5. Der ggT und das kgV

5.1. Primzahlen

Primzahlen sind wie folgt definiert:

> Primzahlen sind natürliche Zahlen grösser als 1, die durch keine andere Zahl als durch 1 oder durch sich selbst teilbar sind.

Primzahlen sind

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …….

Es gibt unendlich viele Primzahlen. Um zu entscheiden, ob eine Zahl eine Primzahl ist, untersucht man, ob die Zahl durch eine kleinere Zahl teilbar ist. Hierfür eignen sich speziell die kleinen Primzahlen zusammen mit folgenden Regeln für die Teilbarkeit:

Teilbarkeit durch 2: Eine Zahl ist teilbar durch 2, wenn ihre letzte Ziffer durch zwei teilbar ist. Dazu gehören auch die Zahlen mit der Endziffer 0.

Teilbarkeit durch 3: Eine Zahl ist teilbar durch 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. So ist z.B. die Quersumme der Zahl 12'345 gleich $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Weil die Quersumme, d.h. die Zahl 15 durch drei teilbar ist, ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.

Teilbarkeit durch 4: Eine Zahl ist durch 4 teilbar, falls die Zahl bestehend aus den letzten zwei Ziffern durch 4 teilbar ist.
Beispiel: Die Zahl 23’942 ist nicht durch 4 teilbar, weil 42 nicht durch 4 teilbar ist. Die Zahl 15'936 hingegen ist durch 4 teilbar, weil 36 durch 4 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 5: Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer entweder gleich 0 oder gleich 5 ist.

Teilbarkeit durch 6: Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie gerade und ihre Quersumme durch drei teilbar ist.

Teilbarkeit durch 8: Eine Zahl ist teilbar durch 8, falls die Zahl bestehend aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.
Beispiel: Die Zahl 7’425'310 ist nicht durch 8 teilbar, weil 310 nicht durch 8 teilbar ist. Die Zahl 3'425'368 hingegen ist durch 8 teilbar, weil 368 durch 8 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 9: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Die Zahl 12’345'678 mit der Quersumme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ ist durch 9 teilbar, denn 36 ist durch 9 teilbar.

Teilbarkeit durch 11: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Quersumme mit „alternierenden Vorzeichen“ durch 11 teilbar ist.
Beispiel: Die Quersumme mit alternierenden Vorzeichen der Zahl 120'527 beträgt $1 – 2 + 0 – 5 + 2 – 7 = –11$. Die Zahl ist daher durch 11 teilbar.

Unter den **Vielfachen** einer Zahl versteht man eine Zahlenmenge bestehend aus den Vielfachen einer Zahl. Z.B. die Vielfachen von 3 sind 3, 6, 9, 12, 15, …… d.h. die Zahlen in der „Dreierreihe“.
Man kann zeigen, dass jede natürliche Zahl grösser als 2 entweder eine Primzahl ist oder als Produkt von Primzahlen darstellbar ist. Die Zerlegung in ein Produkt aus Primzahlen wird als **Primfaktorzerlegung** bezeichnet. Bei einer Primfaktorzerlegung überprüft man die Teilbarkeit durch zunehmend grössere Primzahlen.

1. Beispiel:

16’170	: 2
= 8085	: 3
= 2695	: 5
= 539	: 7
= 77	: 7
= 11	: 11
= **1**	

Die Primfaktorzerlegung der Zahl 16'170 lautet also $16'170 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$. Bei Primfaktorzerlegung von Termen mit Faktoren, die als Buchstaben dargestellt werden, erscheinen diese Faktoren unverändert.

2. Beispiel:

1050 a^2bc	: a
= 1050 abc	: a
= 1050 bc	: b
= 1050 c	: c
= 1050	: 2
= 525	: 3
= 175	: 5
= 35	: 5
= 7	: 7
= **1**	

Die Primfaktorzerlegung der Zahl $1050\,a^2bc$ lautet also $1050\,a^2bc = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c$.

Aufgabe M-PRIM-1: Für $2 \le n \le 13$ bestimme, ob es sich bei $2^n - 1$ um eine Primzahl handelt.
Aufgabe M-PRIM-2: Wie viele geradzahlige Primzahlen gibt es?
Aufgabe M-PRIM-3: Welche Zahlen mit ausschliesslich der Ziffer 3, d.h. 3, 33, 333, 3333, 33'333, 333'333 u.s.w. sind durch 11 teilbar?
Aufgabe M-PRIM-4: Erstelle eine List mit den Zahlen $60 \le x \le 90$. Aus dieser Liste streiche alle geraden Zahlen, sowie ganzzahlige Vielfache von 3, 5, 7, 11 und 13. Überprüfe bei verbleibenden Zahlen, ob es sich um Primzahlen handelt.
Aufgabe M-PRIM-5: Ist die Zahl 112’233’445’566’777’889’900 teilbar durch 8?
Aufgabe M-PRIM-6: Ist die Zahl 1’122’334'455'667'778’899 teilbar durch 9?
Aufgabe M-PRIM-7: Wie gross müsste, die mit „x“ gekennzeichnete Endziffer der Zahl 120'524'739’81x sein, damit die Zahl durch a) 3 teilbar wird? b) 9 teilbar wird?
Aufgabe M-PRIM-8: Wie gross müsste, die mit „x“ gekennzeichnete Endziffer der Zahl 120'524'739’84x sein, damit die Zahl durch 11 teilbar wird?

Aufgabe M-PRIM-9: Bestimme für die Terme 1195, 3822, 396'396 und 23'100 x^2z eine Primfaktorzerlegung.

Musterlösungen:

Aufgabe M-PRIM-1: n = 2: $2^2 - 1 = 3$, n = 3: $2^3 - 1 = 7$, n = 4: $2^4 - 1 = 15$, n = 5: $2^5 - 1 = 31$, n = 6: $2^6 - 1 = 63$, n = 7: $2^7 - 1 = 127$, n = 8: $2^8 - 1 = 255$, n = 9: $2^9 - 1 = 511$, n = 10: $2^{10} - 1 = 1023$, n = 11: $2^{11} - 1 = 2047$, n = 12: $2^{12} - 1 = 4095$, n = 13: $2^{13} - 1 = 8191$. Von diesen zwölf Zahlen sind fünf Primzahlen und zwar für n = 2, 3, 5, 7 und 13.
Aufgabe M-PRIM-2: Eine.
Aufgabe M-PRIM-3: Zahlen mit einer geradzahligen Anzahl Ziffern, d.h. 33, 3333, 333'333 u.s.w.
Aufgabe M-PRIM-4: Es bleiben die sieben Zahlen 61, 67, 71, 73, 79, 83 und 89. Jede von diesen ist prim.
Aufgabe M-PRIM-5: Nein.
Aufgabe M-PRIM-6: Die Quersumme ist 97. Die Zahl ist nicht teilbar durch 9!
Aufgabe M-PRIM-7: a) $x \in \{0, 3, 6, 9\}$. (b) x = 3.
Aufgabe M-PRIM-8: x = 1.
Aufgabe M-PRIM-9: $1195 = 5 \cdot 239$, $3822 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13$, $396'396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13$ und $23'100\,x^2z = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot x \cdot x \cdot z$.

5.2. Die Teilermenge

Jede natürliche Zahl hat eine Teilermenge. Diese enthält alle natürlichen Zahlen, inklusive 1 und die Zahl selbst, durch die sich die Zahl ohne Rest teilen lässt. Bei der Bestimmung der Teilermenge einer Zahl beginnt man mit 1 und der Zahl selbst und nähert sich von beiden Enden her der „Mitte“. Die „Mitte“ entspricht ungefähr der Quadratwurzel der Zahl.

Beispiel: Bestimme die Teilermenge von 1050

Man stellt sofort fest, dass die Zahl durch 2 teilbar ist und erhält

$$\{1, 2, \qquad\qquad , 525, 1050\}$$

Die Quersumme der Zahl ist gleich 6. Die Quersumme, und somit die Zahl selbst, ist teilbar durch 3. Als nächstes erhält man

$$\{1, 2, 3, \qquad\qquad , 350, 525, 1050\}$$

Weitere Schritte sind wie folgt:

$$\{1, 2, 3, 5, \qquad\qquad , 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, \qquad\qquad , 175, 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, \qquad\qquad , 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, \qquad\qquad , 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, \qquad\qquad , 75, 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, \qquad\qquad , 70, 75, 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, \qquad\qquad , 50, 70, 75, 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$$
$$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 25, \qquad\qquad , 42, 50, 70, 75, 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$$

$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 25, 30, 35, 42, 50, 70, 75, 105, 150, 175, 210, 350, 525, 1050\}$

Die Teilermenge von 1050 enthält also 24 Elemente. Um die vollständige Teilermenge von 1050 zu bestimmen, musste man die Teilbarkeit von 1050 durch die natürlichen Zahlen 2 bis 30 überprüfen. Die obere Grenze entspricht ungefähr der Wurzel von 1050, denn es gilt $\sqrt{1050} = 32.40370..... \approx 30$.

Im Folgenden sollen Teiler von Termen, wie z.B. $6b^2 \cdot c$, auch solche Terme sein, durch welche sich der ursprüngliche Term ohne Rest teilen lässt, unabhängig vom Wert von b und c. Gemäss dieser Vereinbarung hat obiger Term Teiler wie folgt:

$$1,\ b,\ c,\ b^2,\ b\cdot c,\ b^2\cdot c,$$
$$2,\ 2b,\ 2c,\ 2b^2,\ 2b\cdot c,\ 2b^2\cdot c,$$
$$3,\ 3b,\ 3c,\ 3b^2,\ 3b\cdot c,\ 3b^2\cdot c,$$
$$6,\ 6b,\ 6c,\ 6b^2,\ 6b\cdot c \text{ und } 6b^2\cdot c$$

Aufgabe M-TM-1: Bestimme die Teilermengen der Zahlen

a)	1	e)	30
b)	3	f)	98
c)	5	g)	144
d)	15	h)	180

Aufgabe M-TM-2: Bestimme die Teilermengen der Terme

a)	a	e)	$a^2\cdot b$
b)	$a\cdot b$	f)	$a^2\cdot b^2$
c)	a^2	g)	$a\cdot b^2\cdot c$
d)	a^3	h)	$a^2\cdot b^2\cdot c$

Aufgabe M-TM-3: Bestimme die Teilermengen der Terme

a)	$2a$	e)	$4a^2\cdot b$
b)	$3a\cdot b$	f)	$6a\cdot b$
c)	$5a^2$	g)	$3a\cdot b\cdot c$
d)	$9a^3$	h)	$3a\cdot b^2\cdot c$

Aufgabe M-TM-4: Welche Elemente haben die Teilermengen von

a)	3 und 5	g)	1 und a
b)	5 und 15	h)	a und a^2
c)	12 und 18	i)	a und $a\cdot b$
d)	225 und 315	j)	$a\cdot b$ und $a^2\cdot b$
e)	108 und 144	k)	$6a$ und $3a^2$
f)	75, 125 und 500	l)	$18a\cdot b$, $24a^2\cdot b$ und $30a\cdot b^2$

gemeinsam? (Gemeinsame Teiler!)

Aufgabe M-TM-5: Welche kleinste natürliche Zahl hat genau drei Teiler?

Aufgabe M-TM-6: Welches ist der grösste gemeinsame Teiler von 135, 150 und 180?

Aufgabe M-TM-7: Die beiden Schüler A und B definieren Primzahlen wie folgt:
Schüler A: Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.
Schüler B: Primzahlen sind natürliche Zahlen deren Teilermenge genau zwei Elemente enthält.
Kommentiere und vergleiche die beiden „Definitionen“.

Musterlösungen:

Aufgabe M-TM-1: a) $\{1\}$. (b) $\{1, 3\}$. (c) $\{1, 5\}$. (d) $\{1, 3, 5, 15\}$. (e) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. (f) $\{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$. (g) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144\}$. (h) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$.
Aufgabe M-TM-2: a) $\{1, a\}$. (b) $\{1, a, b, a\cdot b\}$. (c) $\{1, a, a^2\}$. (d) $\{1, a, a^2, a^3\}$. (e) $\{1, a, b, a^2, a\cdot b, a^2\cdot b\}$. (f) $\{1, a, b, a^2, b^2, a\cdot b, a^2\cdot b, a\cdot b^2, a^2\cdot b^2\}$. (g) $\{1, a, b, c, b^2, a\cdot b, a\cdot c, b\cdot c, a\cdot b\cdot c, a\cdot b^2, b^2\cdot c, a\cdot b^2\cdot c\}$. (h) $\{1, a, b, c, a^2, b^2, a\cdot b, a\cdot c, b\cdot c, a\cdot b\cdot c, a\cdot b^2, b^2\cdot c, a^2\cdot b, a^2\cdot c, a^2\cdot b^2, a^2\cdot b\cdot c, a\cdot b^2\cdot c, a^2\cdot b^2\cdot c\}$.
Aufgabe M-TM-3: a) $\{1, 2, a, 2a\}$. (b) $\{1, 3, a, b, 3a, 3b, a\cdot b, 3a\cdot b\}$. (c) $\{1, 5, a, a^2, 5a, 5a^2\}$. (d) $\{1, a, a^2, a^3, 3, 3a, 3a^2, 3a^3, 9, 9a, 9a^2, 9a^3\}$. (e) $\{1, a, b, a^2, a\cdot b, a^2\cdot b, 2, 2a, 2b, 2a^2, 2a\cdot b, 2a^2\cdot b, 4, 4a, 4b, 4a^2, 4a\cdot b, 4a^2\cdot b\}$. (f) $\{1, a, b, a\cdot b, 2, 2a, 2b, 2a\cdot b, 3, 3a, 3b, 3a\cdot b, 6, 6a, 6b, 6a\cdot b\}$. (g) $\{1, a, b, c, a\cdot b, a\cdot c, b\cdot c, a\cdot b\cdot c, 3, 3a, 3b, 3c, 3a\cdot b, 3a\cdot c, 3b\cdot c, 3a\cdot b\cdot c\}$. (h) $\{1, a, b, c, b^2, a\cdot b, a\cdot c, b\cdot c, a\cdot b\cdot c, a\cdot b^2, b^2\cdot c, a\cdot b^2\cdot c, 3, 3a, 3b, 3c, 3b^2, 3a\cdot b, 3a\cdot c, 3b\cdot c, 3a\cdot b\cdot c, 3a\cdot b^2, 3b^2\cdot c, 3a\cdot b^2\cdot c\}$.
Aufgabe M-TM-4: a) $\{1\}$. (b) $\{1, 5\}$. (c) $\{1, 2, 3, 6\}$. (d) $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$. (e) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. (f) $\{1, 5, 25\}$. (g) $\{1\}$. (h) $\{1, a\}$. (i) $\{1, a\}$. (j) $\{1, a, b, a\cdot b\}$. (k) $\{1, 3, a, 3a\}$. (l) $\{1, a, b, a\cdot b, 2, 2a, 2b, 2a\cdot b, 3, 3a, 3b, 3a\cdot b, 6, 6a, 6b, 6a\cdot b\}$.
Aufgabe M-TM-5: 4
Aufgabe M-TM-6: 15
Aufgabe M-TM-7: Die Definition von Schüler B ist korrekt. Die Definition des Schülers A ist unvollständig. Er müsste beifügen, dass 1 keine Primzahl ist.

5.3. Der ggT und das kgV

Bei ggT und kgV handelt es sich um Abkürzungen wie folgt:

ggT — Der **g**rösste **g**emeinsame **T**eiler von zwei oder mehr Termen. Der ggT von n natürlichen Zahlen ist die grösste Zahl, durch welche alle n Zahlen teilbar sind.

kgV — Das **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache von zwei oder mehr Termen. Das kleinste gemeinsame Vielfache von n natürlichen Zahlen ist die kleinste Zahl die zugleich ein ganzzahliges Vielfaches aller n Zahlen ist.

Sowohl den ggT als auch das kgV erhält man am besten mit einer vollständigen Faktorisierung. Im Falle von natürlichen Zahlen wäre dies eine Primfaktorzerlegung. Das kgV spielt eine Rolle beim Gleichnamigmachen von Bruchtermen.

Vergleicht man die Primfaktorzerlegungen von n Zahlen, so sucht man im Falle vom ggT nach Faktoren, die in allen Primfaktorzerlegungen vorkommen.

1. Beispiel: ggT(180, 270, 450) = ?

Wir erstellen eine Primfaktorzerlegung der drei Zahlen.

$$180 = \mathbf{2}\cdot 2\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{5}$$
$$270 = \mathbf{2}\cdot 3\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{5}$$
$$450 = \mathbf{2}\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{3}\cdot \mathbf{5}\cdot \mathbf{5}$$

In den Listen kommt ein Faktor 2, ein Faktor 5 und zwei Faktoren 3 überall vor. Der ggT ist das Produkt der Faktoren, die in jeder Primfaktorzerlegung vorkommen. Man erhält also

$$\text{ggT}(180, 270, 450) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$$

Das kgV erhält man, wenn man alle in den Primfaktorzerlegungen vorkommenden Faktoren in der höchsten Anzahl verwendet, in welcher sie vorkommen. Im Gegensatz dazu erhält man den ggT, wenn man alle in der Primfaktorzerlegung vorkommenden Faktoren in der kleinsten Anzahl verwendet, in welcher sie vorkommen. Im obigen Beispiel kommen die Primfaktoren 2, 3 und 5 vor.

Primfaktor	Höchste Potenz
2	2^2
3	3^3
5	5^2

Somit gilt

$$\text{kgV}(180, 270, 450) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$$

2. Beispiel: Die Nenner von drei Bruchtermen lauten wie folgt: $30a \cdot b^2$, $42\,a^2 \cdot b \cdot c$ und $18\,a^2 \cdot b^2$. Bestimme den „optimalen“ gemeinsamen Nenner.

Wir faktorisieren jeden Nenner vollständig

$$30\,a\,b^2 c = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c$$
$$42\,a^2 b\,c = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c$$
$$18\,a^2 b^2 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$$

In den Produkten gibt es sieben verschiedene Faktoren.

Faktor	Höchste Potenz
2	2^1
3	3^2
5	5^1
7	7^1
a	a^2
b	b^2
c	c^1

Der „optimale“ gemeinsame Nenner lautet $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c = 630 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c$.

3. Beispiel: Eine Klammer enthält Summanden wie folgt: $120\,a \cdot b^2 \cdot c$, $48\,a^2 \cdot b^2 \cdot c$ und $72\,b^3 \cdot c^2$. Was kann man ausklammern? (Bestimme die „optimale Lösung“!)

Wir faktorisieren jeden Nenner vollständig

$$120\,a\,b^2 c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c$$
$$48\,a^2 b^2 c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c$$
$$72\,b^3 c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c$$

In den Produkten gibt es sechs verschiedene Faktoren.

Faktor	Tiefste Potenz
2	2^3
3	3^1
5	5^0
a	a^0
b	b^2
c	c^1

Man kann „höchstens“ folgendes ausklammern: $2^3 \cdot 3 \cdot b^2 \cdot c = 24 \cdot b^2 \cdot c$.

Aufgabe M-ggT / kgV-1: Bestimme

a) ggT(1,2)
b) ggT(24,36)
c) ggT(13,46)
d) ggT(18,24)
e) ggT(28,42)
f) ggT(510,850)
g) ggT(112,126)
h) ggT(4,6,8)
i) ggT(24,40,56)
j) ggT(78,208,156)

Aufgabe M-ggT / kgV-2: Bestimme

a) kgV(1,2)
b) kgV(5,6)
c) kgV(2,8)
d) kgV(4,8)
e) kgV(8,12)
f) kgV(10,14)
g) kgV(24,32)
h) kgV(22,35)
i) kgV(84,96)
j) kgV(4,6,8)
k) kgV(24,16,80)
l) kgV(42,77,70)
m) kgV(24,16,18)
n) kgV(3,6,9,12,18)

Aufgabe M-ggT / kgV-3: Zwei Holzstäbe mit Längen von 174 cm und 290 cm sollen in lauter gleich lange Stücke zersägt werden. Wie lang könnten die Teilstücke höchstens sein?

Aufgabe M-ggT / kgV-4: Eine 184 cm lange und 136 cm breite Tischplatte soll mit möglichst grossen farbigen quadratischen Mosaiksteinen belegt werden. Welche Seitenlänge müssen die Steinchen aufweisen und wie viele benötigt man?

Aufgabe M-ggT / kgV-5: Bei einem Neubau sind die Stockwerke 255 cm hoch. Der Keller ist 289 cm hoch. Es sollen überall Treppen mit gleich hohen Stufen gebaut werden.

a) Wie hoch sind die einzelnen Stufen?
b) Wie viele Stufen sind es auf den Treppen zwischen Stockwerken?
c) Wie viele Stufen sind es auf der Treppe zum Keller?

Aufgabe M-ggT / kgV-6: Auf die linke Waagschale einer Balkenwaage werden Wägestücke mit 10 g Gewicht gelegt. Auf die andere Waagschale werden solche mit 14 g Gewicht gelegt. Wie viele Wägestücke braucht es auf jeder Seite mindestens, damit die Waage im Gleichgewicht ist?

Aufgabe M-ggT / kgV-7: Auf einem quadratförmigen Sitzplatz sollen Betonplatten mit einer Länge von 60 cm und einer Breite von 48 cm lückenlos verlegt werden. Wie gross müsste der Sitzplatz mindestens sein?

Aufgabe M-ggT / kgV-8: Holzquader mit Kantenlängen 30 mm, 18 mm und 15 mm sollen zu einem Würfel ohne Hohlräume aufgeschichtet werden. Wie viele Quader werden mindestens benötigt?

Aufgabe M-ggT / kgV-9: Ein Holzquader mit Seitenlängen 144 mm, 132 mm und 108 mm soll vollständig in lauter gleich grosse Würfel zersägt werden. Wie viele Würfel erhält man wenigstens?
Aufgabe M-ggT / kgV-10: Zwei Linienbusse treffen gleichzeitig an einer Haltestelle ein. Wie lange dauert es mindestens, bis dies erneut der Fall sein wird, wenn die beiden Busse für ihre Routen 56 min, resp. 70 min benötigen?

Musterlösungen:

Aufgabe M-ggT / kgV-1: a) 1. (b) 12. (c) 1. (d) 6. (e) 14. (f) 170. (g) 14. (h) 2. (i) 8. (j) 26.
Aufgabe M-ggT / kgV-2: a) 2. (b) 30. (c) 8. (d) 8. (e) 24. (f) 70. (g) 96. (h) 770. (i) 672. (j) 24. (k) 240. (l) 2310. (m) 144. (n) 36.
Aufgabe M-ggT / kgV-3: 58 cm.
Aufgabe M-ggT / kgV-4: 8 cm. $N = 184 \cdot 136 / 8^2 = 391$.
Aufgabe M-ggT / kgV-5: a) 17 cm. (b) 15. (c) 17.
Aufgabe M-ggT / kgV-6: Links sieben Wägestücke (mit 10 g Gewicht) und rechts fünf Wägestüke (mit 14 g Gewicht).
Aufgabe M-ggT / kgV-7: 240 cm Seitenlänge.
Aufgabe M-ggT / kgV-8: Würfelkante 90 cm $\rightarrow$ $90^3 / (30 \cdot 18 \cdot 15) = 90$. Es werden 90 Quader benötigt.
Aufgabe M-ggT / kgV-9: Würfelkante 12 mm $\rightarrow$ $144 \cdot 132 \cdot 108 / 12^3 = 1188$. Man erhält wenigstens 1188 Würfel.
Aufgabe M-ggT / kgV-10: 280 min.