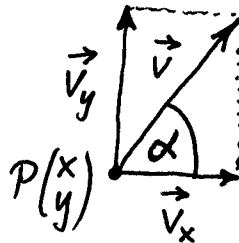
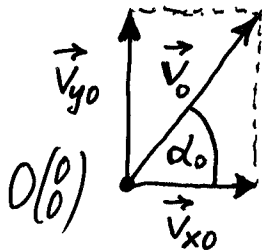
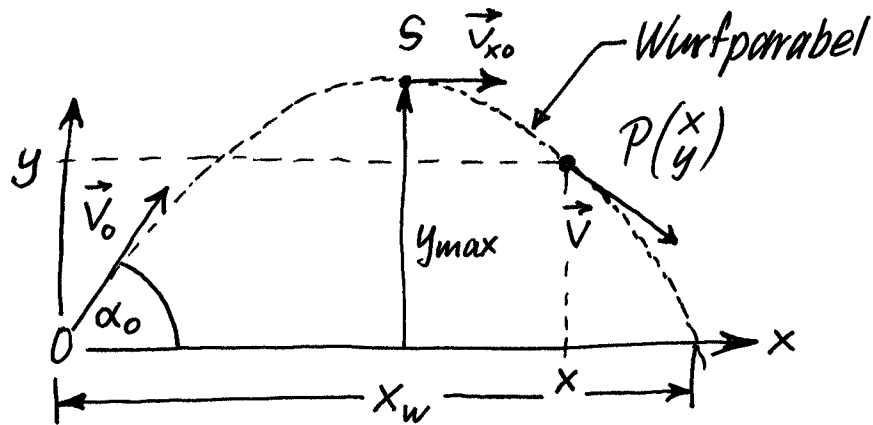


Übung 4: Schiefer Wurf

(Abwurf im Koordinatenursprung)



$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha_0 \\ v_0 \cdot \sin \alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha_0 \\ v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t \end{pmatrix}$$

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha_0 = \text{konst.}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$P \left(\begin{array}{l} v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t \\ v_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right)$$

$$\alpha_0 = \arctan \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right), \quad \alpha = \arctan \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

$$v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha_0, \quad v_x = v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$$v_{y0} = v_0 \cdot \sin \alpha_0, \quad v_y = v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t$$

- S : Scheitelpunkt (höchster Punkt)
 v_0 : Abwurfgeschwindigkeit
 α_0 : Elevationswinkel beim Abwurf
 α : Neigungswinkel der Momentangeschwindigkeit
 x_w : Wurfweite auf horizontalem Gelände
 y_{\max} : Höhe des Scheitelpunkts über der Abwurf-
 stelle

Für den Scheitelpunkt erhält man

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t_s = 0 \rightarrow t_s = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha_0}{g}$$

Dies ergibt

$$S \left(\begin{array}{c} \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} \\ \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} \end{array} \right)$$

Aus „Symmetriegründen“ gilt

$$x_w = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha_0}{g} \quad (= 2x_s)$$

Übungen

- 1.) Für welchen Elevationswinkel α_0 ist die Wurfweite x_w (bei konstanter Abwurfgeschwindigkeit) am grössten. Begründe!
- 2.) Ein Körper wird mit einem Elevationswinkel α_0 von 60° und einer Abwurfgeschwindigkeit v_0 von 8 m/s geworfen. Für eine Zeit $t = 0.5 \text{ s}$ nach dem Abwurf beantworte folgendes:

- a) Wo befindet sich der Körper? ($\{x, y\} = ?$)
- b) Wie schnell und in welche Richtung bewegt sich der Körper? ($\{v, \alpha\} = ?$)
- 3.) Ein Körper wird mit einem Elevationswinkel α_0 von 60° und einer Abwurfgeschwindigkeit von 6 m/s geworfen.
- a) Wie hoch steigt der Körper? ($\{y_{\max} = ?\}$)
- b) Wie lange dauert es, bis sich der Körper zum ersten Mal auf halber Höhe befindet und wie schnell bewegt er sich zu diesem Zeitpunkt.
- 4.) Ein Körper wird mit einem Elevationswinkel von 60° geworfen. Er prallt auf den Boden, der 1.2 m tiefer liegt als die Abwurfstelle. Die Abwurfgeschwindigkeit sei 7 m/s . In welchem horizontalen Abstand von der Abwurfstelle und mit welcher Geschwindigkeit prallt der Körper auf den Boden?
- 5.) Wie unterscheiden sich die Wurfweiten x_w auf horizontalem Gelände für Elevationswinkel von 20° und 70° (bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit)?
- 6.) Für welchen Elevationswinkel α_0 steigt der Körper am höchsten (bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit)?
- 7.) Bei einem schiefen Wurf durchläuft der Körper den 3 m über der Abwurfstelle liegenden Scheitelpunkt der Wurfparabel mit einer Geschwindigkeit von 4 m/s . Wie gross waren Elevationswinkel und Geschwindigkeit beim Abwurf?

Musterlösungen

1.) Für $\alpha_0 = 45^\circ$. Begründung: Für konstante Abwurfgeschwindigkeit v_0 gilt $x_w = \text{konst.} \cdot \sin 2\alpha_0$. Dann ist x_w am grössten wenn $2\alpha_0 = 90^\circ \rightarrow \alpha_0 = 45^\circ$

$$2a) \quad P \left(\begin{array}{c} 8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0.5 \\ 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0.5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0.5^2 \end{array} \right) \text{ m} \rightarrow \underline{\underline{P \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2.214 \end{array} \right) \text{ m}}}$$

$$b) \quad \vec{v} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 8 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot 0.5 \end{array} \right) \text{ m/s} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1.928 \end{array} \right) \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{1.928^2 + 4^2} \text{ m/s} = \underline{\underline{4.44 \text{ m/s}}}$$

$$\alpha = \arctan(1.928/4) = \underline{\underline{25.7^\circ}}$$

$$3a) \quad y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{6^2 \cdot \sin^2 60^\circ}{2 \cdot 10} \text{ m} = \underline{\underline{1.35 \text{ m}}}$$

$$b) \quad v_0 \cdot \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{4g} \rightarrow t = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2g}$$

$$v_0 \cdot \sin \alpha_0 = \underline{\underline{0.1522 \text{ s}}}$$

$$v = \sqrt{3^2 + (6 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot 0.1522)^2} \text{ m/s} = \underline{\underline{4.74 \text{ m/s}}}$$

$$4.) \quad -1.2 \text{ m} = (7 \text{ m/s}) \cdot \sin 60^\circ \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$5t^2 - \frac{7\sqrt{3}}{2} t - \frac{6}{5} = 0 \rightarrow t = \frac{4}{5}\sqrt{3} \text{ s} = 1.386 \text{ s}$$

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha_0 \cdot t = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.386 \text{ m} = \underline{\underline{4.85 \text{ m}}}$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t = [7 \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot 1.386] \text{ m/s}$$

$$= -7.79 \text{ m/s} \rightarrow v = \sqrt{3.5^2 + 7.79^2} \text{ m/s} = \underline{\underline{8.54 \text{ m/s}}}$$

5.) Bilden Verhältnis $x_w(20^\circ)/x_w(70^\circ) = (v_0^2 \cdot \sin 40^\circ/g) / (v_0^2 \cdot \sin 140^\circ/g) = \sin 40^\circ / \sin 140^\circ = 1 \rightarrow$
Die Wurfweiten sind für beide Elevationswinkel α_0 gleich.

6.) $y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha_0}{2g} \rightarrow \sin \alpha_0 = 1$ wenn $\alpha_0 = 90^\circ \rightarrow$ Bei $\alpha_0 = 90^\circ$ steigt der Körper am höchsten.

7.) ① $y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha_0}{2g} = 3\text{m}$ } $\left(\frac{4\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} = 3\text{m}$

② $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha_0 = 4\text{m/s}$
 $v_0 = (4\text{m/s}) / \cos \alpha_0$

$\rightarrow \tan \alpha_0 = \sqrt{3\text{m} \cdot 2g} / (4\text{m/s}) = 1.936 \rightarrow$
 $\alpha_0 = \arctan 1.936 = \underline{\underline{62.7^\circ}}$

$v_0 = \frac{4\text{m/s}}{\cos \alpha_0} = \frac{4}{\cos 62.7^\circ} \text{m/s} = \underline{\underline{8.72\text{m/s}}}$