Musterprüfung

Themen:
A. Mittelwert, Varianz, Standardabweichung
B. Median, Quartile, Boxplot
C. Normalverteilung
D. Kovarianz und Korrelationskoeffizient
E. Binomialverteilung
F. Eliminations-Algorithmus von Gauss
G.1. Lineare Optimierung mit zwei Variablen: 1. Teil: Grafisches Lösungsverfahren
G.2. Lineare Optimierung mit zwei Variablen: 2. Teil: Der Simplex-Algorithmus

A.1) Bestimme den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Stichprobe

101, 104, 98, 103, 106, 94

B.1) Bestimme den Median sowie das erste und das dritte Quartil der Stichprobe

61, 58, 51, 72, 63, 68, 59, 51, 67, 63, 51, 70

Veranschauliche die Daten mithilfe von einem Boxplot.

C.1) Wir betrachten eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ. Es sollen 95% der Werte der Zufallsvariable x im Intervall $\mu - K\sigma \leq x \leq \mu + K\sigma$ liegen. Wie gross ist dann K?

C.2) Eine Messgrösse sei normalverteilt. Der Mittelwert einer Stichprobe sei 4.37V. Zwei Drittel der Messwerte liegen unterhalb von 4.50V. Schätze die Standardabweichung der Messgrösse.

C.3) Eine Abfüllmaschine für Kirschen soll Behälter mit 250g Kirschen füllen. Die Standardabweichung liegt bei dieser Menge bei rund 6g. Auf welchen Sollwert soll die Maschine eingestellt werden, damit weniger als 10% der abgefüllten Portionen „untergewichtig" sind, d.h. weniger als 250g Kirschen enthalten.

D.1) Bestimme die Kovarianz der sieben Wertepaare

j	1	2	3	4	5	6	7
x_j	10	25	15	33	20	36	15
y_j	42	23	33	14	28	9	26

Stelle die Wertepaare grafisch dar und bestimme den Korrelationskoeffizienten. Ist die Korrelation positiv oder negativ? Was bedeutet dieses Vorzeichen?

D.2) Bestimme die Gleichung der Regressionsgeraden, sowie den Korrelationskoeffizienten von

j	1	2	3	4	5
x_j	−1	0	2	3	6
y_j	−5	−3	2	3	8

E.1) Ein Laplace-Würfel wird ein Dutzend Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) genau vier Mal eine Augenzahl geworfen wird, die grösser ist als 4?

b) mindestens acht Mal eine Augenzahl geworfen wurde, die kleiner ist als 5?

E.2) Zwei Münzen werden 100 Mal geworfen. Für das Ereignis A „beide Münzen Kopf" soll die Nullhypothese lauten $p = 1/4$. Es sei x die Anzahl Würfe mit Ereignis A. Bestimme auf einem Signifikanzniveau von 5% den Bereich von x für welchen die Nullhypothese verworfen wird.

E.3) Zwei Münzen werden 50 Mal geworfen. Das Ereignis A sei „beide Münzen Kopf". Für die entsprechende Bernoulli-Kette soll gelten $p = 1/4$.

a) Berechne mithilfe der Binomialverteilung (exakt!) mit welcher Wahrscheinlichkeit 10, 11, 12, 13, 14 oder 15 Mal das Ereignis A eintritt.

b) Bestimme, ob sich die Binomialverteilung mit ausreichender Genauigkeit durch eine Normalverteilung darstellen lässt.

c) Berechne mithilfe der Standard-Normalverteilung wie gross die Wahrscheinlichkeit für $9.5 \leq x \leq 15.5$ ist, wobei x die Anzahl Würfe mit dem Ereignis A ist.

F.1) Bestimme mithilfe des Eliminations-Algorithmus von Gauss die Lösung des Systems von linearen Gleichungen.

$$\left| \begin{array}{l} x + y - z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ 2x - 3y - z = 7 \end{array} \right|$$

G.1.1) Ein Bauer hält Schafe und Ziegen. Damit er einem Abnehmer genügend Ziegenmilch liefern kann, braucht er mindestens 7 Ziegen. Auf seinem Bauernhof hat er ausreichend Platz für 50 Tiere. Der Bauer möchte nicht mehr Ziegen als Schafe haben. Die Betreuung der Ziegen erfordert rund 30 Arbeitsstunden pro Ziege und Jahr. Die Betreuung eines Schafs erfordert nur halb so viele Arbeitsstunden. Der Bauer möchte pro Monat höchstens 80 Arbeitsstunden für die Betreuung seiner Schafe und Ziegen aufwenden. Für wie viele Schafe und Ziegen resultiert für den Bauern ein maximaler Gewinn, wenn eine Ziege pro Jahr einen Gewinn von CHF 450 einbringt, wohingegen ein Schaf einen Gewinn von CHF 300 einbringt.

G.1.2) Ein Landwirt hat 240 kg Äpfel und 300 kg Birnen. Er möchte aus mindestens 360 kg von seinem Obst Süssmost pressen. Er möchte mindestens so viele kg Birnen wie Äpfel zu Süssmost verarbeiten, jedoch nicht mehr als doppelt so viele kg Birnen wie Äpfel. Das Pressen kostet € 60 für 100 kg Äpfel und € 75 für 100 kg Birnen. Wie viele kg Äpfel und Birnen soll der Landwirt zu Süssmost verarbeiten?

G.2.1) Erstelle ein Ausgangstableau für den Simplex-Algorithmus für ein Maximierungsprojekts wie folgt:

a)

(1) $x \geq 0$

(2) $y \geq 0$

(3) $x + 2y \leq 45$

(4) $y \leq 2x$

(5) $2x + y \leq 60$

Gesucht Max. von $z = 5x + 3y$

b)

(1) $x \geq 10$

(2) $x \leq 25$

(3) $y \geq 0$

(4) $x + y \leq 60$

(5) $x + y \geq 30$

(6) $2y \geq x$

Gesucht Max. von $z = 3x + 2y$

Bestimme im Simplex-Ausgangstableau die Pivotspalte und die Pivotzeile.

G.2.2) Bestimme für die Maximierungsprobleme in der obigen Aufgabe das Simplex-Tableau nach dem ersten Iterationsschritt.

Musterlösungen

A.1)

j	x_j	$x_j-\bar{x}$	$(x_j-\bar{x})^2$
1	101	0	0
2	104	3	9
3	98	-3	9
4	103	2	4
5	106	5	25
6	94	-7	49
Summe	606	0	96

$$\underbrace{606}_{\sum_{j=1}^{j=n} x_j} \qquad \underbrace{96}_{\sum_{j=1}^{j=n} (x_j-\bar{x})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \underline{\underline{101}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{96}{5}} = 4\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$\underline{\underline{s = 4.38}}$$

B.1)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	51	51	51	58	59	61	63	63	67	68	70	72

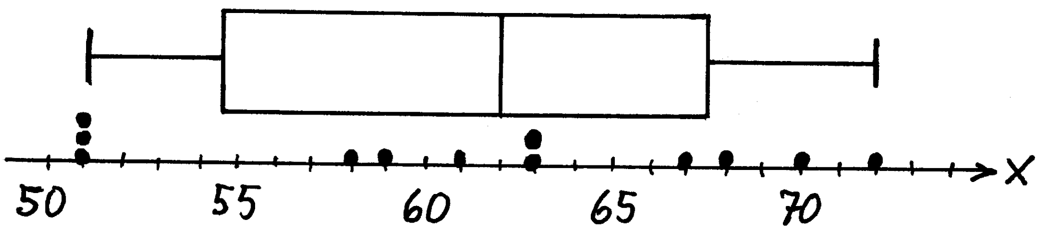
$$\tilde{x} = \frac{x_6+x_7}{2} = \frac{61+63}{2} = \underline{\underline{62}}$$

$$51, 51, \underbrace{51, 58}, 59, 61 \mid 63, 63, \underbrace{67, 68}, 70, 72$$

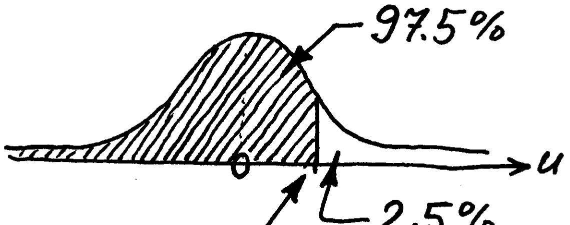
$$\tilde{x}_{1/4} = \frac{x_3+x_4}{2} = \frac{51+58}{2} = \underline{\underline{54.5}}$$

$$\tilde{x}_{3/4} = \frac{x_9+x_{10}}{2} = \frac{67+68}{2} = \underline{\underline{67.5}}$$

Anmerkung: Das erste und das dritte Quartil wurden als Median der Elemente in der geordneten Liste unterhalb, resp. oberhalb des Medians berechnet. (Siehe DMK/DPK-Formelsammlung S. 115).



C.1)

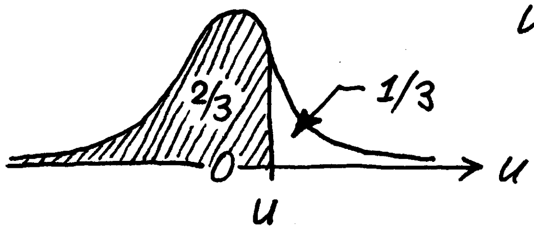


$u = 1.96$ (Tabelle S. 149 in DMK/DPK-Formelsammlung)

$$\rightarrow u = \pm 1.96 = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow x = \mu \pm 1.96\sigma$$

$$\rightarrow \underline{\underline{k = 1.96}}$$

C.2)



$u = 0.4307$ (Tabelle S. 149 in DMK/DPK-Formelsammlung)

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{4.5-4.37}{\sigma} = \frac{0.13}{\sigma} = 0.4307 \rightarrow$$

$$\sigma = \frac{0.13}{0.4307} = \underline{\underline{0.302}}$$

C.3) $\Phi(u) = 0.9 \rightarrow u = 1.28156$

$\Phi(u) = 0.1 \rightarrow u = -1.28156$

$$u = -1.28156 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{250-\mu}{6} \rightarrow$$

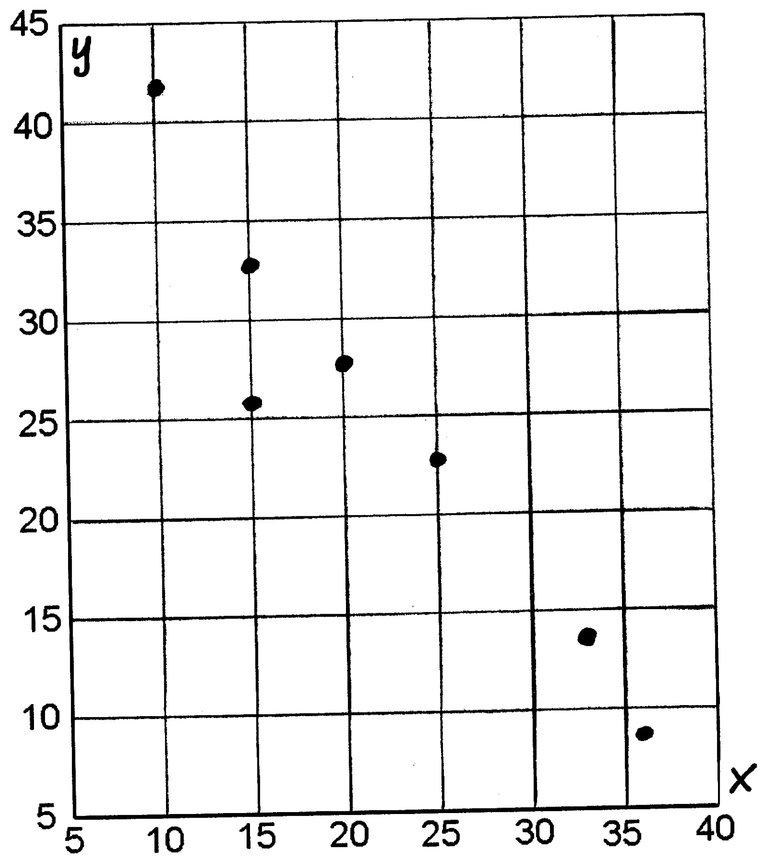
$$\mu = 250 + 6 \cdot 1.28156 = 257.7$$

<u>Antw.</u>: Es muss ein Sollwert von 257.7g eingestellt werden.

D.1)

j	x_j	$\underbrace{x_j-\bar{x}}_{\Delta x_j}$	$(x_j-\bar{x})^2$	y_j	$\underbrace{y_j-\bar{y}}_{\Delta y_j}$	$(y_j-\bar{y})^2$	$\Delta x_j \cdot \Delta y_j$
1	10	−12	144	42	17	289	−204
2	25	3	9	23	−2	4	−6
3	15	−7	49	33	8	64	−56
4	33	11	121	14	−11	121	−121
5	20	−2	4	28	3	9	−6
6	36	14	196	9	−16	256	−224
7	15	−7	49	26	1	1	−7
$\sum$	154		572	175		744	−624

$\bar{x} = \frac{154}{7} = 22$ $\quad$ $\bar{y} = \frac{175}{7} = 25$



$$s_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^{7}(x_j - \bar{x})\cdot(y_j - \bar{y})}{n-1} = \frac{-624}{7-1} = \underline{\underline{-104}}$$

(Kovarianz)

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{7}(x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{7-1}\cdot 572} = \sqrt{\frac{286}{3}}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{7}(y_j - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{7-1}\cdot 744} = \sqrt{124}$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y} = \frac{-104}{\sqrt{\frac{286}{3}\cdot 124}} = -\sqrt{\frac{312}{341}} = \underline{\underline{-0.9565}}$$

(Korrelationskoeff.)

Die Korrelation ist negativ. Das bedeutet, dass y kleiner wird, wenn x grösser wird.

D.2)

j	x_j	$\Delta x_j = x_j - \bar{x}$	$(\Delta x_j)^2$	y_j	$\Delta y_j = y_j - \bar{y}$	$(\Delta y_j)^2$	$(\Delta x_j)\cdot(\Delta y_j)$
1	−1	−3	9	−5	−6	36	18
2	0	−2	4	−3	−4	16	8
3	2	0	0	2	1	1	0
4	3	1	1	3	2	4	2
5	6	4	16	8	7	49	28
Σ	10		30	5		106	56

$\hookrightarrow \bar{x} = \frac{10}{5} = 2$ $\qquad$ $\hookrightarrow \bar{y} = \frac{5}{5} = 1$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{5}(x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5-1}\cdot 30} = \sqrt{15/2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{5}(y_j - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5-1}\cdot 106} = \sqrt{53/2}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{5}(x_j - \bar{x})\cdot(y_j - \bar{y}) = \frac{1}{5-1}\cdot 56 = 14$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{14}{\sqrt{15 \cdot 53/4}} = \frac{28}{\sqrt{795}} = \underline{\underline{0.993}}$$

$$g: y - \bar{y} = m \cdot (x - \bar{x}), \quad m = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{14}{15/2} = \frac{28}{15}$$

$$g: y - 1 = \frac{28}{15} \cdot (x - 2)$$

$$\underline{\underline{g: y = \frac{28}{15} x - \frac{41}{15}}} \rightarrow \underline{\underline{g: y = 1.8667x - 2.7333}}$$

E.1a) $p = 1/3 \rightarrow P = \binom{12}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{2^8}{3^{12}}$

$$\underline{\underline{P = 0.2384}}$$

E.1b) $P = \binom{12}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \binom{12}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}\right)^3 +$

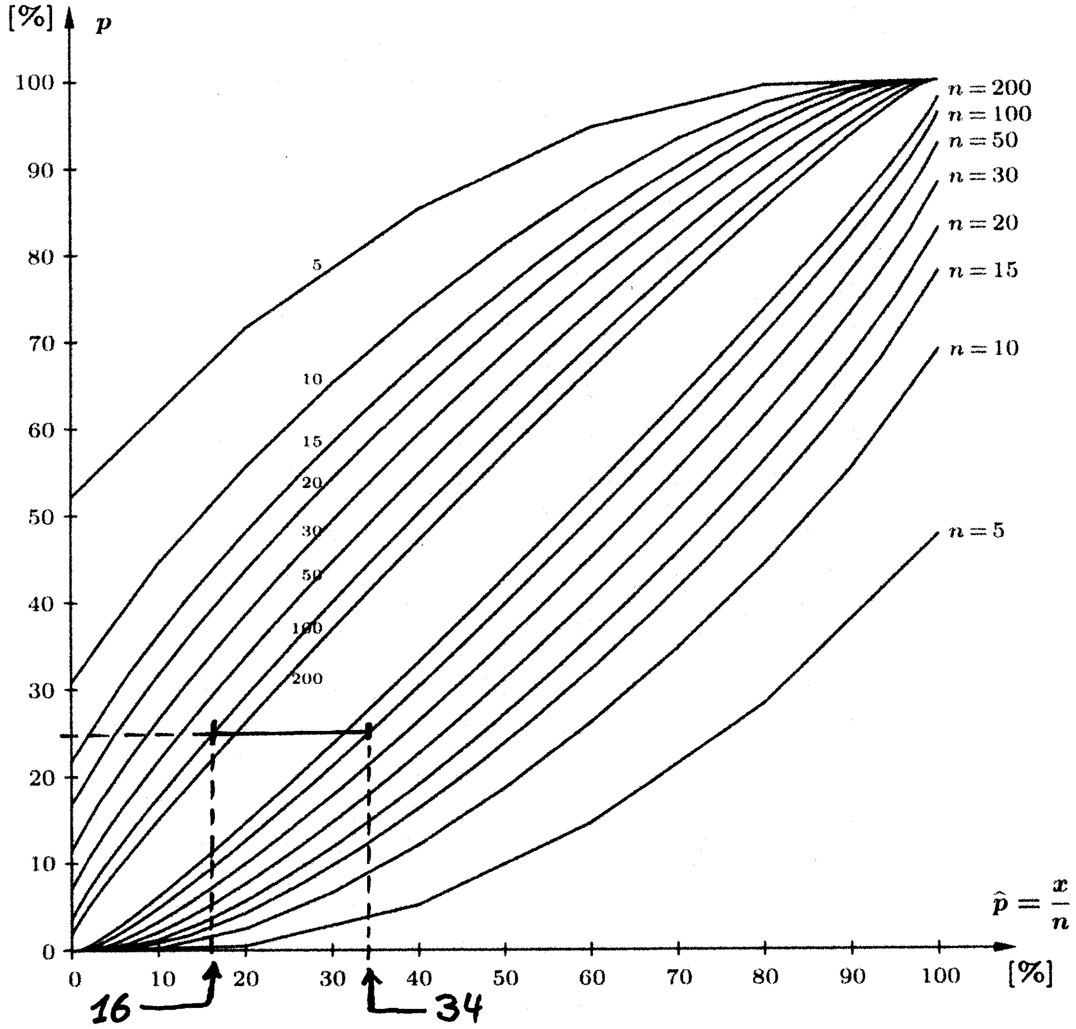
$$\binom{12}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{12}{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

$$= \frac{2^8}{3^{12}} [495 + 2 \cdot 220 + 4 \cdot 66 + 8 \cdot 12 + 16]$$

$$= \frac{256}{531'441} \cdot [1311] = \underline{\underline{0.6315}}$$

E.2)

Tests und Vertrauensintervalle bei der Binomialverteilung



Kurven zur genäherten Bestimmung von Verwerfungsbereichen und Vertrauensintervallen bei der Binomialverteilung für Signifikanzniveau 5% bzw. Vertrauenswahrscheinlichkeit 95%.

Konfidenzintervall auf 5% Signifikanzniveau:

$$\frac{1}{100}\cdot 16 \leq \frac{x}{100} \leq 34\cdot\frac{1}{100} \quad \% \quad \longrightarrow 16 \leq x \leq 34$$

Antw.: Die Nullhypothese ($p = 1/4$) wird verworfen, wenn bei 100 Würfen Ereignis A weniger als 16 Mal oder mehr als 34 Mal eintritt.

E.3a) $P=\binom{50}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{40}+\binom{50}{11}\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\left(\frac{3}{4}\right)^{39}+$
$\binom{50}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{38}+\binom{50}{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{13}\left(\frac{3}{4}\right)^{37}+$
$\binom{50}{14}\left(\frac{1}{4}\right)^{14}\left(\frac{3}{4}\right)^{36}+\binom{50}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^{35}$

$=\frac{3^{35}}{4^{50}}\cdot\big[10'272'278'170\cdot 3^5+37'353'738'800\cdot 3^4$
$+121'399'651'100\cdot 3^3+354'860'518'600\cdot 9$
$+937'845'656'300\cdot 3+2'250'829'575'120\big]$
$=0.098518+0.119416+0.129368+0.126'050+$
$0.111'044+0.088836=\underline{\underline{0.6732}}$

b) $n\cdot p\cdot q=50\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{75}{8}=9.375>9$

$\Rightarrow$ Die Binomialverteilung kann mit hinreichender Genauigkeit durch eine Normalverteilung dargestellt werden.

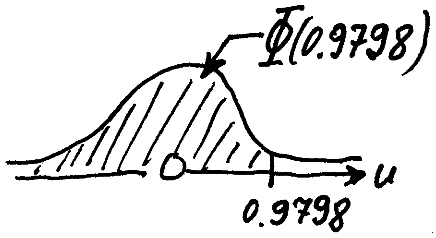
c) $\sigma^2\approx npq=\frac{75}{8}=9.375$

$\sigma\approx\sqrt{75/8}=(5/2)\cdot\sqrt{3/2}=3.06186$

$\mu\approx np=\frac{50}{4}=12.5$

$u_1=\frac{9.5-\mu}{\sigma}=\frac{9.5-12.5}{3.06186}=-0.9798$

$u_2=\frac{15.5-\mu}{\sigma}=\frac{15.5-12.5}{3.06186}=0.9798$



$P=1-2\big[1-\Phi(0.9798)\big]$
$=2\Phi(0.9798)-1$
$=2\cdot 0.8364076-1=\underline{\underline{0.6728}}\approx 0.6732$

Binomialverteilung

F.1)
$$\begin{array}{l|l|} ① & x+y-z=10 \\ ② & 2x-y+z=5 \\ ③ & 2x-3y-z=7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l|l} ① & x+y-z=10 & \\ ②-2\cdot① & 0-3y+3z=-15 & :(-3) \\ ③-2\cdot① & 0-5y+z=-13 & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} ① & x+y-z=10 \\ ② & 0+y-z=5 \\ ③ & 0+5y-z=13 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l|l} ① & x+y-z=10 & \\ ② & 0+y-z=5 & \\ ③-5\cdot② & 0+0+4z=-12 & :4 \end{array}$$

$$\underline{\underline{z=-3}}$$

$$② \quad y-z=y+3=5 \xrightarrow{-3} \underline{\underline{y=2}}$$

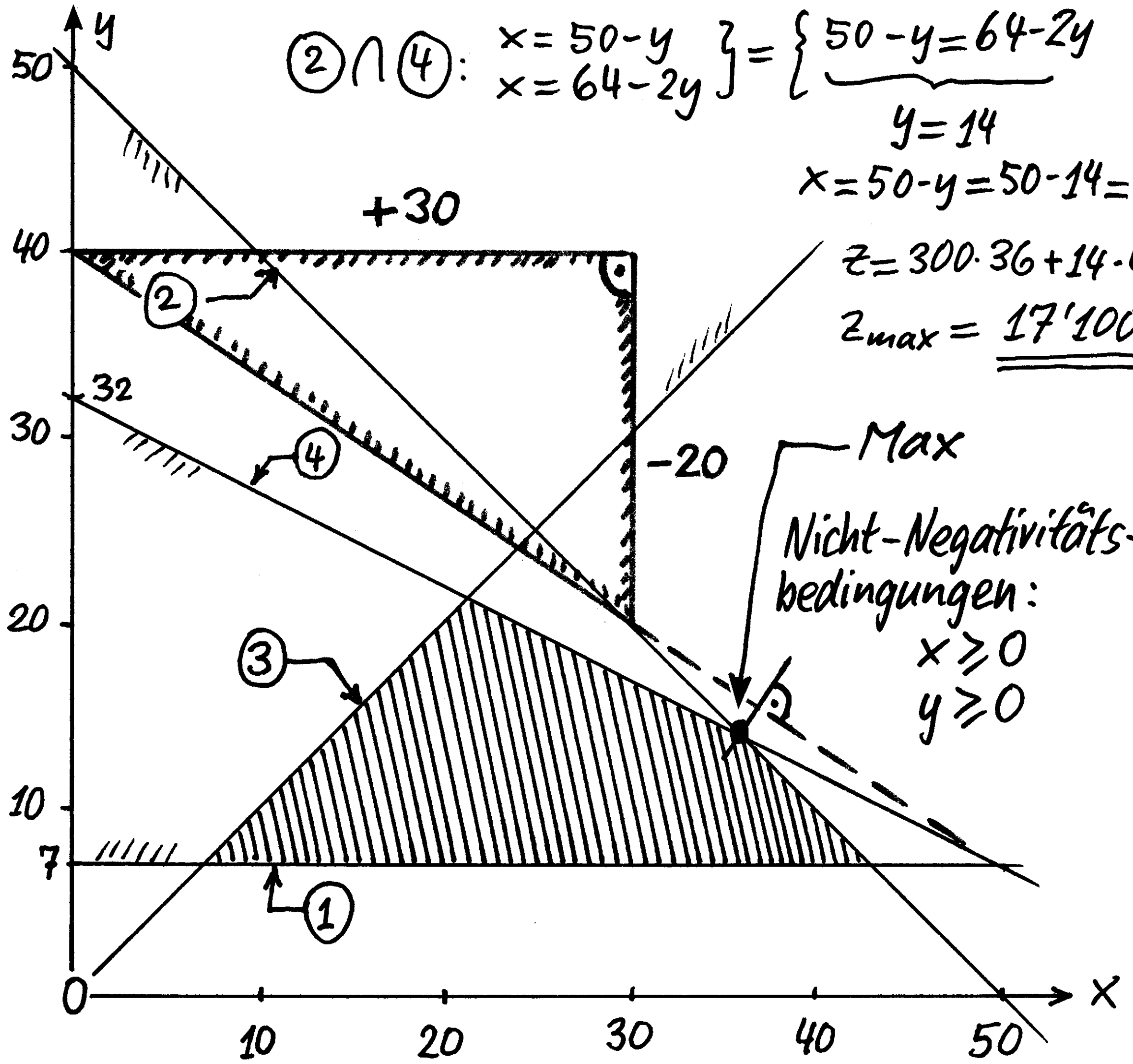
$$① \quad x+y-z=x+2-(-3)=x+5=10 \xrightarrow{-5} \underline{\underline{x=5}}$$

G.1.1) $x=$ Anzahl Schafe, $y=$ Anzahl Ziegen

Nr.	Nebenbedingung	Text
①	$y \geq 7$	Für Ziegenmilch benötigt der Bauer mindestens 7 Ziegen
②	$x+y \leq 50$	Platz für höchstens 50 Tiere
③	$y \leq x$	Nicht mehr Ziegen als Schafe
④	$15x+30y \leq 12\cdot 80$	Maximale Arbeitszeit

$$\xrightarrow{:15} x+2y \leq 64$$

$$z=300x+450y \longrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{450}$$



② ∩ ④: $\left.\begin{array}{l} x = 50 - y \\ x = 64 - 2y \end{array}\right\} = \{ \underbrace{50 - y = 64 - 2y}_{y = 14}$

$x = 50 - y = 50 - 14 = 36$

$z = 300 \cdot 36 + 14 \cdot 450$

$z_{max} = \underline{\underline{17'100}}$

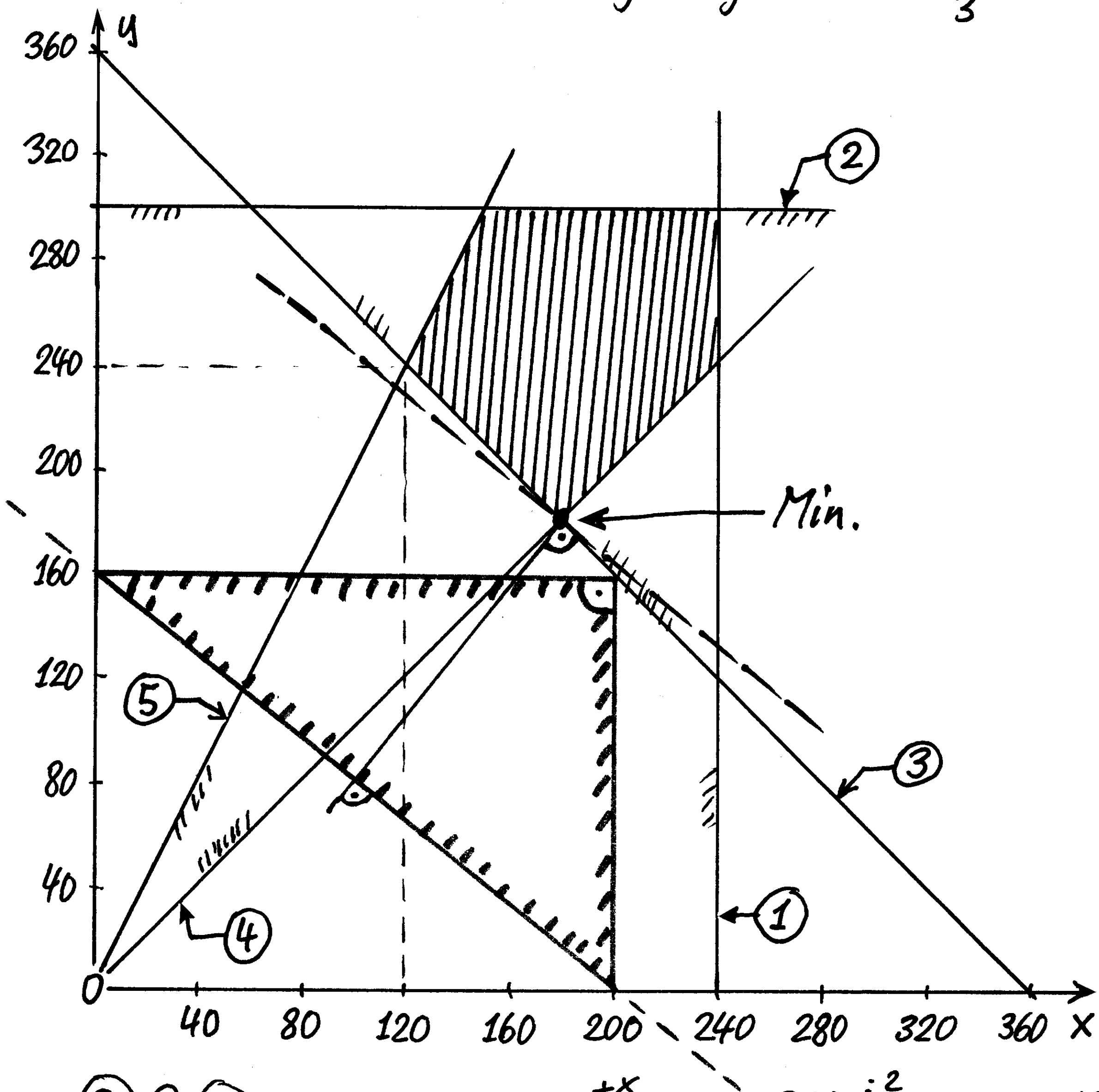
Antw.: Der Bauer sollte 36 Schafe und 14 Ziegen halten. Dann beträgt sein Gewinn CHF 17'100

G.1.2)

x: kg Äpfel
y: kg Birnen

Nr.	Nebenbed.	Text
1	$x \leq 240$	Menge Äpfel
2	$y \leq 300$	Menge Birnen
3	$x + y \geq 360$	Gesamtmenge für Süssmost
4	$y \geq x$	Mehr Birnen als Äpfel
5	$y \leq 2x$	Höchstens zwei Mal so viele Birnen wie Äpfel.

Zielfunktion: $z = 0.6x + 0.75y \rightarrow y = -0.8x + \frac{4}{3}z$



$③ \cap ④: y = x = 360 - x \xrightarrow{+x} 2x = 360 \xrightarrow{:2} x = y = 180$

$z = 180 \cdot (0.6 + 0.75) = 243$

Antw.: Der Landwirt soll 180kg Birnen und 180kg Äpfel zu Süssmost pressen. Dafür bezahlt er € 243.

G.2.1a) (3) $x+2y \leq 45 \rightarrow x_1+2x_2+s_1=45$

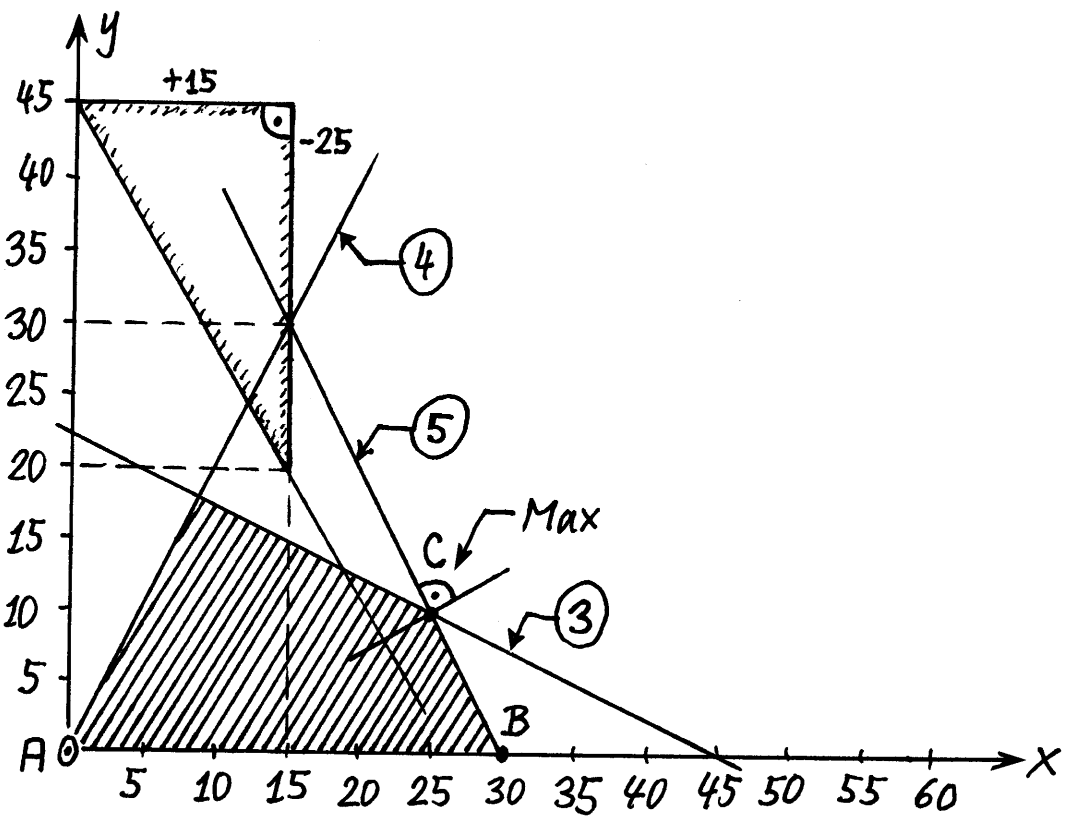
(4) $y \leq 2x \rightarrow -2x+y \leq 0$

$\rightarrow -2x_1+x_2+s_2=0$

(5) $2x+y \leq 60 \rightarrow 2x_1+x_2+s_3=60$

$z=5x_1+3x_2$

Zur Orientierung eine grafische Darstellung



Ausgangs-Tableau

Zeile	z	x_1	x_2	$x_3 = s_1$	$x_4 = s_2$	$x_5 = s_3$	RS	QC
Z1	0	1	2	1	0	0	45	45/1=45
Z2	0	-2	1	0	1	0	0	——
PZ=Z3	0	2	1	0	0	1	60	60/2=30
ZFZ	1	-5	-3	0	0	0	0	

PS

Skalierung der Pivotzeile

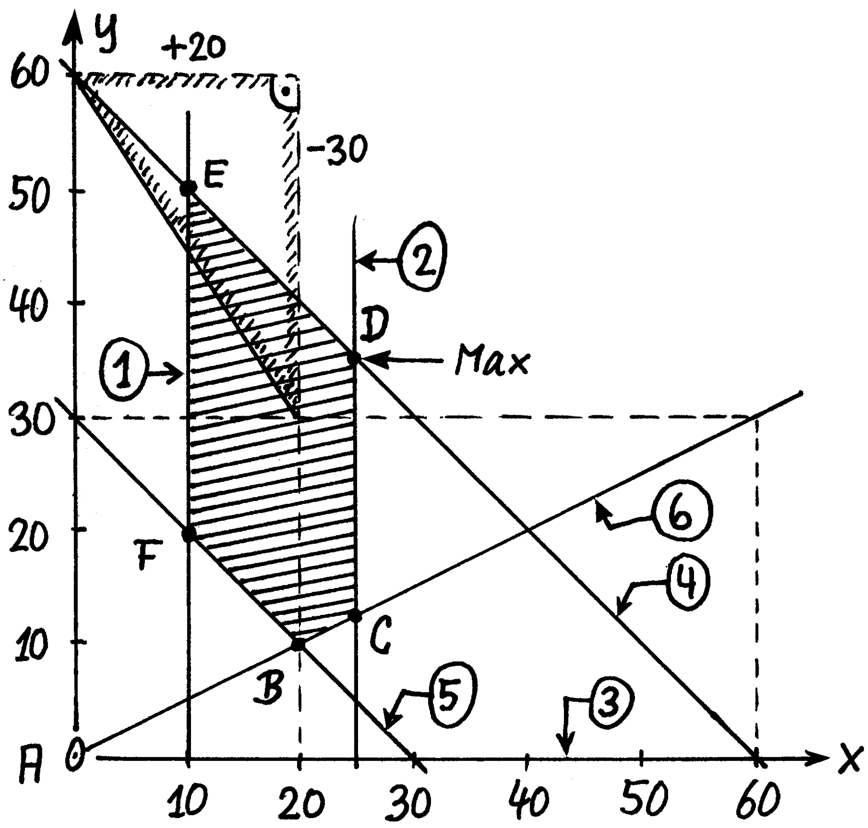
Zeile	z	x_1	x_2	$x_3 = s_1$	$x_4 = s_2$	$x_5 = s_3$	RS	QC
Z1	0	1	2	1	0	0	45	
Z2	0	−2	1	0	1	0	0	
PZ = Z3	0	1	1/2	0	0	1/2	30	
ZFZ	1	−5	−3	0	0	0	0	

2. Simplex-Tableau (nach dem 1. Iterationsschritt)

Zeile	z	x_1	x_2	$x_3 = s_1$	$x_4 = s_2$	$x_5 = s_3$	RS	QC
Z1 − PZ → Z1	0	0	3/2	1	0	−1/2	15	
Z2 + PZ → Z2	0	0	2	0	1	1	60	
Z3	0	1	1/2	0	0	1/2	30	
ZFZ + 5·PZ → ZFZ	1	0	−1/2	0	0	5/2	150	

Zuläss Basislösung: $x_1 = 30$, $x_2 = 0$, $x_3 = 15$, $x_4 = 60$, $x_5 = 0$, $z = 150$ (Punkt B)

G.2.1b)



(1) $x \geq 10 \rightarrow x_1 - s_1 = 10$

(2) $x \leq 25 \rightarrow x_1 + s_2 = 25$

(4) $x + y \leq 60 \rightarrow x_1 + x_2 + s_3 = 60$

(5) $x + y \geq 30 \rightarrow x_1 + x_2 - s_4 = 30$

(6) $2y \geq x \rightarrow x - 2y \leq 0 \rightarrow x_1 - 2x_2 + s_5 = 0$

$z = 3x_1 + 2x_2$

Pivotzeile Pivotspalte Ausgangs-Tableau

Zeile	z	x_1	x_2	$x_3 = s_1$	$x_4 = s_2$	$x_5 = s_3$	$x_6 = s_4$	$x_7 = s_5$	RS	QC
Z1	0	1	0	-1	0	0	0	0	10	• 10/1 = 10
Z2	0	1	0	0	1	0	0	0	25	25/1 = 25
Z3	0	1	1	0	0	1	0	0	60	60/1 = 60
Z4	0	1	1	0	0	0	-1	0	30	30/1 = 30
Z5	0	1	-2	0	0	0	0	1	0	0/1 = 0
ZFZ	1	-3	-2	0	0	0	0	0	0	

Basislösung: $x_1 = x_2 = 0, s_1 = -10, s_2 = 25, s_3 = 60, s_4 = -30, s_5 = 0; z = 0$

Simplex-Tableau nach dem 1. Iterationsschritt

Zeile	z	x_1	x_2	$x_3 = s_1$	$x_4 = s_2$	$x_5 = s_3$	$x_6 = s_4$	$x_7 = s_5$	RS	QC
PZ = Z1	0	1	0	-1	0	0	0	0	10	$\times$
Z2-PZ → Z2	0	0	0	1	1	0	0	0	15	15
Z3-PZ → Z3	0	0	1	1	0	1	0	0	50	50
Z4-PZ → Z4	0	0	1	1	0	0	-1	0	20	20
Z5-PZ → Z5	0	0	-2	1	0	0	0	1	-10	$\times$
ZFZ + 3·PZ → ZFZ	1	0	-2	-3	0	0	0	0	30	

Basislösung: $x_1 = 10, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 15, s_3 = 50, s_4 = 20, s_5 = -10; z = 30$