

Anwendung der Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

DMK/DPK S.82

Beispiel: $y' + \frac{2y}{1-x^2} = 1-x$, $y(0) = \frac{1}{2}$

Die vollständige Lösung von $y' + u(x) \cdot y = v(x)$ ist

$$y(x) = [G(x) + C] e^{-U(x)},$$

wobei

$$U(x) = \int u(x) dx$$

$$G(x) = \int v(x) e^{U(x)} dx$$

Im obigen Beispiel $u(x) = \frac{2}{1-x^2}$

$$v(x) = 1-x$$

$$U(x) = 2 \int \frac{dx}{1-x^2} = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad \text{DMK/DPK S.73 (ohne Integrationskonst.!)}$$

$$G(x) = \int (1-x) e^{\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|} dx = \int (1-x) \frac{1+x}{1-x} dx = \int (1+x) dx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^{-U(x)} = e^{-\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|} = \frac{1-x}{1+x} \rightarrow y(x) = \left[\frac{x^2}{2} + x + C \right] \cdot \frac{1-x}{1+x}$$

Randbedingung: $y(0) = [0+0+C] \frac{1-0}{1+0} = C = \frac{1}{2} \rightarrow$

$$y(x) = \frac{1}{2} [x^2 + 2x + 1] \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} (1+x)^2 \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x^2}{2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{1-x^2}{2}}}$$

Übung: Bestimme die Lösung von

$$y' + y \cdot \tan x = \cos x, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

Lösung: $u(x) = \tan x$
 $v(x) = \cos x$

$$U(x) = \int u(x) dx = \int \tan x dx = -\ln |\cos x|$$

$$G(x) = \int \cos x \cdot e^{-\ln |\cos x|} dx = x$$

$$y(x) = [x + C] e^{\ln |\cos x|} = [x + C] \cos x$$

$$y(0) = [0 + C] \cos 0 = C = \frac{\pi}{2} \rightarrow y(x) = \underline{\underline{\left[x + \frac{\pi}{2}\right] \cos x}}$$