Bewegung unter dem Einfluss einer „Lissajou-Kraft"

Wir definieren eine zeitabhängige Kraft wie folgt:

$$\vec{F}(t) = F_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega_x t + \vartheta_x) \\ \cos(\omega_y t + \vartheta_y) \end{pmatrix}$$

Die Kreisfrequenzen seien in einem ganzzahligen Verhältnis $\omega_x : \omega_y = n_x : n_y$. Wir verwenden eine „reduzierte Zeit" so, dass

$$\omega_x \cdot t = n_x \cdot \tau$$
$$\omega_y \cdot t = n_y \cdot \tau$$

Mit der „reduzierten Zeit" erhält man für die Kraft

$$\vec{F}(t) = F_0 \begin{pmatrix} \cos(n_x \tau + \vartheta_x) \\ \cos(n_y \tau + \vartheta_y) \end{pmatrix}$$

Dabei ist τ die „reduzierte Zeit" und $\{n_x, n_y\} \in \mathbb{N}$.

Wir beginnen mit einem anfänglichen Impuls $\vec{p}_0$. In einem kleinen Zeitintervall sei die Kraft konstant. Man kann dann den Impuls aus der Veränderung im Zeitintervall Δt rekursiv „verfolgen"

$$\vec{p} \leftarrow \vec{p} + \vec{F} \cdot \Delta t$$

Der Körper befinde sich zur Zeit $t=0$ im Koordinatenursprung. Den Aufenthaltsort am Ende des Zeitintervalls kann man ebenfalls rekursiv eruieren

$$\vec{r} \leftarrow \vec{r} + \vec{p} \cdot \frac{\Delta t}{m}$$

Wir nehmen

$$F_0 \cdot \Delta t = A \cdot \Delta \tau$$

und

$$\frac{\Delta t}{m} = B \cdot \Delta \tau$$

Aussedem

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$