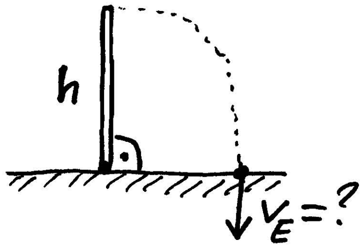
Musterprüfung

A.) Dreh- und Rollbewegung, Massenträgheitsmoment, Drehimpuls (Drehschemelversuche).
B.) Die Lorentzkraft (auf eine Ladung)
C.) Faradaysches Induktionsgesetz
D.) Boxplot zur grafischen Darstellung von Stichproben
E.) Erwartungswert und Standardabweichung einer Stichprobe. Lineare Regression
F.) Zerlegung eines Bruchs in Stammbrüche
G.) Zinseszins, inkl. unterjährige und stetige Verzinsung
H.) Geometrische Reihen bei der Rentenrechnung
I.) Abspaltung eines Linearfaktors von einem Polynom mit dem Horner-Schema
J.) Den ggT von zwei Zahlen mit dem euklidschen Algorithmus berechnen.
K.) Eulersches Polygonzug-Verfahren, inklusive „Ablesen" des stationären Zustands.

A.1) Auf einer Minigolfbahn muss ein Ball (Vollkugel) rollend einen 35cm hohen Hügel überwinden. Welche Anfangsgeschwindigkeit ist hierfür erforderlich?

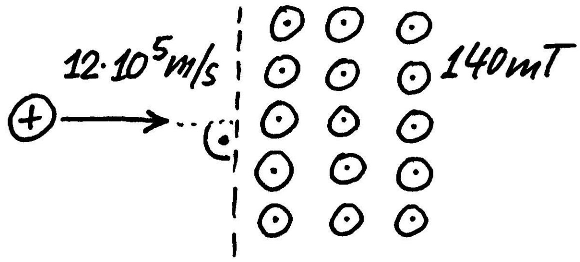
A.2) Mit welcher Geschwindigkeit trifft das obere Ende eines 95cm langen Stabs ($h = 95cm$) bei einem Drehfall auf den Boden?



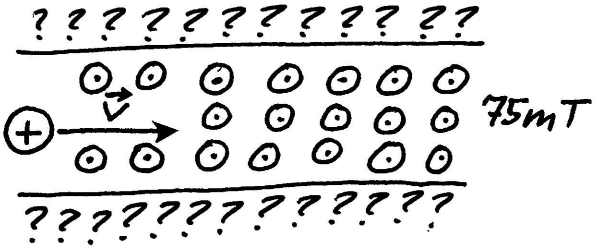
A.3) Ein Schüler sitzt auf einem Drehschemel. Die Professorin überreicht ihm ein schnell rotierendes Schwungrad mit der Drehachse horizontal. Der Schüler hebt das Schwungrad über seinen Kopf, mit der Drehachse nunmehr vertikal. Was geschieht beim Drehen der Drehachse? Begründe!

B.1) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotieren geladene Teilchen mit einer Ladung $+e$ und einer Masse von 235u in einem homogenen Magnetfeld mit einer magnetischen Flussdichte von 80mT?

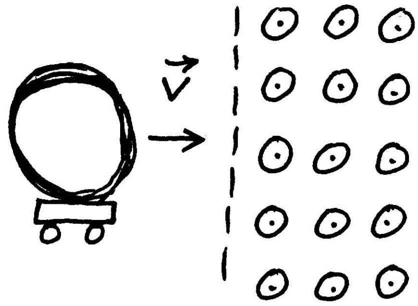
B.2) Das Teilchen mit der Masse 235u und der Ladung $+e$ trifft senkrecht auf ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Flussdichte 140mT. Beschreibe (quantitativ) die Bewegung des Teilchens im Magnetfeld.



B.3) Wie gross muss die elektrische Feldstärke in einem Wienschen Geschwindigkeitsfilter mit einer magnetischen Flussdichte von 75mT sein, damit ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit von $5.0 \cdot 10^5$ m/s geradeaus fliegt? Ist dann die untere oder die obere Kondensatorplatte positiv geladen?



C.1) Eine Helmholtz-Spule mit 200 Windungen und einem Durchmesser von 18cm trifft mit einer Geschwindigkeit v von 2.4 m/s senkrecht auf ein homogenes Magnetfeld der magn. Flussdichte 170mT.



a) Skizziere schematisch den zeitlichen Verlauf der in der Spule induzierten Spannung.

b) Welche maximale Spannung wird in der Spule induziert?

C.2) Eine schlanke 40cm lange Spule hat 500 Windungen. Sie sei supraleitend, d.h. ihr ohmscher Widerstand sei vernachlässigbar und es sei $A = 50\,cm^2$.

a) Wie gross ist die Induktivität der Spule?

b) Wie rasch steigt die Stromstärke in der Spule, wenn sie an eine Gleichspannung von 6V angeschlossen wird?

c) Die Spule wird rasch in ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Flussdichte 96mT eingetaucht. Die Richtung des Magnetfelds ist parallel zur Spulenachse. Die Spule sei kurzgeschlossen.

c.1) Wie gross ist die Stromstärke in der Spule, wenn sie vollständig im Magnetfeld eingetaucht ist. Hier soll die Veränderung des magnetischen Flusses durch Selbstinduktion, d.h. durch den Strom in der Spule, vernachlässigt werden.

c.2) Wenn man die im Teil c.1) verwendete Stromstärke verwendet, um welchen Faktor ist dann das äussere Magnetfeld stärker als das durch den Stromfluss im Innern der Spule erzeugte Magnetfeld?

c.3) Wenn die Spule kurzgeschlossen ist, kann man dann die durch den induzierten Strom verursachte Veränderung des magnetischen Flusses vernachlässigen?

D.1) Stelle die Stichprobe $x \in \{37, 41, 32, 35, 40, 36, 35, 39, 38, 37, 36, 34, 39, 37\}$ als Boxplot grafisch dar.

E.1) Für die Stichprobe $x \in \{44, 49, 42, 51, 48, 42\}$ berechne die Grössen

$$S_x = \sum_j x_j\,, \quad S_{xx} = \sum_j x_j^2 \quad \text{und} \quad \bar{x} = \frac{1}{6} S_x$$

Berechne daraus die empirische Standardabweichung s wie folgt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_j (x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[\sum_j x_j^2 - 2\bar{x} \sum_j x_j + (\bar{x})^2 \sum_j 1\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}\left[S_{xx} - 2\bar{x}\cdot(n\cdot\bar{x}) + (\bar{x})^2\cdot n\right]} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[S_{xx} - n(\bar{x})^2\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}\left[S_{xx} - \frac{1}{n}(S_x)^2\right]}, \text{ wobei } n = 6.$$

Hinweis: Berechne S_x und S_{xx} mit einer „Statistikfunktion" des Taschenrechners.

E.2) Für die fünf Wertepaare $(x_j|y_j)$ wie folgt:

j	1	2	3	4	5
x_j	31	34	27	32	36
y_j	45	49	41	48	52

berechne die Grössen

$$S_x = \sum_j x_j \quad \text{und} \quad S_y = \sum_j y_j$$

$$S_{xx} = \sum_j x_j^2 \quad \text{und} \quad S_{yy} = \sum_j y_j^2$$

$$S_{xy} = \sum_j x_j y_j$$

Berechne daraus die Standardabweichungen s_x und s_y wie folgt:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[S_{xx} - \frac{1}{n}(S_x)^2\right]}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[S_{yy} - \frac{1}{n}(S_y)^2\right]}$$

mit $n = 5$. (Herleitung siehe vorherige Aufgabe!)
Für die Kovarianz gilt

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_j (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[\sum_j x_j y_j - \bar{y} \sum_j x_j - \bar{x} \sum_j y_j + \bar{x} \cdot \bar{y} \sum_j 1 \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[S_{xy} - \frac{S_y}{n} \cdot S_x - \frac{S_x}{n} S_y + \frac{S_x}{n} \cdot \frac{S_y}{n} \cdot n \right]$$

$$\rightarrow \quad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \left[S_{xy} - \frac{1}{n} S_x \cdot S_y \right]$$

Berechne mithilfe dieser Formel die Kovarianz für obige Stichprobe.

Berechne aus der Kovarianz und den Standardabweichungen den Korrelationskoeffizienten r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

F.1) Zerlege

a) 3/7

b) 163/700

in Stammbrüche

G.1) Ein Geschäftskredit von € 80'000 soll mit einem Nominalzinssatz von 4.5% p.a. und einer Laufzeit von 3 Jahren vergeben werden. Bei Fälligkeit soll der Kredit mitsamt Zinseszins kapitalisiert werden. Welcher Betrag muss ausbezahlt werden bei

a) jährlicher Verzinsung?

b) unterjähriger Verzinsung mit gleichen Zinsperioden von einem Monat?

c) stetiger Verzinsung?

H.1) Herr Zbinden nimmt einen Geschäftskredit von CHF 200'000 auf, den er mit 20 nachschüssigen Raten zurückzahlen will. Berechne die Jahresraten für einen Nominalzinssatz von 4% p.a.

I.1) Die kubische Gleichung $4x^3-16x^2+cx+c=0$ hat eine Lösung $x_1=3$.

a) Wie gross ist dann der Parameter c?

b) Entsprechend der Lösung x_1 soll vom kubischen Polynom der Linearfaktor $x-3$ mit dem Horner-Schema abgespalten werden.

Hinweis: Lösungen, die durch Polynomdivision gefunden wurden, werden nicht bewertet.

J.1) Berechne den ggT der zwei Zahlen

a) 420 und 532

b) 2310 und 2625

mit dem euklidschen Algorithmus.

Hinweis: Lösungen, die ohne Zuhilfenahme des euklidschen Algorithmus gefunden wurden, werden nicht bewertet.

K.1)

Die Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\dot{x}(t) = 0.4\cdot x(t) - 14y(t)$$
$$\dot{y}(t) = 0.02\cdot x(t) - 0.2y(t)$$

sollen die Populationen von Räuber- und Beutetieren simulieren. Dabei sei $x(t)$ die Anzahl Beutetiere und $y(t)$ sei die Anzahl Raubtiere.

Für die Anfangsbedingungen $x(0)=6000$ und $y(0)=200$ berechne mit dem eulerschen Polygonzug-Verfahren mit einer Schrittweite $\Delta t=0.5$ die Werte für $x(t)$ und $y(t)$ für $t_1=0.5$, $t_2=1$, $t_3=1.5$ und $t_4=2$.

K.2) Beim Öffnen des Fallschirms fällt ein Fallschirmspringer mit Masse m mit einer Fallgeschwindigkeit v. Auf den Fallschirmspringer wirkt dann eine beschleunigende Kraft F_b wie folgt:

$$F_b = ma = mg - c_W \cdot \frac{\rho_{Luft} \cdot v^2}{2} A$$

Dies ergibt

$$a = \dot{v} = g - c_W \cdot \frac{\rho_{Luft} \cdot v^2}{2m} \cdot A$$

Es sei

$$a = \dot{v} = 10 - 0.4 \cdot v^2$$

a) Wie gross wäre demzufolge die Anfangsverzögerung ($a=?$), wenn der Fallschirm sich bei einer Fallgeschwindigkeit von 90km/h sofort voll entfalten würde?

b) Welche konstante Fallgeschwindigkeit stellt sich ein?

c) Für $v(0)=90\,km/h = 25\,m/s$ und für eine Schrittweite $\Delta t = 0.02s$ berechne die Geschwindigkeiten $v_1 = v(0{,}02s)$, $v_2 = v(0.04s)$, $v_3 = v(0.06s)$, $v_4 = v(0.08s)$ und $v_5 = v(0.1s)$.

Musterlösungen

A.1) $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2=\frac{7}{10}mv^2$

Energiesatz: $mgh=0.7mv^2 \rightarrow gh=0.7v^2$

$v=\sqrt{gh/0.7}=\sqrt{10\cdot 0.35/0.7}\,m/s=\sqrt{5}\,m/s=\underline{\underline{2.24\,m/s}}$

A.2) Energiesatz: $mg\cdot(h/2)=1/2\,J\omega^2$

Satz v. Steiner: $J=J_S+m\cdot(h/2)^2=(mh^2/12)+(mh^2/4)$

$=mh^2(1/12+1/4)=mh^2/3$

$mgh=J\omega^2 \rightarrow mgh=(mh^2/3)\omega^2 \rightarrow 3g=h\omega^2$

$\rightarrow \omega=\sqrt{3g/h}=\sqrt{3\cdot 10/0.95}\,s^{-1}=\underline{\underline{5.6\,s^{-1}}}$

A.3) Der Drehimpuls ist eine Vektorgrösse. Weil der Drehschemel eine vertikale Drehachse hat, kann auf den oberen, beweglichen Teil kein Drehmoment wirken. Somit kann die vertikale Komponente des Drehimpulses nicht verändert werden. Der Drehimpuls des rotierenden Rads wird vertikal ausgerichtet. Weil der Gesamtdrehimpuls in vertikaler Richtung am Anfang offensichtlich null war, muss er, wegen Drehimpulserhaltung auch danach gleich null sein. Dies ist nur möglich, wenn der untere Teil (Schüler) in Gegenrichtung zum Rad rotiert.

B.1) $F_{Zp}=F_L \rightarrow m\omega v=evB \rightarrow m\omega=eB \rightarrow$

$\omega=eB/m=[1.6022\cdot 10^{-19}\cdot 0.080/(235\cdot 1.6605\cdot 10^{-27})]$

$s^{-1}=\underline{\underline{32.8\,s^{-1}}}$

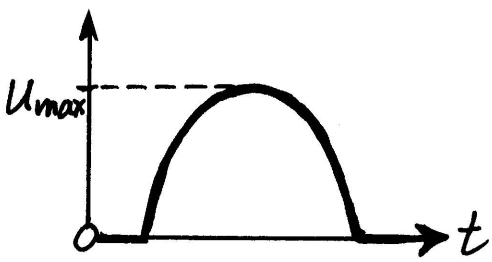
B.2) $mv^2/r=evB \rightarrow r=mv/(eB)=[235\cdot 1.6605\cdot 10^{-27}$

$\cdot 12\cdot 10^5/(1.6022\cdot 10^{-19}\cdot 0.14)]\,m=20.9\,m$

Antwort: Das Teilchen durchläuft einen Halbkreis mit einem Radius von 20.9m mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit von $12\cdot 10^5 m/s$ im Uhrzeigersinn. Danach verlässt das Teilchen das Magnetfeld und fliegt wieder geradeaus.

B.3) $Q\cdot Bv = Q\cdot E \rightarrow E = Bv = 0.075\cdot 5\cdot 10^5 V/m = \underline{\underline{37.5\ kV/m}}$

C.1a)



b) $U_{max} = (-)N\cdot\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = (-)N\cdot\frac{Bd\cdot\Delta s}{\Delta t} = -NBdv = (-)\ 200\cdot 0.17\cdot 2.4 = (-)\ \underline{\underline{81.6V}}$

C.2a) $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 500^2\cdot 50\cdot 0.01^2}{0.4}H = \underline{\underline{3.927mH}}$

b) $U_{ind} = -L\cdot\frac{\Delta I}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{-U_{ind}}{L} = \frac{-6}{3.927}\cdot 10^3 A/s = \underline{\underline{1.53\cdot 10^3 A/s}}$

c.1) $N\cdot\Phi_m = LI \rightarrow I = N\cdot\Phi_m/L = NBA/L = [500\cdot 0.096\cdot 50\cdot 0.01^2/(3.927\cdot 10^{-3})]A = \underline{\underline{61.1A}}$

c.2) $B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 500\cdot 61.1}{0.4}T = \underline{\underline{0.096T}}$

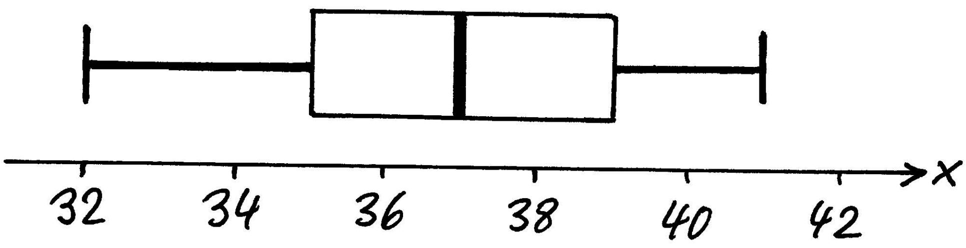
c.3) Das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld wäre gleich stark wie das äussere Magnetfeld. Man kann den Einfluss der Selbstinduktion nicht vernachlässigen wenn die Spule kurzgeschlossen ist.

D.1)

32	34	35	35	36	36	37	37	37	38	39	39	40	41

$\tilde{x}_{1/4}$ $\tilde{x}_{1/2}$ $\tilde{x}_{3/4}$

$\tilde{x} = \tilde{x}_{1/2} = 37$, $\tilde{x}_{1/4} = 35$ und $\tilde{x}_{3/4} = 39$



E.1)

j	1	2	3	4	5	6
x_j	44	49	42	51	48	42
x_j^2	1936	2401	1764	2601	2304	1764

$$S_x = \sum_{j=1}^{6} x_j = 44 + 49 + \cdots + 42 = 276$$

$$S_{xx} = \sum_{j=1}^{6} x_j^2 = 44^2 + 49^2 + \cdots + 42^2 = 12'770$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} S_x = \frac{1}{6} \cdot 276 = 46$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[S_{xx} - \frac{1}{n}(S_x)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[12'770 - \frac{1}{6} \cdot 276^2\right]}$$

$$s = \sqrt{14.8} = \underline{\underline{3.847}}$$

E.2)

j	x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j \cdot y_j$
1	31	45	961	2025	1395
2	34	49	1156	2401	1666
3	27	41	729	1681	1107
4	32	48	1024	2304	1536
5	36	52	1296	2704	1872
$\Sum$	160	235	5166	11'115	7576

	$\uparrow$ S_x	$\uparrow$ S_y	$\uparrow$ S_{xx}	$\uparrow$ S_{yy}	$\uparrow$ S_{xy}

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[S_{xx} - \frac{1}{n}(S_x)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left[5166 - \frac{1}{5}\cdot 160^2\right]}$$
$$= \sqrt{11.5} = \underline{\underline{3.391}}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[S_{yy} - \frac{1}{n}(S_y)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left[11'115 - \frac{1}{5}\cdot 235^2\right]}$$
$$= \sqrt{17.5} = \underline{\underline{4.183}}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[S_{xy} - \frac{1}{n}S_x \cdot S_y\right] = \frac{1}{5-1}\left[7576 - \frac{1}{5}\cdot 160\cdot 235\right]$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 56 = \underline{\underline{14}}$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{14}{\sqrt{11.5\cdot 17.5}} = \frac{14}{\sqrt{805/4}} = \sqrt{\frac{112}{115}} = \underline{\underline{0.987}}$$

F.1a) $\frac{3}{7} = \underline{\underline{\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}}}$

b) $\frac{163}{700} = \underline{\underline{\frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \frac{1}{350} + \frac{1}{700}}}$

G.1a) $K_3 = K_0 \cdot (1.045)^3 = € 80'000 \cdot 1.045^3 = \underline{\underline{€ 91'293}}$

b) $K_{36} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{4.5/12}{100}\right)^{3\cdot 12} = K_0 \cdot 1.00375^{36} =$
$€ 80'000 \cdot 1.00375^{36} = \underline{\underline{€ 91'539}}$

c) $q = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4.5/n}{100}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{0.045}{n}\right)^n = e^{0.045}$
$K_{3s} = K_0 \cdot (e^{0.045})^3 = K_0 \cdot e^{0.135} = € 80'000 \cdot$
$e^{0.135} = \underline{\underline{€ 91'563}}$

H.1) $200'000 \cdot q^{20} = \underbrace{R\cdot q^{19} + R\cdot q^{18} + \dots + R\cdot q + R}_{\text{geometr. Reihe}}$
$q = 1.04$

$$200'000 \cdot q^{20} = R \cdot \frac{1-q^{20}}{1-q} \rightarrow R = \frac{200'000 \cdot (1-q) \cdot q^{20}}{1-q^{20}}$$

$$R = \frac{200'000 \cdot (-0.04) \cdot 1.04^{20}}{1-1.04^{20}} = 14'716$$

<u>Antwort:</u> Die Rate beträgt $\underline{\underline{\text{CHF } 14'716}}$

I.1a) $4 \cdot 3^3 - 16 \cdot 3^2 + 3c + c = 4c - 36 = 0 \rightarrow \underline{\underline{c = 9}}$

b) $4x^3 - 16x^2 + 9x + 9 = 0$

4	−16	9	9
	⊕ 12	⊕ −12	⊕ −9
4	·3 −4	·3 −3	·3 0

$$\underline{\underline{4x^2 - 4x - 3 = 0}}$$

J.1a)

$532 \bmod 420 = 112$
$420 \bmod 112 = 84$
$112 \bmod 84 = 28$
$84 \bmod 28 = \boxed{0} \rightarrow ggT(420, 532) = \underline{\underline{28}}$
$\quad \hookrightarrow ggT$

b)

$2625 \bmod 2310 = 315$
$2310 \bmod 315 = 105$
$315 \bmod 105 = \boxed{0} \rightarrow ggT(2310, 2625) = \underline{\underline{105}}$
$\quad \hookrightarrow ggT$

K.1) $x_{n+1} \leftarrow x_n + \Delta t[0.4x_n - 14y_n]$

$y_{n+1} \leftarrow y_n + \Delta t[0.02x_n - 0.2y_n]$

$\Delta t = 0.5$:

$x_{n+1} \leftarrow x_n + 0.2x_n - 7y_n$

$y_{n+1} \leftarrow y_n + 0.01x_n - 0.1y_n$

n	t_n	x_n	y_n	$0.2x_n - 7y_n$	$0.01x_n - 0.1y_n$
0	0	6000	200	−200	40
1	0.5s	5800	240	−520	34
2	1s	5280	274	−862	25.4
3	1.5s	4418	299.4	−1212	14.2
4	2s	3205.8	313.64		

K. 2a) $a = [10 - 0.4(90/3.6)^2]\,m/s^2 = \underline{\underline{-240\,m/s^2}}$

b) $a = \dot{v} = 0 = 10 - 0.4v^2 \rightarrow 0.4v^2 = 10 \rightarrow v^2 = 25 \rightarrow$
$v = \underline{\underline{5\,m/s}} = \underline{\underline{18\,km/h}}$

c) $v_{n+1} \leftarrow v_n + \Delta t[10 - 0.4v_n^2]$

$\Delta t = 0.02s$: $v_{n+1} \leftarrow v_n + 0.2 - 0.008v_n^2$

n	t_n	v_n	$0.2 - 0.08 \cdot v_n^2$
0	0	25	−4.8
1	0.02s	20.2	−3.0643
2	0.04s	17.14	−2.1491
3	0.06s	14.99	−1.5968
4	0.08s	13.39	−1.2343
5	0.1s	12.16	