,}68 \\ 13{,}6 \\ 4{,}24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7648 \\ 1{,}5045 \\ -0{,}0251 \end{pmatrix}$$

Man erhält dann schlussendlich eine Geradengleichung für die gesuchte Gerade g wie folgt:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{r_P} + \eta\,[\mathbf{r_P} - \mathbf{r_S}] = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 5{,}2352 \\ 2{,}4955 \\ 8{,}0251 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie, Seite 120:

25. Neigungswinkel einer Geraden bezüglich einer Ebene

Es sei g' die Normalprojektion einer Geraden g auf eine Ebene E. Unter dem Neigungswinkel φ von g bezüglich E versteht man den spitzen Schnittwinkel von g und g'. Diesen kann man aus dem vom Richtungsvektor $\mathbf{a}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ der Ebene eingeschlossenen Winkel φ' wie folgt berechnen: $\varphi = |90^\circ - \varphi'|$. Mit der folgenden Formel

$$\varphi = \arcsin\left|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{n}|\;|\mathbf{a}|}\right|$$

kann man den Neigungswinkel φ von g bezüglich E direkt berechnen.

Vektorgeometrie, Seite 122:

26. Der Abstand von zwei windschiefen Geraden

Der Abstand von zwei windschiefen Geraden g_1 und g_2 wie folgt:

$$g_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1$$
$$g_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

kann wie folgt berechnet werden:

$$\delta = \left| \frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2} \right|$$

Eine Gerade, die zwei windschiefe Geraden schneidet wird als ***Transversale*** bezeichnet. Die Schnittpunkte der Transversalen mit minimalem Abstand, d.h. mit dem Abstand δ erhält man, wenn man in der Geradengleichung von g_1 und g_2 für λ_1 resp. λ_2 Werte wie folgt einsetzt:

$$\lambda_1 = [a_2^2\,[\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\,[\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]]\,/\,\eta$$
$$\lambda_2 = [(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\,[\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] - a_1^2\,[\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]]\,/\,\eta$$

wobei $\eta = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)^2 - a_1^2\, a_2^2$. Diese Transversale ist zugleich die gemeinsame Normale von g_1 und g_2.

Beispiel: Die Raumdiagonale eines Würfels im ersten Quadranten mit Kantenlänge 2 liegt auf der Geraden g_1. Eine Würfelkante liegt auf der Geraden g_2. Bestimme den Abstand δ zwischen Raumdiagonale und Würfelkante, wenn

$$g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimme auch die Fusspunkte des gemeinsamen Lots auf g_1 und g_2.

Vektorgeometrie, Seite 123:

Lösung: Für die Streckungsfaktoren erhält man folgendes:

$$\lambda_1 = [1 \cdot 4 - 1 \cdot 2]/[1^2 - 3 \cdot 1] = -1$$
$$\lambda_2 = [1 \cdot 4 - 3 \cdot 2]/[1^2 - 3 \cdot 1] = 1$$

Eingesetzt in die Geradengleichungen erhält man für die Fusspunkte F_1 und F_2 folgendes:

$$F_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } F_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

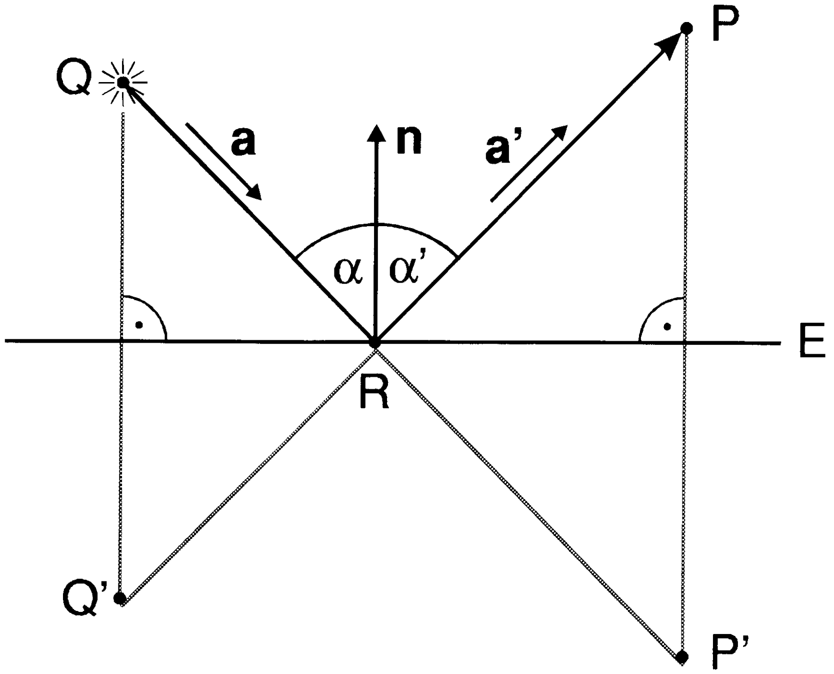
Daraus erhält man sofort $\delta = \overline{F_1 F_2} = \sqrt{2} = 1{,}4142$. Aus obiger Formel für den Abstand δ der Geraden erhält man dasselbe Ergebnis.

$$\delta = \left| \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\2 & 2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} \right| = \frac{2}{\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \sqrt{2} = 1{,}4142.$$

Vektorgeometrie, Seite 125:

27. Reflexion

Bei der Reflexion eines Strahls an einer Ebene gilt das Reflexionsgesetz wie folgt: $\alpha' = \alpha$.



Der einfallende Strahl trifft im Punkt R auf die Ebene an welcher er reflektiert wird. Der Punkt R wird im Folgenden als ***Reflexionspunkt*** bezeichnet. Problemstellungen mit Reflexionen beinhalten meistens Operationen, die zuvor schon behandelt wurden. Insbesondere müssen häufig Punkte an einer Ebene gespiegelt werden.

Eine Ebene sei wie folgt gegeben: E: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + d = 0$ oder $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$. Aus dem Ortsvektor $\mathbf{r_P}$ eines Punktes erhält man den Ortsvektor $\mathbf{r_P}'$ des an E gespiegelten Punktes P' wie folgt:

$$\mathbf{r_P}' = \mathbf{r_P} - 2\,\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r_P} + d}{n^2}\,\mathbf{n}$$

Beispiel: Bestimme den Punkt P' den man erhält, wenn man den Punkt P an der Ebene E spiegelt. Es sei $P\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ und E: $6x - 6y + 7z + 40 = 0$.

Lösung: Aus obiger Formel erhält man $\mathbf{r_P}' = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\,\dfrac{\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} + 40}{6^2 + 6^2 + 7^2} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix}$.

Zwischen dem Richtungsvektor **a** des einfallenden Strahls, dem Normalenvektor **n** zur Ebene und Richtungsvektor **a'** des reflektierten Strahls bestehen folgende Zusammenhänge:

Vektorgeometrie, Seite 126:

1. **Das Reflexionsgesetz** ($\alpha' = \alpha$): $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = -\kappa\, \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}'$, d.h.
$n_x a_x + n_y a_y + n_z a_z = -\kappa\,[n_x a_x' + n_y a_y' + n_z a_z']$
wobei $\kappa = |\mathbf{a}|/|\mathbf{a}'|$. Anmerkung: der von **n** und **a'** eingeschlossene Winkel ist nicht gleich α, sondern $180^\circ - \alpha$.

2. **Komplanarität:** $[\mathbf{n}\,\mathbf{a}\,\mathbf{a}'] = 0$, d.h.

$$\begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x' & a_y' & a_z' \end{vmatrix}$$

Die Vektoren **a**, **n** und **a'** sind linear abhängig.

Den Wert von κ kann man willkürlich wählen.

Beispiel: Ein Lichtstrahl mit Richtungsvektor **a** wird an einer Ebene mit Normalenvektor **n** gespiegelt. Bestimme den Richtungsvektor a' des gespiegelten Strahls, wenn $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$ und $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Lösung: Wir wählen $\kappa = 1$, d.h. $(a_x')^2 + (a_y')^2 + (a_z')^2 = 2^2 + 1^2 + 5^2 = 30$.
Ausserdem gilt $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}' = 3a_x' - 2a_y' + 4a_z' = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = -(6 - 2 + 20) = -24$ und

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ a_x' & a_y' & a_z' \end{vmatrix} = -7\,[2a_x' + a_y' - a_z'] = 0.$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen kann man a_y' und a_z' in a_x' ausdrücken. Man erhält folgendes: $a_y' = -12 - 5{,}5\,a_x'$ und $a_z' = -12 - 3{,}5\,a_x'$. Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies eine quadratische Gleichung in a_x' wie folgt: $29\,(a_x')^2 + 144\,a_x' + 172 = 0$. Dies ergibt zwei Lösungen für a_x' wie folgt: $a_x' = [-72 \pm \sqrt{196}]/29 = [-72 \pm 14]/29$. Daraus erhält man für a_y' und a_z' folgendes: $a_y' = [48 \mp 77]/29$ und $a_z' = [-96 \mp 49]/29$. Eine Lösung entspricht $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$. Die zweite Lösung (mit dem negativen Vorzeichen im Ausdruck für a_x') ist die gesuchte Lösung. Man erhält folgendes:

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{29}\begin{pmatrix}-86\\125\\-47\end{pmatrix}.$$

Vektorgeometrie, Seite 128:

28. Ebenen in gegebenen Abständen von Punkten

Eine entsprechende Grundaufgabe lautet wie folgt:

Bestimme Gleichungen von Ebenen, die drei Kugeln im Raum berühren.

Es seien $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\\z_C\end{pmatrix}$ von welchen die gesuchte Ebene E mit einer Koordinatengleichung wie folgt: E: $ax + by + cz + d = 0$ die Abstände δ_A, δ_B, resp. δ_C haben soll. Aus der Hesseschen Normalform der Ebene erhalten wir dann ein System von vier Gleichungen mit vier Unbekannten wie folgt:

$$\left|\begin{array}{ll} \mathrm{I} & ax_A + by_A + cz_A = \delta_A - d \\ \mathrm{II} & ax_B + by_B + cz_B = \delta_B - d \\ \mathrm{III} & ax_C + by_C + cz_C = \delta_C - d \\ \mathrm{IV} & A^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array}\right|$$

Eine dieser Gleichungen ist quadratisch. Die Vorzeichen von δ_A, δ_B und δ_C sind beliebig. Wenn alle dasselbe Vorzeichen haben liegen die Punkte A, B und C auf der gleichen Seite von E. Man erhält so maximal acht verschiedene Lösungen für E. Zur Lösung des Systems von Gleichungen verwendet man am besten sieben Determinanten wie folgt:

$$S_{xyz} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix},\ S_{xy} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix},\ S_{xz} = \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_B & 1 & z_B \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix},\ S_{yz} = \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix},$$

$$S_{xy\delta} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & \delta_A \\ x_B & y_B & \delta_B \\ x_C & y_C & \delta_C \end{vmatrix},\ S_{x\delta z} = \begin{vmatrix} x_A & \delta_A & z_A \\ x_B & \delta_B & z_B \\ x_C & \delta_C & z_C \end{vmatrix} \text{ und } S_{\delta yz} = \begin{vmatrix} \delta_A & y_A & z_A \\ \delta_B & y_B & z_B \\ \delta_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

Man erhält dann Lösungen für den Parameter d aus einer quadratischen Gleichung wie folgt:

$$[S_{xy}^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2]\, d^2 - 2\,[S_{xy}\, S_{xy\delta} + S_{xz}\, S_{x\delta z} + S_{yz}\, S_{\delta yz}]\, d + S_{xy\delta}^2 + S_{x\delta z}^2 + S_{\delta yz}^2 - S_{xyz}^2 = 0$$

Vektorgeometrie, Seite 129:

Man erhält dann im allgemeinen zwei Lösungen für d als Wurzeln der obigen quadratischen Gleichung. Für jede Lösung für d erhält man die übrigen Koeffizienten in der Koordinatengleichung für E wie folgt:

$$a = (S_{\delta yz} - d\,S_{yz})\,/\,S_{xyz}$$
$$b = (S_{x\delta z} - d\,S_{xz})\,/\,S_{xyz}$$
$$c = (S_{xy\delta} - d\,S_{xy})\,/\,S_{xyz}$$

Obige Formeln können auch für den Fall verwendet werden, dass eine Ebene von einem Punkt und einer Geraden gegebene Abstände haben soll. Man muss dann lediglich zwei geeignete Punkte auf der Geraden herausgreifen.

Beispiel: Bestimme eine Koordinatengleichung einer Ebene, die durch zwei Punkt A und B geht und von einem weiteren Punkt C den Abstand 3 hat. Es sei $A\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}$.

Lösung: Es gilt $\delta_A = \delta_B = 0$ und $\delta_C = 3$. Man erhält folgendes: $S_{xyz} = 78$, $S_{xy} = -4$, $S_{xz} = -11$, $S_{yz} = 22$, $S_{xy\delta} = 18$, $S_{x\delta z} = -9$ und $S_{\delta yz} = 18$. Die quadratische Gleichung für d lautet $69\,d^2 - 94\,d - 595 = 0$. Dies ergibt zwei reelle Lösungen für d wie folgt: $d_1 = 85/23$ und $d_2 = -7/3$. Daraus erhält man $a_1 = (18 - 22\,d_1)/78 = -56/69$, $b_1 = (11\,d_1 - 9)/78 = 28/69$, $c_1 = (18 + 4\,d_1)/78 = 29/69$, $a_2 = (18 - 22\,d_2)/78 = -8/9$, $b_2 = (11\,d_2 - 9)/78 = -4/9$ und $c_2 = (18 + 4\,d_2)/78 = 1/9$. Für E erhält man schlussendlich zwei Lösungen wie folgt: E_1: $56x - 28y - 29z - 255 = 0$ und E_2: $8x - 4y + z - 21 = 0$.