FACHHOCHSCHULE ZÜRICH

Schriftl. Püfung *Mathe 2** *Klasse ZS K2* **A**

1. Juni 2010 *90min* **max. 60P**

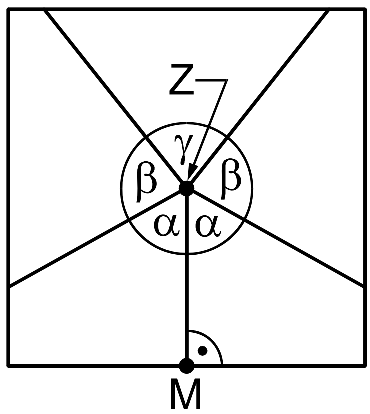
1. Berechne Lösungen im Bereich $0 \leq \alpha \leq 360^o$ von $\sin(2\alpha - 70^o) + \cos(\alpha - 20^o) = 0$. (5 P).

2. Berechne Lösungen im Bereich $0 \leq \alpha \leq 360^o$ von $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$. (5 P).

* Lösungen verschiedener Aufgaben sollen durch waagrechte Striche voneinander getrennt werden. Die Verwendung roter Farbe soll soweit möglich vermieden werden. Resultate werden doppelt unterstrichen oder eingerahmt. Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht bewertet.

3. Von einem allgemeinen Dreieck kennt man die Seite c und die Differenz der Seiten a und b. Ausserdem ist $\gamma = 60^\circ$. Wie gross sind die Seiten a und b, wenn $a - b = 2$ und $c = 8$? (5 P).

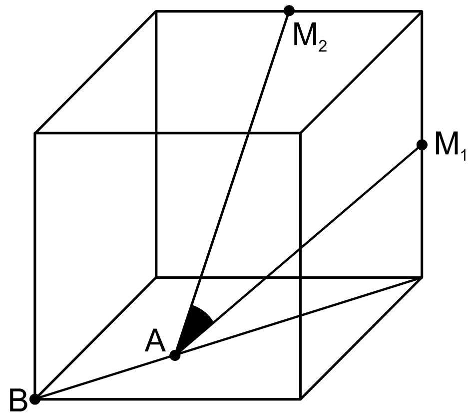
4. Vom Mittelpunkt Z eines Quadrats aus werden fünf Strahlen gezogen, die das Quadrat in fünf flächengleiche Teile zerlegen soll, wobei ein Strahl senkrecht zu einer Quadratseite steht. Siehe dazu nebenstehende Figur! Wie gross sind die Winkel α, β und γ? (5 P).



5. Ein gerader Kreiskegel mit einem Grundkreisradius von $8\,\text{cm}$ und einem Öffnungswinkel von 60° wird mit einer Ebene geschnitten, die parallel zum Grundkreis verläuft. Dabei entstehen ein kleinerer Kreiskegel, sowie ein Kegelstumpf. Wie gross ist der Radius des abgeschnittenen Kreiskegels, wenn seine Oberfläche $3/11$ Mal so gross ist wie die Oberfläche des Kegelstumpfs? (9 P).

6. Bei einem Würfel mit Kantenlänge 6 befindet sich der Punkt A auf der Diagonale der Grundfläche. Siehe dazu nebenstehende Figur! Die Punkte M_1 und M_2 halbieren je eine Würfelkante. Bestimme den Abstand zwischen den Punkten A und B so, dass der Streckenzug M_1AM_2 eine Länge von 12 aufweist, d.h. es soll $\overline{M_1A} + \overline{AM_2} = 12$.

   Berechne für den berechneten Punkt A auch den Winkel $\angle M_1AM_2$, sowie die Fläche des Dreiecks M_1AM_2.



(5P + 3P + 3P = 11P)

7. Der Vektor c sei eine Linearkombination der Vektoren **a** und **b** wie folgt: **c** = **a** + k**b**. Bestimme k so, dass c senkrecht steht auf a, wenn **a** = $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und **b** = $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. (5 P).

8. Eine Gerade g ist gegeben wie folgt: g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für welchen Punkt P auf der Geraden g ist das Produkt seiner Koordinaten, $x_P \cdot y_P \cdot z_P$, gleich 1100? (5 P).

9. Bestimme die Koordinatengleichung einer Ebene E durch den Punkt $P\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, die parallel zu den Geraden g_1 und g_2 verläuft, wenn g_1: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\23\\-7\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und g_2: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}33\\-8\\13\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. (5 P).

10. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben wie folgt: $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$, und $C\begin{pmatrix}4\\q\\4\end{pmatrix}$. Für welchen Wert von q misst die Dreiecksfläche 23? (5 P).

Musterlösungen ZS K2 1. Juni 2010

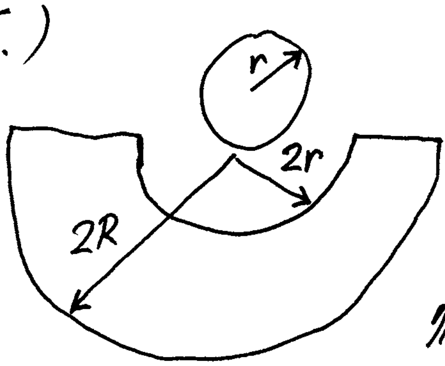
1.) $\underline{\underline{\alpha \in \{0, 120°, 240°, 320°, 360°\}}}$

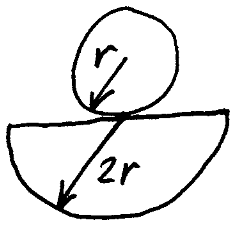
2.) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = [2\cos x - 1] \cdot \sin 2x = 0 \rightarrow$
$\underline{\underline{\alpha \in \{0, 60°, 90°, 180°, 270°, 300°, 360°\}}}$

3.) $c^2 = (b+2)^2 + b^2 - b(b+2) \rightarrow b = -1 \pm \sqrt{61} \rightarrow$
$\underline{\underline{a = 8.8102 \text{ und } b = 6.8102}}$

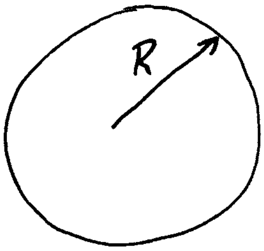
4.) $\alpha = \arctan(5/2) = \underline{\underline{68.20°}}, \ \gamma = 2\arctan(4/5) = \underline{\underline{77.32°}},$
$\beta = 180° - \alpha - \gamma/2 = \underline{\underline{73.14°}}$

5.)





$\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(2r)^2 = \frac{3}{11}\left[\pi R^2 + \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(2R)^2 - \right.$
$\left. \frac{1}{2}\pi \cdot (2r)^2\right] \rightarrow 33r^2 = 3[3R^2 - r^2] \rightarrow$
$4r^2 = R^2 \rightarrow r = R/2 = \underline{\underline{4\,cm}}$



6.) $A\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, M_1\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, M_2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{2(6-x)^2 + 9} + \sqrt{(3-x)^2 + (6-x)^2 + 36} = 12$
$\rightarrow \sqrt{2(6-x)^2 + 9} \cdot \sqrt{(3-x)^2 + (6-x)^2 + 36} + 2x^2 - 21x + 9 = 0 \rightarrow$
$4x^4 - 84x^3 + 756x^2 - 3402x + 6561 = 4x^4 - 84x^3 + 477x^2$
$-378x + 81 \rightarrow 31x^2 - 336x + 720 = 0 \rightarrow x = \frac{12}{31}(14 \pm \sqrt{41})$
$A_1\begin{pmatrix} 7.898 \\ 7.898 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\overline{A_1 B} = 11.169}}, \ A_2\begin{pmatrix} 2.941 \\ 2.941 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{A_2 B} = \underline{\underline{4.159}}$

1. Lösung: $\vec{AM_1} = \begin{pmatrix} -1.898 \\ -1.898 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AM_2} = \begin{pmatrix} -4.898 \\ -1.898 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \varphi_1 = 15.74°$

$\frac{1}{2} \left| \vec{AM_1} \times \vec{AM_2} \right| = 4.3524$

2. Lösung: $\vec{AM_1} = \begin{pmatrix} 3.059 \\ 3.059 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AM_2} = \begin{pmatrix} 0.059 \\ 3.059 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \varphi_2 = 39.04°$

$\frac{1}{2} \left| \vec{AM_1} \times \vec{AM_2} \right| = 11.1680$

//

7.) $\begin{pmatrix} 2+3k \\ -4-4k \\ 1+6k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 28k+21 = 0 \rightarrow k = -3/4$

//

8.) $(4+9\lambda) \cdot 5\lambda \cdot 5 = 225\lambda^2 + 100\lambda = 1100 \rightarrow 9\lambda^2 + 4\lambda - 44 = 0$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow P_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -22/9 \rightarrow P_2 \begin{pmatrix} -18 \\ -110/9 \\ 5 \end{pmatrix}$

//

9.) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow E: 6x + 7y - 2z + q = 0$

$P\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E: 6 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 + q = q - 4 = 0 \rightarrow q = 4$

$E: 6x + 7y - 2z + 4 = 0$

//

10.) $\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ q+1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4q+28 \\ -28 \\ 4q-14 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8q^2 + 28q + 441} = 23$

$\rightarrow 8q^2 + 28q - 88 = 0 \rightarrow 2q^2 + 7q - 22 = 0 \rightarrow$

$q = (-7 \pm 15)/4 \rightarrow q_1 = 2$ und $q_2 = -11/2$