

# Musterprüfung

Themen: A. Gleichungen und Ungleichungen  
 B. Kombinatorik  
 C. Wahrscheinlichkeit

A.1.) Gegeben ist die folgende Gleichung:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

mit der Lösungsmenge  $\mathbb{L}$ . Welche der Elemente in  $\{1; 2; 3; \dots; 8\}$  sind Elemente von  $\mathbb{L}$ ?

A.2.) Für welche Werte des Parameters  $a$  in

$$\frac{x+1}{a} = 2 \quad \text{Formparameters}$$

ist  $x = 7$  ein Element der Lösungsmenge?

A.3.) Bestimme Definitions- und Lösungsmenge von

a)  $x+1 + 6 \cdot (x+1) = 2x-3$

b)  $\frac{x+3}{x-5} = 5$

c)  $x \cdot (x+7) \cdot (x-a) = 0$

d)  $\frac{2x+1}{x} = 2$

e)  $-5x < 8$

f)  $\frac{x}{4} - \frac{x+5}{3} + \frac{x+3}{6} = \frac{1}{2}$

A.4.) Für welche Werte des Formparameters  $a$  in

a)  $ax - 5 = x + 2$

$$b) a(x+2)+1 = 2x+5$$

hat die Gleichung für  $x$  genau eine Lösung?

A.5.) Bestimme aus der Gleichung

$$2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 144$$

a)  $a$ , wenn  $b=4$  und  $c=5$

b)  $b$  (als Funktion von  $a$  und  $c$ )

c)  $c$ , wenn  $a=b=6$

A.6.) Löse

$$\frac{4a+b}{c-2f} = c+2f$$

auf nach

a)  $a$

b)  $b$

c)  $c$

d)  $f$

A.7.) Welchen Term muss man zu  $\frac{3a-2b}{a+b}$  addieren um  $\frac{a+b}{a-b}$  zu erhalten?

A.8.) Für welche Werte von  $x$  kann man

a)  $\sqrt{x-5}$

b)  $\sqrt{5-x}$

c)  $\sqrt{x^2-25}$

d)  $\sqrt{(x-5) \cdot (x+3)}$

ausrechnen? (Bestimme die Definitionsmenge!)

A.9.) Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge von  $\sqrt{25-x^2} = 3$

A.10.) Für welche Werte der Formparameter  $a$  und  $b$  hat

$$\frac{ax+3}{a-b} = x$$

genau eine Lösung?

A.11.) Gegeben ist der Bruchterm  $\frac{x-3}{x+5}$

Für welche Werte von  $x$  ist der

- Zähler des Bruchterms positiv?
- Nenner des Bruchterms positiv?
- Bruchterm negativ?

A.12.) Bestimme die Lösungsmenge von

a)  $\sqrt{x+5} = 4$

b)  $\sqrt{2x+2} = x+1$

c)  $\sqrt{x+3} + 2 = 0$

d)  $\sqrt{x^2+220} = x+10$

B.1.) Fünf Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie viele von bloßem Auge erkennbare unterschiedliche Ergebnisse gibt es, wenn die Würfel

- verschieden gefärbt sind?
- alle gleich aussehen?

B.2.) Eine Münze wird zehn Mal geworfen. Wie viele Möglichkeiten für die

- Sequenz von Kopf und Zahl gibt es?
- gewartene Anzahl Würfe mit Kopf gibt es?

B.3.) Ein Handelsreisender möchte 21 Städte besuchen.

a) Wie viele Entfernungen (auf der Strasse) zwischen den 21 Städten gibt es?

b) Wie viele Möglichkeiten für die Reihenfolge der besuchten Städte gibt es?

c) Ein Computer benötigt für eine gegebene Reihenfolge eine Mikrosekunde (eine Millionstel Sekunde), um aus den Entfernungen zwischen Städten die Gesamtstrecke der Reise zu berechnen. Wie viele Jahre wäre der Computer bei dieser Rechenleistung am Rechnen, wenn alle möglichen Sequenzen durchgerechnet werden müssten, um die kürzeste Gesamtstrecke zu ermitteln?

B.4.) Beim Durchqueren einer Stadt mit einem Auto passiert man sieben Verkehrsampeln. Diese seien entweder auf rot oder auf grün. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Sequenz der Signale?

B.5.) Sebastian verwendet ein Passwort mit 6 Buchstaben des Alphabets (mit 26 Buchstaben). Wie viele solche Passwörter gibt es, wenn

a) die sechs verwendeten Buchstaben beliebig sind?

b) kein Buchstabe im Passwort mehr als ein Mal vorkommt?

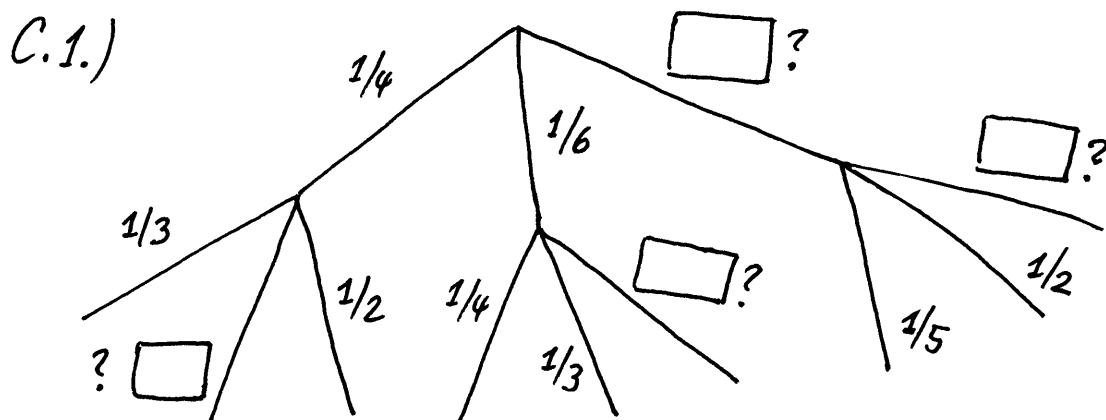
B.6.) Bei einer Pferderennbahn kann man zwei Sorten von Wetten abschliessen wie folgt:

Wette A: Auf einer Liste der zehn Pferde im Rennen die drei erstplatzierten Pferde ankreuzen.

Wette B: Für ein Rennen mit zehn Pferden die drei erstplatzierten in der richtigen Reihenfolge auflisten.

Wie viele Möglichkeiten für die beiden Wetten gibt es?

B.7.) Ein Kunstsammler besucht die Vernissage eines Kunstmalers. Von zehn grossformatigen Bildern möchte der Kunstsammler zwei kaufen und von vierzehn kleinen Bildern möchte er drei kaufen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der fünf Bilder?



Obige Skizze zeigt einen vollständigen (nicht reduzierten) Ereignisbaum. Bestimme die fehlenden, mit Fragezeichen gekennzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

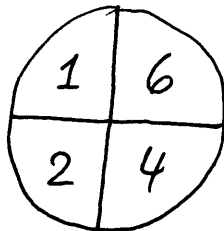
C.2.) Eine Familie hat drei Kinder. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Kinder vom gleichen Geschlecht (männlich oder weiblich) sind? Die Geburt eines Mädchens sei gleich wahrscheinlich wie die Geburt eines Knaben.

C.3.) Ein Würfel wird vier Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein

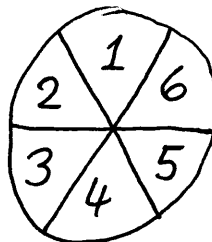
Mal die Augenzahl 6 geworfen wurde?

- C.4.) In einer Schulklasse hat es 17 Schüler.  
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass  
a) mindestens ein Schüler am einem „13.“  
(13. Jan., 13. Feb. u.s.w.) geboren ist?  
b) wenigstens zwei der Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben?  
(Das Jahr habe 365 Tage, d.h. Schaltjahre sollen nicht berücksichtigt werden).

C.5.)



A



B

Die Glücksräder A und B werden gedreht.  
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl von Glücksrad A grösser ist als die Zahl von Glücksrad B?

- C.6.) Ein Würfel und eine Münze werden gleichzeitig geworfen. Die Zufallsvariablen  $x$  und  $y$  werden wie folgt definiert:

$x$  = Augenzahl des Würfels

$y = 1$  wenn mit der Münze „Zahl“ geworfen wird.

$y = 2$  wenn mit der Münze „Kopf“ geworfen wird.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $x \cdot y \geq 6$ ?

- C.7. Für das Wochenende gilt gemäss Wetterprognose folgendes:

- 40% Wahrscheinlichkeit für Niederschlag am Samstag
- 30% Wahrscheinlichkeit für Niederschlag am Sonntag

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt am Wochenende kein Regen?

C.8.) Ferdinand ist ein notorischer Schwarzfahrer. Er schätzt die Wahrscheinlichkeit einer Fahrkartenkontrolle auf lediglich 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Ferdinand nach zehn Mal Schwarzfahren noch kein einziges Mal erwischt?

C.9.) Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe der Augenzahlen grösser als 15?

C.10.) Urne A enthält zwei schwarze und drei weiße Kugeln. Urne B enthält zwei weiße und drei rote Kugeln. Aus Urne A wird eine Kugel gezogen. Die gezogene Kugel wird in Urne B gelegt. Danach wird aus Urne B eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die gezogenen Kugeln gleich gefärbt?

C.11.) Max und Moritz suchen eine Lehrstelle. Beide haben je 14 Bewerbungen geschrieben. Nachdem lauter Absagen eingetroffen sind, resigniert Max und beantragt Stütze. Moritz, der im Matheunterricht ein sauberes Heft geführt hat und stets fleissig war, schätzt die Wahrscheinlichkeit einer Zusage auf eine einzelne Bewerbung auf 5%. Er hat ausgerechnet, dass somit auf 14 Bewerbungen die Wahrscheinlichkeit von wenigstens einer Zusage bei lediglich rund 50% liegt.

Er ermuntert seinen Kumpel Max 31 weitere Bewerbungen zu schreiben, wodurch sich die Wahrscheinlichkeit von mindestens einer Zusage auf rund 90% erhöhen soll. Hat Moritz im Matheunterricht genügend aufgepasst oder hat er sich alles falsch überlegt? Begründe!

## Musterlösungen

A.1.)

$x$	$x^2 - 7x + 10$	
1	$1 - 7 + 10 = 4 \neq 0$	
2	$4 - 14 + 10 = 0$	←
3	$9 - 21 + 10 = -2 \neq 0$	
4	$16 - 28 + 10 = -2 \neq 0$	
5	$25 - 35 + 10 = 0$	←
6	$36 - 42 + 10 = 4 \neq 0$	
7	$49 - 49 + 10 = 10 \neq 0$	
8	$64 - 56 + 10 = 18 \neq 0$	

$$\underline{\underline{\{2; 5\} \in \mathbb{L}}}$$

A.2.)  $x = 7 \rightarrow \frac{7+1}{a} = \frac{2 \cdot a}{a} \rightarrow 8 = 2a \rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$

A.3a)  $x+1+6 \cdot (x+1) = 2x-3 \rightarrow x+1+6x+6 = 7x+7 = 2x-3 \xrightarrow[-2x]{+3} 5x+10=0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{-2\}}, \underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{Q}}}}$

b)  $\frac{x+3}{x-5} = \frac{5(x-5)}{x-5} \rightarrow x+3 = 5x-25 \xrightarrow[-25]{-x} 28 = 4x \xrightarrow{:4} x = 7 \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{7\}}, \underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{Q}}}}$

c)  $x \cdot (x+7) \cdot (x-a) = 0$  „Nullgleichung“!!!

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{+a} x-a=0 \rightarrow x_1 = a \\ & \xrightarrow{-7} x+7=0 \rightarrow x_2 = -7 \\ & \xrightarrow{} x=0 \rightarrow x_3 = 0 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{\mathbb{D} = \mathbb{Q}}}$



$$d) \underline{\underline{D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}}} \quad \frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x} \rightarrow 2x+1 = 2x \xrightarrow{-2x} \\ 1=0 \text{ Widerspruch!} \rightarrow \underline{\underline{L = \{\}}}$$

$$e) -5x < 8 \xrightarrow{:(-5)} x > 8/(-5) = -8/5 = -1.6 \\ \uparrow!!! \\ x > -1.6 \rightarrow \underline{\underline{L = \{-1; 0; 1; 2; 3; \dots\}}}$$

$$\underline{\underline{D = \mathbb{Q}}}$$

$$f) \underline{\underline{D = \mathbb{Q}}}, \text{ HN} = 12 \rightarrow \frac{3x}{3 \cdot 4} - \frac{4(x+5)}{4 \cdot 3} + \frac{2(x+3)}{2 \cdot 6} = \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 2} \\ 3x - (4x+20) + 2x+6 = 6 \rightarrow 5x - 4x - 20 = 0 \\ \rightarrow x - 20 = 0 \rightarrow x = 20 \rightarrow \underline{\underline{L = \{20\}}}$$

$$A.4a) ax - 5 = x + 2 \xrightarrow[-x]{+5} ax - x = 7 \rightarrow \\ x(a-1) = 7 \rightarrow \text{falls } \underline{\underline{a \neq 1}}$$

$$b) ax + 2a + 1 = 2x + 5 \xrightarrow{-2x} ax - 2x + 2a = 4 \\ \xrightarrow{-2a} (a-2) \cdot x = 4 - 2a \xrightarrow{-1} \text{falls } \underline{\underline{a \neq 2}}$$

$$A.5a) 2 \cdot (4a + 5a + 4 \cdot 5) = 144 \xrightarrow{:2} 9a + 20 = 72 \\ \xrightarrow{-20} 9a = 52 \rightarrow \underline{\underline{a = 52/9}}$$

$$b) 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 144 \xrightarrow{:2} (a+c) \cdot b + a \cdot c \\ = 72 \rightarrow (a+c) \cdot b = 72 - a \cdot c \rightarrow \\ b = \underline{\underline{\frac{72 - a \cdot c}{a+c}}}$$

$$c) 2(a \cdot b + (a+b) \cdot c) = 144 \xrightarrow{:2} 6 \cdot 6 + (6+6) \cdot c \\ = 72 \xrightarrow{-36} 12c = 36 \xrightarrow{:12} \underline{\underline{c = 3}}$$

$$A.6a) \frac{4a+b}{c-2f} = \frac{(c+2f) \cdot (c-2f)}{c-2f} \rightarrow 4a+b = c^2 - 4f^2 \\ \rightarrow 4a = c^2 - 4f^2 - b \rightarrow a = \underline{\underline{\frac{c^2}{4} - f^2 - \frac{b}{4}}}$$

$$b) \frac{4a+b}{c-2f} = \frac{(c+2f)(c-2f)}{c-2f} \rightarrow 4a+b = c^2 - 4f^2 \rightarrow$$

$$\underline{\underline{b = c^2 - 4a - 4f^2}}$$

$$c) \frac{4a+b}{c-2f} = \frac{(c+2f)(c-2f)}{c-2f} \rightarrow 4a+b = c^2 - 4f^2 \rightarrow$$

$$c^2 = 4a + b + 4f^2 \rightarrow c = \frac{+ \sqrt{4a + b + 4f^2}}{1}$$

↑ !!!

$$d) \frac{4a+b}{c-2f} = \frac{(c+2f)(c-2f)}{c-2f} \rightarrow 4a+b = c^2 - 4f^2 \rightarrow$$

$$4f^2 = c^2 - 4a - b \rightarrow f = \frac{+ \frac{1}{2} \sqrt{c^2 - 4a - b}}{1}$$

↑ !!!

$$A.7.) \frac{3a-2b}{a+b} + x = \frac{a+b}{a-b}, \quad \text{HN} = (a+b) \cdot (a-b)$$

$$= a^2 - b^2$$

$$\frac{(a-b)(3a-2b)}{\text{HN}} + \frac{x(a^2-b^2)}{\text{HN}} = \frac{(a+b)(a+b)}{\text{HN}}$$

$$\rightarrow x = \frac{(a+b)^2 - (a-b)(3a-2b)}{\text{HN}}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - [3a^2 - 2ab - 3ab + 2b^2]}{\text{HN}}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 3a^2 + 5ab - 2b^2}{\text{HN}}$$

$$x = \frac{-2a^2 + 7ab - b^2}{a^2 - b^2}$$

$$A.8a) x - 5 \geq 0 \rightarrow \underline{\underline{x \geq 5}}$$

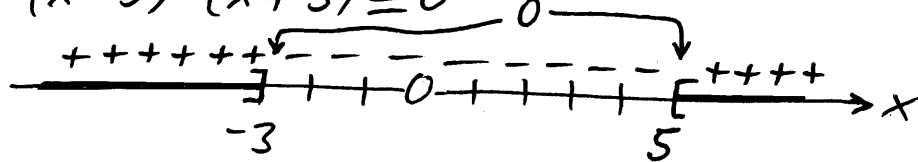
$$b) 5 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -5 \xrightarrow{\cdot (-1)} \underline{\underline{x \leq 5}}$$

↓ !!!

$$c) x^2 - 25 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 25. \text{ Das ist der Fall, wenn}$$

$$\underline{\underline{x \leq -5 \text{ oder } x \geq 5}}$$

d)  $(x-5) \cdot (x+3) \geq 0$ . Bei  $x=5$  und bei  $x=-3$  gilt  $(x-5) \cdot (x+3) = 0$



Es muss  $x \geq 5$  oder  $x \leq -3$

A.9.)  $25 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 25 \rightarrow$

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{Q} \mid -5 \leq x \leq 5\}$

$\sqrt{25 - x^2} = 3 \xrightarrow{\text{quad.}} 25 - x^2 = 9 \xrightarrow{\frac{+x^2}{-9}}$

$x^2 = 16 \xrightarrow{\sqrt{\dots}} x = \pm 4$

Probe!!!:  $\sqrt{25 - (\pm 4)^2} = \sqrt{9} = 3 \checkmark$

$\rightarrow \mathbb{L} = \{-4; 4\}$

A.10.)  $\frac{ax+3}{a-b} = \frac{(a-b)x}{a-b} \rightarrow ax+3 = ax-bx$   
 $\uparrow a \neq b$

$\rightarrow 3 = -bx \rightarrow b \neq 0$  (für  $b=0 \rightarrow 3=0$ !!!)

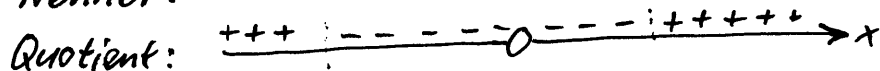
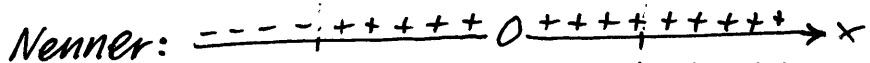
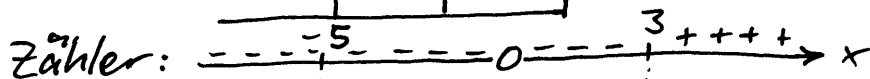
Fazit: Es muss  $a \neq b$  und  $b \neq 0$

A.11a)  $x-3 > 0 \rightarrow \underline{\underline{x > 3}}$

b)  $x+5 > 0 \rightarrow \underline{\underline{x > -5}}$

c) Bestimmung mittels Vorzeichenregel für Division

Nenner	Zähler	
	+	-
+	+	-
-	-	+



Somit gilt  $\frac{x-3}{x+5} < 0$  falls  $-5 < x < 3$

A.12a)  $\sqrt{x+5} = 4 \xrightarrow{\text{quad.}} x+5 = 16 \xrightarrow{-5} x = 11$

Probe!!!:  $\sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4 \checkmark$

$\mathbb{L} = \{11\}$

b)  $\sqrt{2x+2} = x+1 \xrightarrow{\text{quad.}} 2x+2 = (x+1)^2 =$   
 $x^2 + 2x + 1 \xrightarrow[-1]{-2x} 1 = x^2 \xrightarrow{x} x = \pm 1$

Probe:  $x_1 = -1: \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = -1+1 \checkmark$

$x_2 = 1: \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 = 1+1 \checkmark$

$\mathbb{L} = \{-1; 1\}$

c)  $\sqrt{x+3} + 2 = 0 \xrightarrow{-2} \sqrt{x+3} = -2 \xrightarrow{\text{quad.}}$   
 $x+3 = 4 \xrightarrow{-3} x = 1$

Probe:  $\sqrt{1+3} + 2 = \sqrt{4} + 2 = 2+2 = 4 \neq 0$

$\rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

d)  $\sqrt{x^2+220} = x+10 \xrightarrow{\text{quad.}} x^2+220 = (x+10)^2 =$   
 $x^2 + 20x + 100 \xrightarrow[-100]{-x^2} 120 = 20x \xrightarrow{:20} x = 6$

Probe!!!:  $\sqrt{36+220} = \sqrt{256} = 16 = 6+10 \checkmark$

$\mathbb{L} = \{6\}$

B.1a)  $6^5 = \underline{\underline{7776}}$

b)  $\frac{(6+5-1)!}{5! \cdot 5!} = \underline{\underline{252}}$

B.2a)  $2^{10} = \underline{\underline{1024}}$

b) 11

B.3a)  $20 \cdot 21 / 2 = \underline{\underline{210}}$  | c)  $(21! / 1'000'000) / 3600 /$   
 b)  $21! = \underline{\underline{5.1091 \cdot 10^{19}}}$  |  $24 / 365.25 \Rightarrow \underline{\underline{1.62 \text{ Mio. Jahre}}}$

$$B.4.) \quad 2^7 = \underline{\underline{128}}$$

$$B.5a) \quad 26^6 = \underline{\underline{309 \text{ Mio.}}}$$

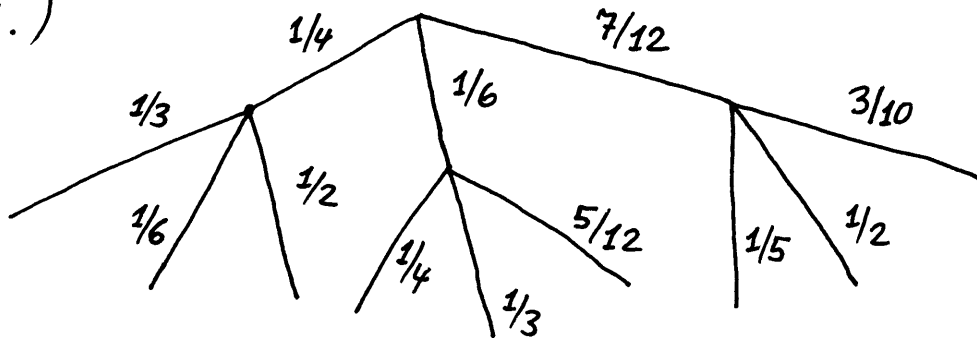
$$b) \quad 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = \underline{\underline{166 \text{ Mio.}}}$$

$$B.6.) \quad \text{Wette A: } \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \underline{\underline{120}}$$

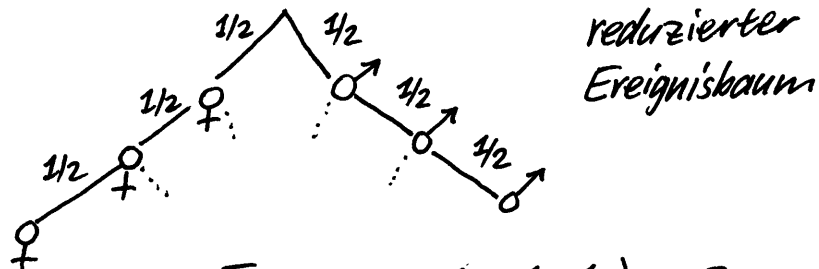
$$\text{Wette B: } 10 \cdot 9 \cdot 8 = \underline{\underline{720}}$$

$$B.7) \quad \binom{10}{2} \cdot \binom{14}{3} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{14!}{3! \cdot 11!} = \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{16'380}}$$

C.1.)



C.2.)



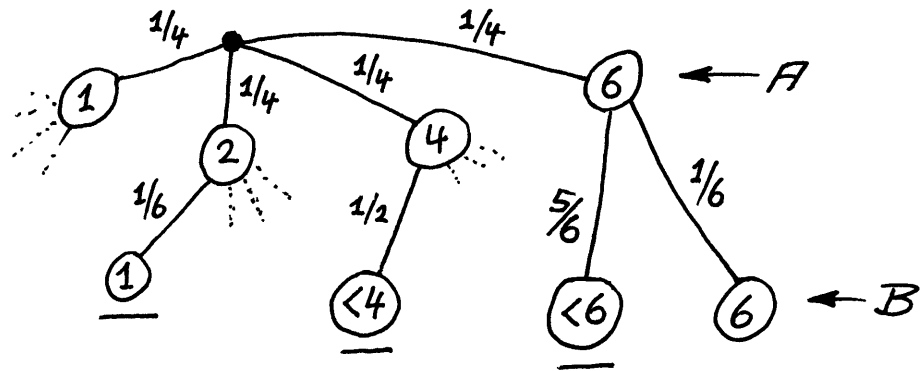
$$P = 1 - \bar{P} = 1 - 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$C.3.) \quad P = 1 - \bar{P} = 1 - \left( \frac{5}{6} \right)^4 = \underline{\underline{0.518}}$$

$$C.4a) \quad P = 1 - \bar{P} = 1 - \left( \frac{353}{365} \right)^{17} = \underline{\underline{0.434}}$$

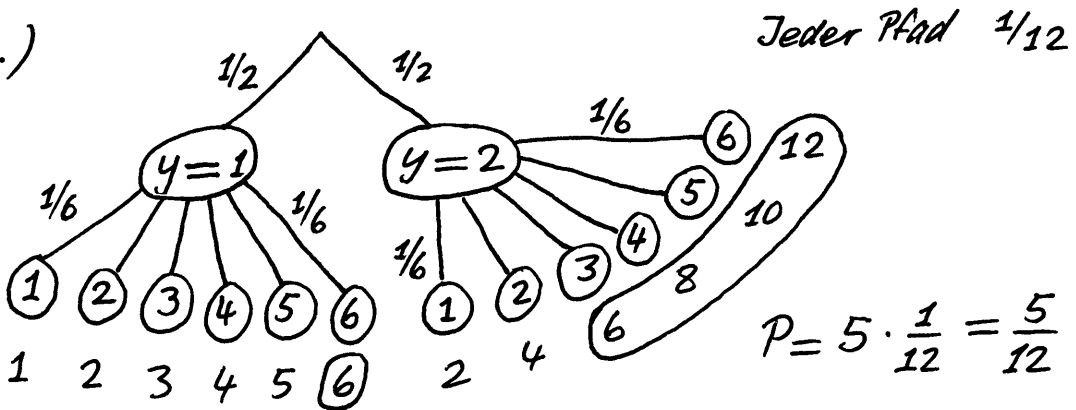
$$b) \quad P = 1 - \bar{P} = 1 - \left( \frac{365}{365} \right) \cdot \left( \frac{364}{365} \right) \cdot \left( \frac{363}{365} \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{349}{365} \right) = \underline{\underline{0.315}}$$

C.5.) Reduzierter Ereignisbaum:



$$P = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \right] = \frac{3}{8}$$

C.6.)



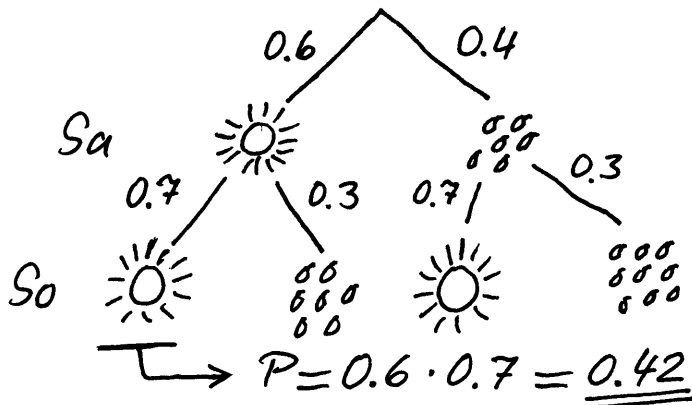
Mit Tabelle:

	x					
	1	2	3	4	5	6
y=1	1	2	3	4	5	6
y=15	2	4	6	8	10	12

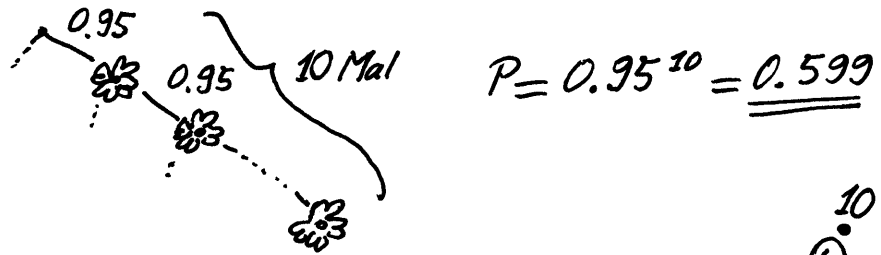
Jedes Feld hat Wahrscheinlichkeit  $1/12 \rightarrow$

$$P = \frac{5}{12}$$

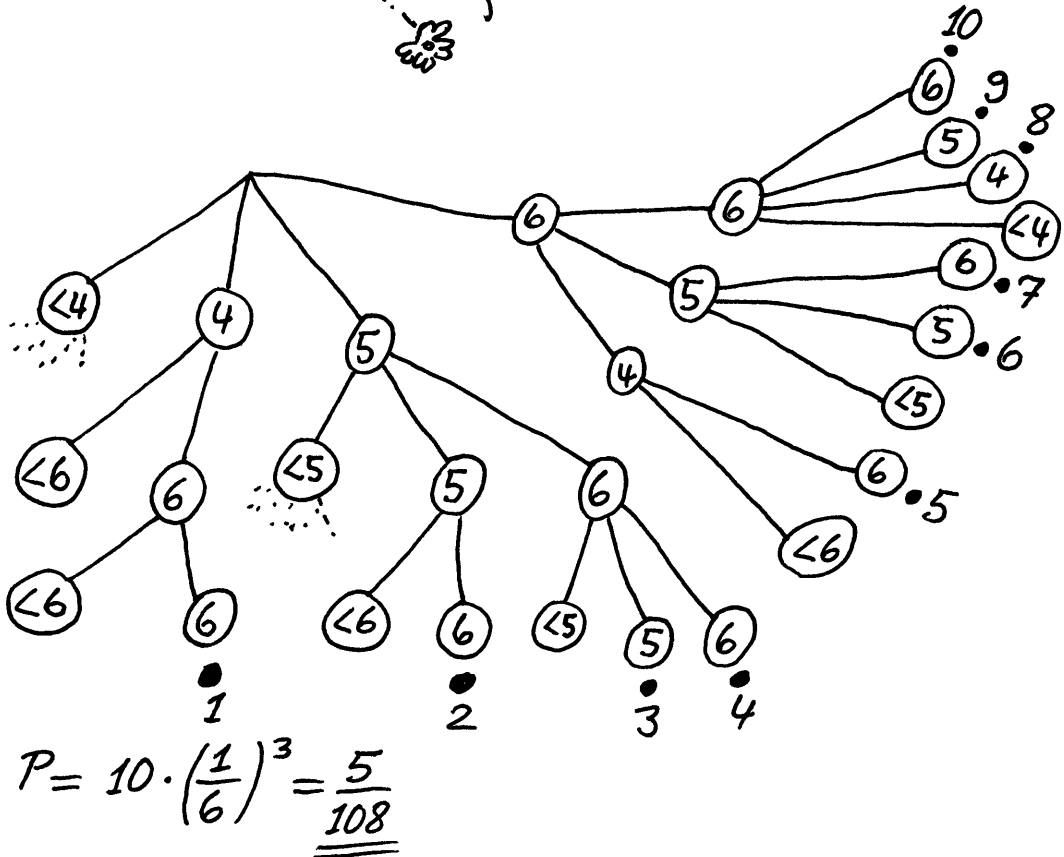
C.7.)



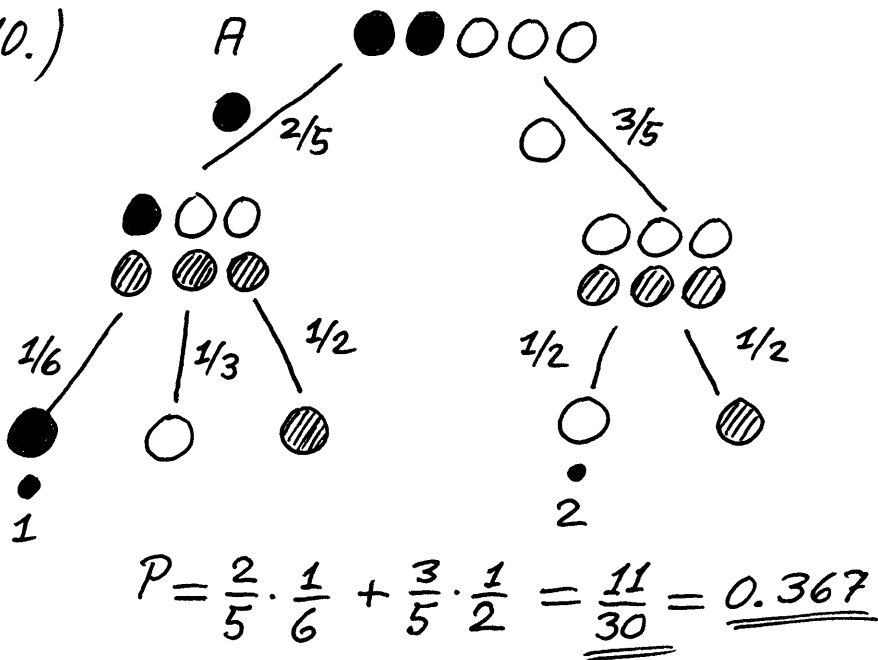
C.8.) Reduzierter Ereignisbaum



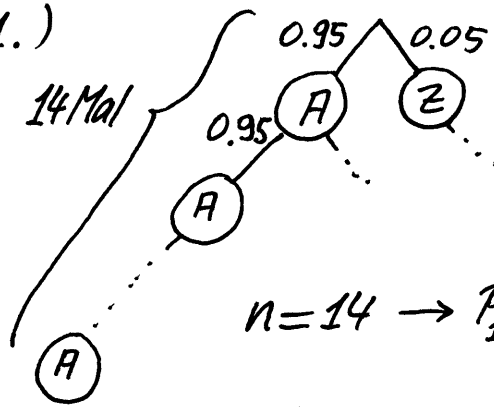
C.9.)



C.10.)



C.11.)



$$n=14 \rightarrow P_{14}(\text{keine Zusage}) = 0.95^{14} \\ = 0.49 \rightarrow \approx 50\%$$

Die Aussage betreffend 14 Bewerbungen ist korrekt.

$$14 + 31 = 45 \rightarrow P_{45}(\text{keine Zusage}) = 0.95^{45} \\ = 0.099 \approx 0.1$$

$$P_{45}(\text{Zusage}) = 1 - P_{45}(\text{keine Zusage}) = 1 - 0.099$$

$$P_{45}(\text{Zusage}) = 0.901 \rightarrow \approx 90\%$$

Auch die zweite Aussage von Moritz ist zutreffend.