Differentialgleichungen

Themen:

- Das Richtungsfeld von Differentialgleichungen erster Ordnung (A)
- Integration (B)
- Das Eulersche Polygonzugverfahren (C)
- Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung (D)
- Homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung (E)
- Inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung (F)
- Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom (G)
- Die partikuläre Lösung von inhomogenen linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung (H)
- Ableitungen in der Mechanik und der Elektrodynamik (I)
- Asymptotisches Verhalten bei Differentialgleichungen erster Ordnung (J)

A.1) Bestimme das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x,y) = (x-2)\cdot(y-1)$ im ersten Quadranten mithilfe der Wertetabelle

y \ x	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

A.2) Bestimme das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x,y) = (y-1)/(x-2)$ im ersten Quadranten mithilfe der Wertetabelle

y \ x	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

B.1) Bestimme

a) $y=\int(2x^3)dx$

b) $y=\int e^{-2x}dx$ so, dass $y(0)=5$

c) $y=\int\frac{dx}{x-2}$

d) $y=\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ so, dass $y(0)=2$

e) $y=\int x\cdot\ln x\,dx$

B.2) Berechne $s(t)$ aus $a(t)=\ddot{s}(t)=3t\cdot e^{-t}$ so, dass $s(0)=0$ und $v(0)=0$, wobei $v(t)=\dot{s}(t)$.

Hinweis: $\int x\cdot e^{-x}dx=-(x+1)e^{-x}+C$
Siehe Formelsammlung S. 73

C.1) Bestimme mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren eine Näherung für $y(x)$ im Intervall $0\leq x\leq 1/2$ wenn $y'=f(x,y)=y/e^x$ für $y(0)=2$. Für die Schrittweite h soll gelten $h=0.1$. Skizziere den Graphen von $y(x)$ für den angegebenen Bereich von x.

C.2) Bestimme mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren eine Näherung für $y(x)$ und $z(x)$ im Intervall $0\leq x\leq 1/2$ wenn

$$\left|\begin{array}{l} y'=x\cdot y+z \\ z'=x\cdot z-y \end{array}\right|$$

für $y(0)=z(0)=1$. Für die Schrittweite h soll gelten $h=0.1$. Skizziere die Graphen von $y(x)$ und $z(x)$ im angegebenen Bereich von x.

D.1) Bestimme die Lösung von $y' = 2xy$ für welche $y(0) = 2$.

D.2) Bestimme die Lösung von $(2-y)\,dx + (3+x)\,dy = 0$ für welche $y(0) = 1/2$.

D.3) Bestimme die Lösung von $(xy)y' + \ln x = 0$

E.1) Bestimme die Lösung von $x^n y' - y = 0$ so, dass $y(0) = 1$ wenn $n \neq 1$ und $y(1) = 1$ wenn $n = 1$. [n sei eine ganze Zahl].

E.2) Bestimme die Lösung von $y' - (\ln x)y = 0$.

E.3) Bestimme die Lösung von $y' - (\sin x)y = 0$ so, dass $y(0) = 2$.

E.4) Bestimme die Lösung von $(x+1)y' - xy = 0$ so, dass $y(0) = 2$.

E.5) Bestimme die Lösung von $\sqrt{x^2+1}\,y' - y = 0$ so, dass $y(0) = 3$.

F.1) Bestimme die Lösung von

a) $y' - y = 2$, $y(0) = 1$

b) $y' - y = \sin(2x)$, $y(0) = 1.6$

c) $y' + y = e^x$, $y(0) = 5/2$

d) $y' - y = e^x$, $y(0) = 2$

e) $xy' - y = x^2$, $y'(0) = 3$

G.1) Bestimme die Lösung von

a) $y'' + 9y = 0$ (b) $y'' - 9y = 0$ (c) $y'' + 3y' = 0$

G.2) Bestimme die Lösung von

a) $y'' + y' - 6y = 0$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

c) $y'' - 4y' + 13y = 0$

G.3) Bestimme die Lösung von $y^{IV} - 625y = 0$

G.4) Bestimme die Lösung von $y^{IV} - 21y'' - 100y = 0$

H.1) Bestimme die vollständige Lösung von $y'' + 4y = e^x$

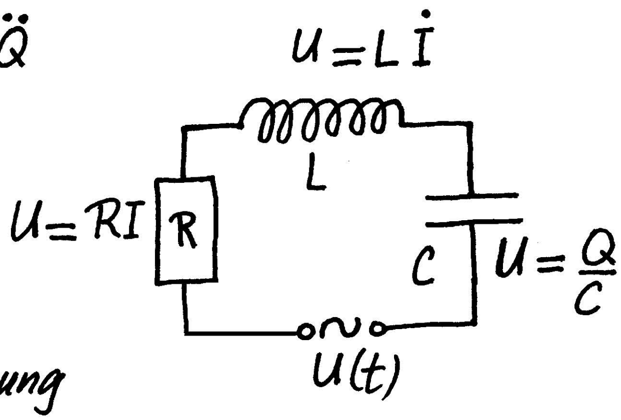
H.2) Bestimme die vollständige Lösung von

a) $y'' - y = \sin x$

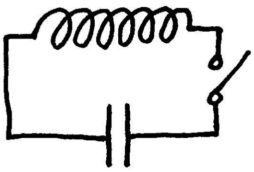
b) $y'' + y = \sin x$

c) $y'' - 2y' + 2y = e^x + \sin x$

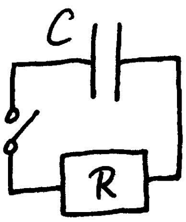
I.1) Es gilt: $I = \dot{Q}$, $\dot{I} = \ddot{Q}$



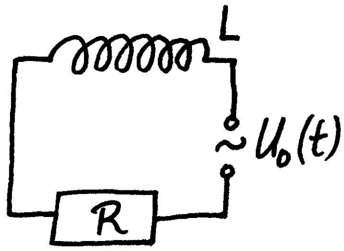
a) Notiere die Differentialgleichung für eine ungedämpfte elektrische Schwingung



b) Notiere die Differentialgleichung für die Entladung eines Kondensators über einem Widerstand.



c) Notiere die Differentialgleichung für eine Serienschaltung mit einer Spule und einem ohmschen Widerstand an einer Wechselspannung $U_0(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$



I.2) $v(t) = \dot{s}(t)$, $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$, $F = m \cdot a$, $P(t) = \dot{W}(t)$, $W(t) = F(t) \cdot s(t)$

a) Federpendel: Es gilt $F = -D \cdot y = m \cdot a$, wobei $a = \ddot{y}$. Formuliere die Differentialgleichung.

b) Man lässt eine Stahlkugel in zähflüssigem Öl fallen. Wenn man den statischen Auftrieb vernachlässigt wirkt auf den Körper eine beschleunigende Kraft $F_G - c \cdot v$. Bestimme eine Differentialgleichung für den Fall der Kugel.

c) Ein Körper gleitet auf einer horizontalen Ebene. Die verrichtete Reibungsarbeit $\Delta W_R = \mu_G mgs$ entspricht dem Verlust an Bewegungsenergie $\Delta E_k = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v^2)$. Formuliere eine entsprechende Differentialgleichung.

J.1) Welchem Wert nähert sich y asymptotisch für $t \to \infty$ wenn

a) $\dot{y} + ay = c$?

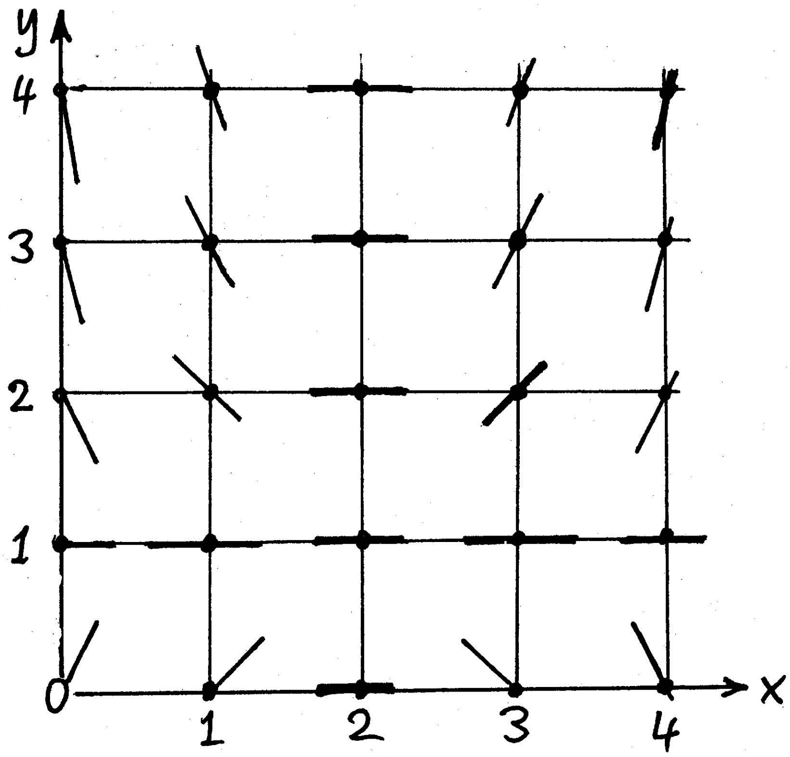
b) $\dot{y} = ky \cdot (a - by)$?

c) $(a - by)\dot{y} = c - d \cdot y$?

Musterlösungen

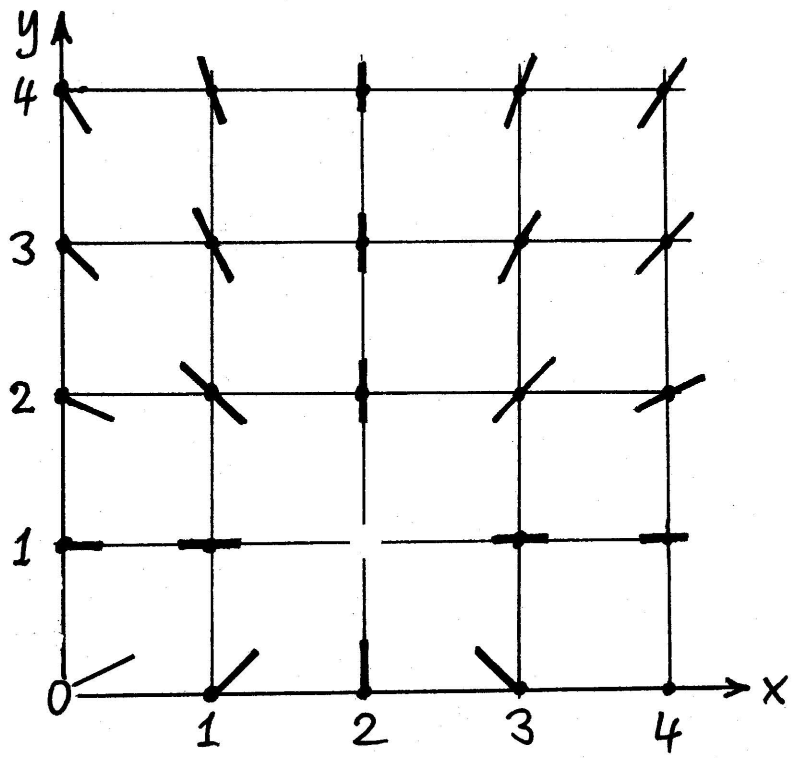
A.1)

y \ x	0	1	2	3	4
0	2	1	0	-1	-2
1	0	0	0	0	0
2	-2	-1	0	1	2
3	-4	-2	0	2	4
4	-6	-3	0	3	6



A.2)

y \ x	0	1	2	3	4
0	$1/2$	1	$\pm\infty$	-1	$-1/2$
1	0	0		0	0
2	$-1/2$	-1	$\pm\infty$	1	$1/2$
3	-1	-2	$\pm\infty$	2	1
4	$-3/2$	-3	$\pm\infty$	3	$3/2$



B.1a) $y=\int(2x^3)dx=\frac{x^4}{2}+C$

b) $y=\int e^{-2x}dx=\frac{-e^{-2x}}{2}+C\,,\ y(0)=\frac{-1}{2}+C=5$

$\xrightarrow{+1/2} C=\frac{11}{2} \longrightarrow y=\frac{11-e^{-2x}}{2}$

c) $y=\int\frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|+C$

d) $y=\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{13}[2\sin 3x-3\cos 3x]+C$

$y(0)=\frac{1}{13}[0-3\cdot 1]+C=2 \xrightarrow{+3/13} C=\frac{29}{13}\longrightarrow$

$y=\frac{1}{13}[(2\sin 3x-3\cos 3x)e^{2x}+29]$

e) $y=\int x\cdot\ln x\,dx=\frac{1}{4}x^2[2\ln x-1]+C$

B.2) $\dot{s}(t)=v(t)=\int\ddot{s}(t)dt=3\int\frac{t}{e^t}dt=-3\frac{t+1}{e^t}+C_1$

$\dot{s}(0)=-3\frac{0+1}{1}+C_1=C_1-3=0\rightarrow C_1=3$

$\dot{s}(t)=v(t)=3\left[1-\frac{t+1}{e^t}\right]=3[1-e^{-t}-t\cdot e^{-t}]$

$s(t)=\int\dot{s}(t)dt=3\int[1-e^{-t}-t\cdot e^{-t}]dx$

$=3\cdot[t+e^{-t}+(t+1)e^{-t}]+C_2$

$s(t)=3\left[t+\frac{t+2}{e^t}\right]+C_2\rightarrow s(0)=3\left[0+\frac{0+2}{1}\right]$

$+C_2=0\longrightarrow C_2=-6$

$s(t)=3\left[\frac{t+2}{e^t}+t-2\right]$

C.1) $y' = y/e^x$

x_n	y_n	$h \cdot f(x_n, y_n) = 0.1 \cdot y_n / e^{x_n}$
0	2	$0.1 \cdot 2/e^0 = 0.2$
0.1	2.2	$0.1 \cdot 2.2/e^{0.1} = 0.199$
0.2	2.399	$0.1 \cdot 2.399/e^{0.2} = 0.1964$
0.3	2.5954	$0.1 \cdot 2.5954/e^{0.3} = 0.1923$
0.4	2.7877	$0.1 \cdot 2.7877/e^{0.4} = 0.1869$
0.5	2.9746	

C.2) $\left| \begin{array}{l} y' = x \cdot y + z \\ z' = x \cdot z - y \end{array} \right|$

x_n	y_n	z_n	$0.1 \cdot (x_n \cdot y_n + z_n)$	$0.1 \cdot (x_n \cdot z_n - y_n)$
0	1	1	$0.1 \cdot (0 \cdot 1 + 1) = 0.1$	$0.1 \cdot (0 \cdot 1 - 1) = -0.1$
0.1	1.1	0.9	$0.1 \cdot (0.1 \cdot 1.1 + 0.9) = 0.101$	$0.1 \cdot (0.1 \cdot 0.9 - 1.1) = -0.101$
0.2	1.201	0.799	$0.1 \cdot (0.2 \cdot 1.201 + 0.799) = 0.1039$	$0.1 \cdot (0.2 \cdot 0.799 - 1.201) = -0.1041$
0.3	1.3049	0.6949	$0.1 \cdot (0.3 \cdot 1.3049 + 0.6949) = 0.1086$	$0.1 \cdot (0.3 \cdot 0.6949 - 1.3049) = -0.1096$
0.4	1.4135	0.5853	$0.1 \cdot (0.4 \cdot 1.4135 + 0.5853) = 0.1151$	$0.1 \cdot (0.4 \cdot 0.5853 - 1.4135) = -0.1179$
0.5	1.5286	0.4674		

D.1) $(\ln y)' = 2x \rightarrow \ln y = e^{x^2} + C$

$y(0) = 1 + C = 2 \rightarrow C = 1 \rightarrow \underline{\underline{y(x) = e^{x^2} + 1}}$

D.2) $\frac{dx}{3+x} = \frac{-dy}{2-y} = \frac{dy}{y-2} \rightarrow \ln(x+3) = \ln(y-2)$

$+ \ln C_0 \rightarrow \ln\left(C_0 \frac{y-2}{x+3}\right) = 0 \rightarrow C_0 \frac{y-2}{x+3} = 1$

$\rightarrow y = \frac{x+3}{C_0} + 2 \rightarrow y(0) = \frac{0+3}{C_0} + 2 = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\frac{3}{C_0} = -\frac{3}{2} \rightarrow C_0 = -2 \rightarrow y = \frac{x-1}{-2} \rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1-x}{2}}}$

D.3) $(xy)y' = -\ln x \rightarrow y\,dy = -\frac{\ln x}{x} \rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$+ \frac{C_0}{2} \rightarrow y^2 = C_0 - (\ln x)^2 \rightarrow \underline{\underline{y = \pm\sqrt{C_0 - (\ln x)^2}}}$

E.1) $y'/y = x^{-n} = (\ln y)' \rightarrow \ln y = \frac{x^{1-n}}{1-n} + C_0$

falls $n \neq 1$ und $\ln y = \ln x + C_0$ falls $n = 1$.

$$y = \begin{cases} c \cdot x & \text{falls } n = 1 \\ c \cdot e^{(x^{1-n})/(1-n)} & \text{falls } n \neq 1 \end{cases}$$

$n \neq 1 \rightarrow y(0) = c \cdot e^0 = 1 \rightarrow c = 1$

$n = 1 \rightarrow y(1) = c \cdot 1 = 1 \rightarrow c = 1$

$$\underline{\underline{y = \begin{cases} x & \text{falls } n = 1 \\ e^{(x^{1-n})/(1-n)} & \text{falls } n \neq 1 \end{cases}}}$$

E.2) $y'/y = (\ln y)' = \ln x \rightarrow \ln y = x \cdot (\ln x - 1) + C_0$

$= \ln(x^x) - x + C_0 \rightarrow y = C \cdot x^x / e^x = \underline{\underline{C\left(\frac{x}{e}\right)^x}}$

E.3) $y'/y = (\ln y)' = \sin x \rightarrow \ln y = -\cos x + C_0$

$\rightarrow \underline{\underline{y = C \cdot e^{-\cos x}}}$

E.4) $y'/y = (\ln y)' = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \rightarrow \ln y = x - \ln(x+1) + C_0 \longrightarrow \underline{\underline{y = \frac{C \cdot e^x}{x+1}}}$

E.5) $y'/y = (\ln y)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \ln y = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + C_0 \longrightarrow y = C[\sqrt{x^2+1}+x]$, $y(0) = C \cdot [\sqrt{0+1}+0] = C = 3 \longrightarrow \underline{\underline{y = 3 \cdot [\sqrt{x^2+1}+x]}}$

F.1a) Char. Gl. $r - 1 = 0 \rightarrow y_h = C \cdot e^x$, $y_p = A \rightarrow$
$y_p' = 0 \rightarrow 0 - A = 2 \rightarrow A = -2$
$y_g = y_h + y_p = C \cdot e^x - 2 \rightarrow y_g(0) = C \cdot e^0 - 2 = C - 2 = 1 \rightarrow C = 3 \rightarrow \underline{\underline{y = 3e^x - 2}}$

b) Char. Gl. $r - 1 = 0 \rightarrow y_h = C \cdot e^x$, $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$, $y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$
Einsetzen: $2A \cos 2x - 2B \sin 2x - A \sin 2x - B \cos 2x = \sin 2x$
Koeffizientenvergleich: $\sin 2x: -2B - A = 1$
$\cos 2x: 2A - B = 0 \rightarrow B = 2A \rightarrow -4A - A = -5A = 1 \rightarrow A = -1/5$ und $B = 2A = -2/5$

$y_g = y_h + y_p = C \cdot e^x - \frac{1}{5}[\sin 2x + 2 \cos 2x]$
$y_g(0) = 1.6 \rightarrow 1.6 = C \cdot e^0 - \frac{1}{5}[0 + 2 \cdot 1] = C - 0.4$
$\xrightarrow[+0.4]{} C = 1.6 + 0.4 = 2 \rightarrow$
$\underline{\underline{y = 2e^x - \frac{1}{5}[\sin 2x + 2 \cos 2x]}}$

c) Char. Gl.: $r+1=0 \to y_h = C\cdot e^{-x}$, $y_p = A\cdot e^{x} = y_p'$

$A\cdot e^{x} + A\cdot e^{x} = 2Ae^{x} = e^{x} \to A = 1/2 \to$

$y_p = \frac{1}{2}e^{x} \to y_g = y_h + y_p = C\cdot e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$

$y_g(0) = C\cdot e^{0} + \frac{1}{2}e^{0} = C + 1/2 = 5/2 \to C = 2$

$\underline{\underline{y = 2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}}}$

d) Char. Gl. $r-1=0 \to y_h = C\cdot e^{x}$, $y_p = Ax\cdot e^{x}$,

$y_p' = A\cdot(x+1)\cdot e^{x} \to Axe^{x} + A\cdot e^{x} - Axe^{x} = e^{x}$

$\to A\cdot e^{x} = e^{x} \to A = 1 \to y_p = x\cdot e^{x}$,

$y_g = y_h + y_p = (C+x)\cdot e^{x}$, $y(0) = (C+0)\cdot e^{0} =$

$C = 2 \to \underline{\underline{y = (x+2)\cdot e^{x}}}$

e) $xy' - y = x^2$, $y_h'/y_h = (\ln y_h)' = 1/x \to$

$\ln y_h = \ln x + C_0 \to y_h = Cx$

$y_p = Ax^2$, $y_p' = 2Ax$

Einsetzen: $x\cdot 2Ax - Ax^2 = 2Ax^2 - Ax^2 = x^2$

$\to A = 1 \to y_g = y_h + y_p = Cx + x^2$

$y' = C + 2x$, $y'(0) = C + 2\cdot 0 = C = 3 \to \underline{\underline{y = 3x + x^2}}$

G.1a) Char. Gl.: $r^2 + 9 = 0 \to r = \pm 3i$

$\to \underline{\underline{y = C_1\cdot \sin 3x + C_2\cdot \cos 3x}}$

b) Char. Gl.: $r^2 - 9 = 0 \to r = \pm 3$

$\to \underline{\underline{y = C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot e^{-3x}}}$

c) Char. Gl.: $r^2 + 3r = r\cdot(r+3) = 0 \to \underline{\underline{y = C_1 + C_2\cdot e^{-3x}}}$

G.2a) Char. Gl.: $r^2 + r - 6 = (r+3)\cdot(r-2) = 0$

$\underline{\underline{y = C_1\cdot e^{2x} + C_2 e^{-3x}}}$

b) Char. Gl.: $r^2-4r+4=0=(r-2)^2 \rightarrow$

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$$

c) Char. Gl.: $r^2-4r+13=0 \rightarrow$

a	b	c
1	-4	13

$$D=b^2-4ac=16-4\cdot1\cdot13=-36$$

$$r=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=2\pm3i$$

$$y=[C_1\cdot\sin3x+C_2\cdot\cos3x]\cdot e^{2x}$$

G.3) Char. Gl.: $r^4-625=0 \rightarrow r_1=5,\ r_2=-5,$
$r_3=5i,\ r_4=-5i$

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x}+C_3\sin5x+C_4\cos5x$$

G.4) Char. Gl. $r^4-21r^2-100=0 \rightarrow$

$$r^2=\frac{21\pm\sqrt{441-4\cdot1\cdot(-100)}}{2}=\frac{21\pm29}{2}$$

$r^2=25 \rightarrow r_1=5,\ r_2=-5$

$r^2=-4 \rightarrow r_3=2i,\ r_4=-2i$

$$y=C_1\cdot e^{5x}+C_2e^{-5x}+C_3\sin2x+C_4\cos2x$$

H.1) Char. Gl.: $r^2+4=0 \rightarrow r=\pm2i,\ y_h=C_1\cdot\sin2x$
$+C_2\cdot\cos2x,\ y_p=y_p''=A\cdot e^x$

Einsetzen: $A\cdot e^x+4Ae^x=5Ae^x=e^x \rightarrow A=1/5$

$$y=y_h+y_p=C_1\sin2x+C_2\cos2x+\frac{1}{5}e^x$$

H.2a) Char. Gl.: $r^2-1=0 \rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$y_p=A\cdot\sin x+B\cdot\cos x,\ y_p''=-y_p$

Einsetzen: $-A\sin x-B\cos x-A\sin x-B\cos x=$
$-2A\sin x-2B\cos x=\sin x \rightarrow B=0$
und $A=-1/2 \rightarrow y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$

b) Char. Gl.: $r^2+1=0 \rightarrow y_h=C_1\sin x+C_2\cos x$

$y_p = Ax\sin x + Bx\cos x \to y_p' = A\sin x + B\cos x +$
$Ax\cos x - Bx\sin x$, $y_p'' = 2A\cos x - 2B\sin x -$
$Ax\sin x - Bx\cos x$

Einsetzen: $y_p'' + y = 2A\cos x - 2B\sin x - Ax\sin x -$
$Bx\cos x + Ax\sin x + Bx\cos x =$
$2(A\cos x - B\sin x) = \sin x \to A = 0$ u. $B =$
$-1/2 \to \underline{\underline{y = C_1\sin x + \left(C_2 - \frac{x}{2}\right)\cos x}}$

c) Char. Gl.: $r^2 - 2r + 2 = 0 \to r = 1 \pm i \to$
$y_h = (C_1\sin x + C_2\cos x)\cdot e^x$, Ansatz
partikuläre Lösung: $y_p = A\cdot e^x + B\sin x + C\cos x \to$
$y_p' = A\cdot e^x + B\cos x - C\sin x$
$y_p'' = A\cdot e^x - B\sin x - C\cos x$

$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = A\cdot e^x + (B+2C)\sin x + (C-2B)\cos x$
$= e^x + \sin x \to A = 1,\ B + 2C = 1$
und $C - 2B = 0 \to C = 2B$
$B + 2\cdot 2B = 5B = 1 \to B = 1/5,\ C = 2B$
$= 2/5 \to y_p = e^x + \frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x)$

$\underline{\underline{y = (C_1\sin x + C_2\cos x + 1)\cdot e^x + \frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x)}}$

I.1a) $L\dot{I} + Q/C = 0 \to L\ddot{Q} + Q/C = 0 \to$
$\underline{\underline{\ddot{Q} + Q/(LC) = 0}}$

b) $Q/C + RI = 0 \to \underline{\underline{\dot{Q} + Q/(RC) = 0}}$

c) $L\dot{I} + RI = 0 \to \underline{\underline{\dot{I} + (R/L)I = 0}}$

I.2a) $m\ddot{y} + Dy = 0 \to \underline{\underline{\ddot{y} + (D/m)y = 0}}$

b) $m(g - a) - cv = 0 \to ma + cv = m\dot{v} + cv = mg$
$\to \dot{v} + (c/m)v = g$

c) $\Delta W_R = \mu_G m g s = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v^2) = \Delta E_k \xrightarrow{:m}$

$2\mu_G g s = v_0^2 - (\dot{s})^2 \longrightarrow \underline{\underline{(\dot{s})^2 + 2\mu_G g s = v_0^2}}$

J. 1a) $\dot{y} = 0 \rightarrow ay = c \longrightarrow \underline{\underline{y \rightarrow c/a}}$

b) $\dot{y} = 0 \rightarrow ky \cdot (a - by) = 0 \longrightarrow \underline{\underline{y \rightarrow 0}}$ oder $\underline{\underline{y \rightarrow a/b}}$

c) $\dot{y} \rightarrow 0 \rightarrow \underline{\underline{y \rightarrow c/d}}$