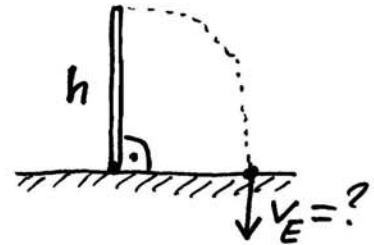


Musterprüfung

- A.) Dreh- und Rollbewegung, Massenträgheitsmoment, Drehimpuls (Drehschemelversuche).
- B.) Die Lorentzkraft (auf eine Ladung)
- C.) Faradaysches Induktionsgesetz
- D.) Boxplot zur grafischen Darstellung von Stichproben
- E.) Erwartungswert und Standardabweichung einer Stichprobe. Lineare Regression
- F.) Zerlegung eines Bruchs in Stammbrüche
- G.) Zinseszins, inkl. unterjährige und stetige Verzinsung
- H.) Geometrische Reihen bei der Rentenrechnung
- I.) Abspaltung eines Linearfaktors von einem Polynom mit dem Horner-Schema
- J.) Den ggT von zwei Zahlen mit dem euklidischen Algorithmus berechnen.
- K.) Eulersches Polygonzug-Verfahren, inklusive „Ablesen“ des stationären Zustands.
- L. Richtungsfelder von Differentialgleichungen erster Ordnung
- M. Methode der kleinsten Quadrate, lineare Regression
- N. Konfidenzintervall für den Erfolgsparameter bei Binomialverteilungen
- O. Harmonische Schwingungen und Wellen
- P. Wärmelehre
- Q. Atomphysik

A.1) Auf einer Minigolfbahn muss ein Ball (Vollkugel) rollend einen 35cm hohen Hügel überwinden. Welche Anfangsgeschwindigkeit ist hierfür erforderlich?

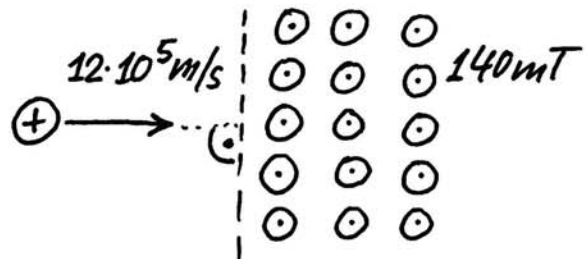
A.2) Mit welcher Geschwindigkeit trifft das obere Ende eines 95cm langen Stabs ($h=95\text{cm}$) bei einem Drehfall auf den Boden?

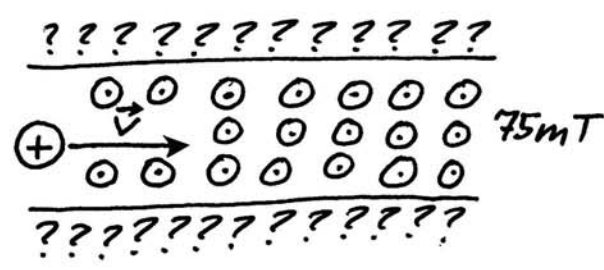


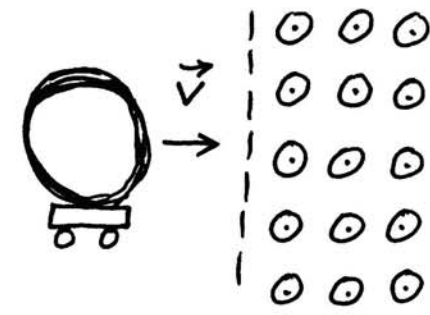
A.3) Ein Schüler sitzt auf einem Drehschemel. Die Professorin überreicht ihm ein schnell rotierendes Schwungrad mit der Drehachse horizontal. Der Schüler hebt das Schwungrad über seinen Kopf, mit der Drehachse nunmehr vertikal. Was geschieht beim Drehen der Drehachse? Begründe!

B.1) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotieren geladene Teilchen mit einer Ladung $+e$ und einer Masse von $235u$ in einem homogenen Magnetfeld mit einer magnetischen Flussdichte von 80mT ?

B.2) Das Teilchen mit der Masse $235u$ und der Ladung $+e$ trifft senkrecht auf ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Flussdichte 140mT . Beschreibe (quantitativ) die Bewegung des Teilchens im Magnetfeld.



- B.3) Wie gross muss die elektrische Feldstärke in einem Wienschen Geschwindigkeitsfilter mit einer magnetischen Flussdichte von 75 mT sein, damit ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit von $5.0 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ geradeaus fliegt? Ist dann die untere oder die obere Kondensatorplatte positiv geladen?
- 

- C.1) Eine Helmholtz-Spule mit 200 Windungen und einem Durchmesser von 18 cm trifft mit einer Geschwindigkeit v von 2.4 m/s senkrecht auf ein homogenes Magnetfeld der magn. Flussdichte 170 mT .
- 

- Skizziere schematisch den zeitlichen Verlauf der in der Spule induzierten Spannung.
 - Welche maximale Spannung wird in der Spule induziert?
- C.2) Eine schlanke 40 cm lange Spule hat 500 Windungen. Sie sei supraleitend, d.h. ihr ohmscher Widerstand sei vernachlässigbar und es sei $A = 50 \text{ cm}^2$.
- Wie gross ist die Induktivität der Spule?
 - Wie rasch steigt die Stromstärke in der Spule, wenn sie an eine Gleichspannung von 6 V angeschlossen wird?

c) Die Spule wird rasch in ein homogenes Magnetfeld der magnetischen Flussdichte 96 mT eingetaucht. Die Richtung des Magnetfelds ist parallel zur Spulenachse. Die Spule sei kurzgeschlossen.

c.1) Wie gross ist die Stromstärke in der Spule, wenn sie vollständig im Magnetfeld eingetaucht ist. Hier soll die Veränderung des magnetischen Flusses durch Selbstinduktion, d.h. durch den Strom in der Spule, vernachlässigt werden.

c.2) Wenn man die im Teil c.1) verwendete Stromstärke verwendet, um welchen Faktor ist dann das äussere Magnetfeld stärker als das durch den Stromfluss im Inneren der Spule erzeugte Magnetfeld?

c.3) Wenn die Spule kurzgeschlossen ist, kann man dann die durch den induzierten Strom verursachte Veränderung des magnetischen Flusses vernachlässigen?

D.1) Stelle die Stichprobe $x \in \{37, 41, 32, 35, 40, 36, 35, 39, 38, 37, 36, 34, 39, 37\}$ als Boxplot grafisch dar.

E.1) Für die Stichprobe $x \in \{44, 49, 42, 51, 48, 42\}$ berechne die Grössen

$$S_x = \sum_j x_j, \quad S_{xx} = \sum_j x_j^2 \quad \text{und} \quad \bar{x} = \frac{1}{6} S_x$$

Berechne daraus die empirische Standardabweichung s wie folgt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_j (x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \left[\sum_j x_j^2 - 2\bar{x} \sum_j x_j + (\bar{x})^2 \sum_j 1 \right]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1}{5} [S_{xx} - 2\bar{x} \cdot (n \cdot \bar{x}) + (\bar{x})^2 \cdot n]} = \sqrt{\frac{1}{5} [S_{xx} - n(\bar{x})^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{5} [S_{xx} - \frac{1}{n} (S_x)^2]}, \text{ wobei } n=6.
 \end{aligned}$$

Hinweis: Berechne S_x und S_{xx} mit einer „Statistikfunktion“ des Taschenrechners.

E.2) Für die fünf Wertepaare $(x_j|y_j)$ wie folgt:

j	1	2	3	4	5
x_j	31	34	27	32	36
y_j	45	49	41	48	52

berechne die Grössen

$$S_x = \sum_j x_j \quad \text{und} \quad S_y = \sum_j y_j$$

$$S_{xx} = \sum_j x_j^2 \quad \text{und} \quad S_{yy} = \sum_j y_j^2$$

$$S_{xy} = \sum_j x_j y_j$$

Berechne daraus die Standardabweichungen s_x und s_y wie folgt:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} [S_{xx} - \frac{1}{n} (S_x)^2]}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} [S_{yy} - \frac{1}{n} (S_y)^2]}$$

mit $n=5$. (Herleitung siehe vorherige Aufgabe!)
Für die Kovarianz gilt

$$\begin{aligned}
 s_{xy} &= \frac{1}{n-1} \sum_j (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_j x_j y_j - \bar{y} \sum_j x_j - \bar{x} \sum_j y_j + \bar{x} \cdot \bar{y} \sum_j 1 \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[S_{xy} - \frac{S_y}{n} \cdot S_x - \frac{S_x}{n} S_y + \frac{S_x}{n} \cdot \frac{S_y}{n} \cdot n \right] \\
 &\rightarrow s_{xy} = \frac{1}{n-1} \left[S_{xy} - \frac{1}{n} S_x \cdot S_y \right]
 \end{aligned}$$

Berechne mithilfe dieser Formel die Kovarianz für obige Stichprobe.

Berechne aus der Kovarianz und den Standardabweichungen den Korrelationskoeffizienten r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

F.1) Zerlege

a) $3/7$

b) $163/700$

in Stammbrüche

G.1) Ein Geschäftskredit von € 80'000 soll mit einem Nominalzinssatz von 4.5% p.a. und einer Laufzeit von 3 Jahren vergeben werden. Bei Fälligkeit soll der Kredit mitsamt Zinseszins kapitalisiert werden. Welcher Betrag muss ausbezahlt werden bei

a) jährlicher Verzinsung?

b) unterjährlicher Verzinsung mit gleichen Zinsperioden von einem Monat?

c) stetiger Verzinsung?

H.1) Herr Zbinden nimmt einen Geschäftskredit von CHF 200'000 auf, den er mit 20 nachschüssigen Raten zurückzahlen will. Berechne die Jahresraten für einen Nominalzinssatz von 4% p.a.

I.1) Die kubische Gleichung $4x^3 - 16x^2 + cx + c = 0$ hat eine Lösung $x_1 = 3$.

a) Wie gross ist dann der Parameter c ?

b) Entsprechend der Lösung x_1 soll vom kubischen Polynom der Linearfaktor $x - 3$ mit dem Horner-Schema abgespalten werden.

Hinweis: Lösungen, die durch Polynomdivision gefunden wurden, werden nicht bewertet.

J.1) Berechne den ggT der zwei Zahlen

a) 420 und 532

b) 2310 und 2625

mit dem euklidischen Algorithmus.

Hinweis: Lösungen, die ohne Zuhilfenahme des euklidischen Algorithmus gefunden wurden, werden nicht bewertet.

K.1)

Die Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\dot{x}(t) = 0.4 \cdot x(t) - 14 y(t)$$

$$\dot{y}(t) = 0.02 \cdot x(t) - 0.2 y(t)$$

sollen die Populationen von Räuber- und Beutetieren simulieren. Dabei sei $x(t)$ die Anzahl Beutetiere und $y(t)$ sei die Anzahl Raubtiere.

Für die Anfangsbedingungen $x(0) = 6000$ und $y(0) = 200$ berechne mit dem eulerschen Polygonzug-Verfahren mit einer Schrittweite $\Delta t = 0.5$ die Werte für $x(t)$ und $y(t)$ für $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1.5$ und $t_4 = 2$.

K.2) Beim Öffnen des Fallschirms fällt ein Fallschirmspringer mit Masse m mit einer Fallgeschwindigkeit v . Auf den Fallschirmspringer wirkt dann eine beschleunigende Kraft F_R wie folgt:

$$F_R = ma = mg - c_w \cdot \frac{\rho_{\text{Luft}} \cdot v^2}{2} A$$

Dies ergibt

$$a = \dot{v} = g - c_w \cdot \frac{\rho_{\text{Luft}} \cdot v^2}{2m} \cdot A$$

Es sei $a = \dot{v} = 10 - 0.4 \cdot v^2$

a) Wie gross wäre demzufolge die Anfangsverzögerung ($a = ?$), wenn der Fallschirm sich bei einer Fallgeschwindigkeit von 90 km/h sofort voll entfalten würde?

b) Welche konstante Fallgeschwindigkeit stellt sich ein?

c) Für $v(0) = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$ und für eine Schrittweite $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ berechne die Geschwindigkeiten $v_1 = v(0.02 \text{ s})$, $v_2 = v(0.04 \text{ s})$, $v_3 = v(0.06 \text{ s})$, $v_4 = v(0.08 \text{ s})$ und $v_5 = v(0.1 \text{ s})$.

- L.1) Berechne die Steigung von $(x+1)y' - xy^2 = x^2$ in den Punkten $A(\frac{1}{3})$ und $B(\frac{2}{-3})$.
- L.2) Skizziere das Richtungsfeld im 1. Quadranten in den neun Punkten mit x -Koordinaten $x \in \{1, 2, 3\}$ und y -Koordinaten $y \in \{1, 2, 3\}$ von $5xy' + 3y = 2x^2$
- M.1) Bestimme den Korrelationskoeffizienten und die Regressionsgerade für die vier Wertepaare

j	1	2	3	4
x_j	3	6	8	11
y_j	7	10	11	16

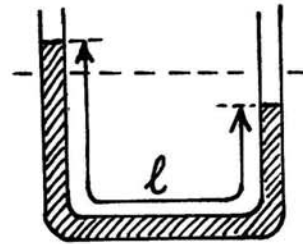
- N.1) Ein Nahrungsmittelkonzern hat das Rezept für ein Fertiggericht abgeändert. Von 37 Probanden beurteilten 21 das neue Rezept als eine Verbesserung. Bestimme das Konfidenzintervall für den Anteil an Probanden, die Gefallen finden am neuen Rezept, auf einem Signifikanzniveau von 0.05.
- N.2) Der Stichprobenumfang einer binomialverteilten Zufallsgrösse sei 45. Für welche Werte von p kann die Zufallsgrösse als normalverteilt betrachtet werden?
- O.1) Eine mechanische harmonische Schwingung hat eine Amplitude von $2.4 \mu\text{m}$ und eine Frequenz von 605 Hz.
- a) Wie gross ist die Periodendauer der Schwingung?
- b) Zur Zeit $t=0$ ist die momentane Auslenkung aus der Gleichgewichtslage maximal. Wie lange dauert es danach bis die Auslenkung nur noch $1.0 \mu\text{m}$ misst?

- 0.2) Das Pendel einer Pendeluhr ist zusammengesetzt aus einem 42cm langen dünnen, 80g schweren Metallstab und einer zylindrischen, 120g schweren Scheibe mit einem Durchmesser von 8cm. Mit welcher Eigenfrequenz schwingt das Pendel?



- 0.3) Die reduzierte Pendellänge eines physikalischen Pendels ist gleich der Länge eines mathematischen Pendels mit der gleichen Frequenz wie das physikalische Pendel. Ein 84cm langer dünner Stab schwingt an einem Stabende hängend. Wie gross ist die reduzierte Pendellänge dieses Pendels?

- 0.4) Die schwingende Wassersäule eines so genannten Wasserpendels hat eine Länge l von 92cm. Die Bewegungsgleichung eines Wasserpendels ist
- $$\ddot{y}(t) + \frac{2g}{l} y(t) = 0$$

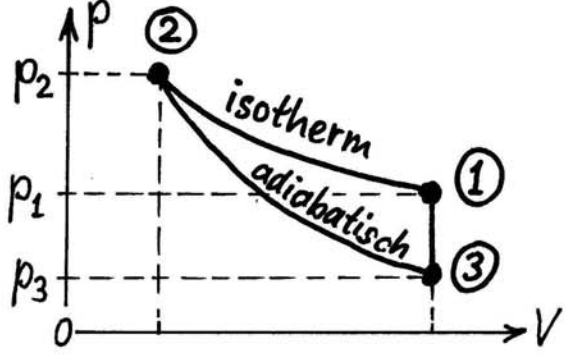


Dabei ist g die Fallbeschleunigung. Mit welcher Frequenz schwingt das Wasserpendel?

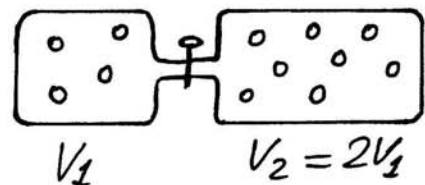
- 0.5) Zur Zeit $t = 0$ befindet sich ein mechanischer harmonischer Oszillator in einem Umkehrpunkt. Nach 1.9ms hat sich die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage auf die Hälfte reduziert. Mit welcher Frequenz schwingt der Oszillator?

- 0.6) Ein Schwimmer schwimmt mit einer Geschwindigkeit von 0.52m/s vom Strand weg. Wellenberge, die auf ihn treffen liegen 42cm höher als Wellentäler. Der Abstand zwischen benachbarten Wellenbergen misst 7.2 m. In Zeitabständen von 1.8s befindet sich der Schwim-

mer auf einem Wellenberg

- Mit welcher Relativgeschwindigkeit nähern sich Wellenberge dem Schwimmer?
 - Wie gross ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen?
 - Stelle die Wasserwellen in der Form $y(x, t) = \hat{y} \cdot \sin(kx - \omega t)$ [mit dem Strand als Bezugssystem] mathematisch dar.
- P.1) Wie gross ist die Dichte von Wasserdampf ($M = 18 \text{ g/mol}$) bei Normdruck und einer Temperatur von 100°C ? Die Berechnung soll auf der Molmasse von Wasser und physikalischen Konstanten beruhen.
- P.2) Stickstoff (N_2 , $\gamma = 1.4$) von 20°C wird bei einer Temperatur von 20°C isotherm auf einen Viertel seines ursprünglichen Volumens komprimiert. Danach wird sein Volumen bis zum ursprünglichen adiabatisch expandiert. Der anfängliche Druck war 1 bar. Wie gross ist der Druck nach der isothermen Expansion und wie gross sind Druck und Temperatur nach der nachfolgenden adiabatischen Expansion?
- 
- P.3) Wie gross ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit von He-4-Atomen bei einer Temperatur von 27°C ? Mit welcher Zentripetalkraft würde das Atom bei dieser Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit einem Durchmesser von 7 cm gehalten? Bei welcher Temperatur entspricht die mittlere Geschwindigkeit der Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche von 11.2 km/s ?

- P.4) Von einem Körper mit einer Temperatur von 27°C werden 23mJ Wärme auf einen Körper mit einer Temperatur von 100°C übertragen. Bestimme mithilfe der thermodynamischen Definition der Entropie die Veränderung der Entropie in den beiden Körpern. Bei der Übertragung dieser geringen Menge Wärme sollen sich die Temperaturen nur unwesentlich ändern. Die Entropieänderungen sollen mit den richtigen Vorzeichen angegeben werden. Die beiden Körper bilden gemeinsam ein abgeschlossenes System. Bestimme die Veränderung der Entropie in diesem abgeschlossenen System. Würde diese Wärmeübertragung spontan, ohne äussere Einwirkung ablaufen? Begründe!
- P.5) Eine Wärmekraftmaschine nutzt Temperaturunterschiede zwischen Oberflächen- und Tiefenwasser tropischer Meere. Wie viel Prozent der aufgenommenen Wärme kann diese Maschine höchstens in mechanische Energie verwandeln, wenn das Oberflächenwasser eine Temperatur von 22°C aufweist und die Temperatur des Tiefenwassers 14°C tiefer liegt?
- P.6) In zwei verbundenen Gefässen befinden sich 12 Gasteilchen. Acht der 12 Gasteilchen befinden sich im grösseren Gefäss dessen Volumen doppelt so gross ist wie dasjenige des kleineren Gefässes. Der Maxwell'sche Dämon betätigt ein Ventil im Verbindungsschlauch zwischen den Gefässen und erreicht dadurch, dass sich alle zwölf Gasteilchen im kleineren Gefäss befinden. Wie gross ist die Verminderung der Entropie?



P.7) Wie gross ist die Temperatur der Sonnenoberfläche wenn man sie als Schwarzen Strahler betrachtet und das Maximum der Intensität der Sonnenstrahlung bei einer Wellenlänge von 450 nm liegt?

P.8) Ein Metallwürfel befindet sich im Abstand der Erdbahnbahn von der Sonne. Eine Würfelfläche ist der Sonne zugewandt. Das Sonnenlicht fällt senkrecht auf diese Würfelfläche. Die Temperatur des Würfels sei überall gleich. Wie gross ist diese Temperatur, wenn man den Würfel als Schwarzen Körper betrachtet?

Q.1) Eine Metalloberfläche wird von monochromatischem UV-Licht bestrahlt. Bei Wellenlängen von mehr als 286 nm werden keine Photoelektronen beobachtet. Wie gross ist dann die Austrittsarbeit der Photoelektronen? Wie schnell bewegen sich die Photoelektronen bei einer Bestrahlung mit UV-Licht der Wellenlänge 240 nm und wie gross ist ihre Wellenlänge nach de Broglie?

Q.2) Für die Bewegungsenergie E_{kin} von Teilchen der Masse m mit linearem Impuls gilt $E_{\text{kin}} = p^2/(2m)$. Es soll die Heisenbergsche Unschärferelation gelten $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$. Berechne Energien in Elektronvolt (eV).

a) Wie gross ist die Bewegungsenergie von Elektronen in Atomen mit Durchmesser 0.1 nm mindestens?

b) Wie gross ist die Bewegungsenergie von Nukleonen ($m \approx 1u$) in Atomkernen mit Durchmesser $5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ mindestens?

c) Im Teil (b) der Aufgabe ist die nichtrelativistische Bestimmung der Bewegungsenergie ungenau wenn die Bewegungsenergie grösser ist als ein Prozent der Ruhe-

Energie $m_0 c^2$ der Nukleonen. Müsste man im Teil (b) der Aufgabe relativistisch rechnen?

Q.3) Im Grundzustand eines H-Atoms ist der Kreisbahnradius gleich 0.0529 nm . Gemäß erstem Bohrschen Postulat gilt die Gleichung von de Broglie, $p = m_e v = h/\lambda$ und die de Broglie-Wellenlänge ist gleich dem Umfang der Kreisbahn (im Grundzustand!) Bestimme die Bahngeschwindigkeit v des Elektrons im Grundzustand.

Musterlösungen

$$A.1) E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

$$\text{Energiesatz: } mgh = 0.7mv^2 \rightarrow gh = 0.7v^2$$

$$v = \sqrt{gh/0.7} = \sqrt{10 \cdot 0.35 / 0.7} \text{ m/s} = \sqrt{5} \text{ m/s} = \underline{\underline{2.24 \text{ m/s}}}$$

$$A.2) \text{Energiesatz: } mg \cdot (h/2) = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\text{Satz v. Steiner: } J = J_S + m \cdot (h/2)^2 = (mh^2/12) + (mh^2/4) \\ = mh^2(1/12 + 1/4) = mh^2/3$$

$$mgh = J\omega^2 \rightarrow mgh = (mh^2/3)\omega^2 \rightarrow 3g = h\omega^2$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{3g/h}, v = \omega r = \omega h = \sqrt{3gh} = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 0.95} \text{ m/s}$$

$$v = \underline{\underline{5.3 \text{ m/s}}}$$

A.3) Der Drehimpuls ist eine Vektorgröße. Weil der Drehschemel eine vertikale Drehachse hat, kann auf den oberen, beweglichen Teil kein Drehmoment wirken. Somit kann die vertikale Komponente des Drehimpulses nicht verändert werden. Der Drehimpuls des rotierenden Rads wird vertikal ausgerichtet. Weil der Gesamtdrehimpuls in vertikaler Richtung am Anfang offensichtlich null war, muss er, wegen Drehimpulserhaltung auch danach gleich null sein. Dies ist nur möglich, wenn der untere Teil (Schüler) in Gegenrichtung zum Rad rotiert.

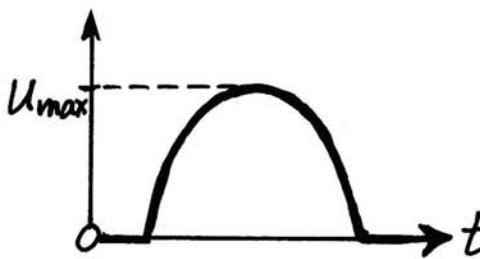
$$B.1) F_{zp} = F_L \rightarrow m\omega v = e v B \rightarrow m\omega = e B \rightarrow$$

$$\omega = eB/m = [1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 0.080 / (235 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27})] \text{ s}^{-1} \\ = \underline{\underline{32.8 \text{ s}^{-1}}}$$

$$B.2) mv^2/r = e v B \rightarrow r = mv/(eB) = [235 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot 12 \cdot 10^5 / (1.6022 \cdot 10^{-19} \cdot 0.14)] \text{ m} = 20.9 \text{ m}$$

Antwort: Das Teilchen durchläuft einen Halbkreis mit einem Radius von 20.9m mit einer konstanten Bahngeschwindigkeit von $12 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ im Uhrzeigersinn. Danach verlässt das Teilchen das Magnetfeld und fliegt wieder geradeaus.

B.3) $0 \cdot Bv = Q \cdot E \rightarrow E = Bv = 0.075 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ V/m} = \underline{\underline{37.5 \text{ kV/m}}}$

C.1a)  b)
$$U_{\text{max}} = (-) N \cdot \frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t} = (-) N \cdot \frac{B d \cdot \Delta s}{\Delta t} = -N B d v = (-) 200 \cdot 0.17 \cdot 2.4 = \underline{\underline{(-) 81.6 \text{ V}}}$$

C.2a) $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 \cdot 50 \cdot 0.01^2}{0.4} \text{ H} = \underline{\underline{3.927 \text{ mH}}}$

b) $U_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{U_{\text{ind}}}{L} = \frac{-6}{3.927} \cdot 10^3 \text{ A/s} = \underline{\underline{1.53 \cdot 10^3 \text{ A/s}}}$

c.1) $N \cdot \Phi_m = LI \rightarrow I = N \cdot \Phi_m / L = NBA / L = [500 \cdot 0.096 \cdot 50 \cdot 0.01^2 / (3.927 \cdot 10^{-3})] \text{ A} = \underline{\underline{61.1 \text{ A}}}$

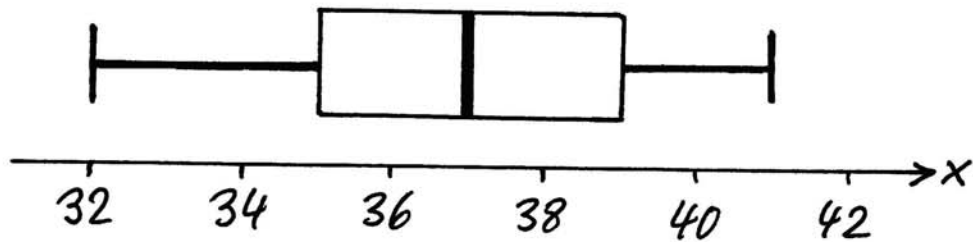
c.2) $B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 61.1}{0.4} \text{ T} = \underline{\underline{0.096 \text{ T}}}$

c.3) Das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld wäre gleich stark wie das äussere Magnetfeld. Man kann den Einfluss der Selbstinduktion nicht vernachlässigen wenn die Spule kurzgeschlossen ist.

D.1)

32	34	35	35	36	36	37	37	37	38	39	39	40	41
			$\tilde{x}_{1/4}$			$\tilde{x}_{1/2}$				$\tilde{x}_{3/4}$			

$$\tilde{x} = \tilde{x}_{1/2} = 37, \tilde{x}_{1/4} = 35 \text{ und } \tilde{x}_{3/4} = 39$$



E.1)

j	1	2	3	4	5	6
x_j	44	49	42	51	48	42
x_j^2	1936	2401	1764	2601	2304	1764

$$S_x = \sum_{j=1}^6 x_j = 44 + 49 + \dots + 42 = 276$$

$$S_{xx} = \sum_{j=1}^6 x_j^2 = 44^2 + 49^2 + \dots + 42^2 = 12'770$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} S_x = \frac{1}{6} \cdot 276 = 46$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} [S_{xx} - \frac{1}{n} (S_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{5} [12'770 - \frac{1}{6} \cdot 276^2]}$$

$$s = \sqrt{14.8} = \underline{\underline{3.847}}$$

E.2)

j	x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j \cdot y_j$
1	31	45	961	2025	1395
2	34	49	1156	2401	1666
3	27	41	729	1681	1107
4	32	48	1024	2304	1536
5	36	52	1296	2704	1872
Σ	160	235	5166	11'115	7576

↑
 S_x

↑
 S_y

↑
 S_{xx}

↑
 S_{yy}

↑
 S_{xy}

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} [S_{xx} - \frac{1}{n} (S_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{5-1} [5166 - \frac{1}{5} \cdot 160^2]} \\ = \sqrt{11.5} = \underline{\underline{3.391}}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} [S_{yy} - \frac{1}{n} (S_y)^2]} = \sqrt{\frac{1}{5-1} [11'115 - \frac{1}{5} \cdot 235^2]} \\ = \sqrt{17.5} = \underline{\underline{4.183}}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} [S_{xy} - \frac{1}{n} S_x \cdot S_y] = \frac{1}{5-1} [7576 - \frac{1}{5} \cdot 160 \cdot 235] \\ = \frac{1}{4} \cdot 56 = \underline{\underline{14}}$$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{14}{\sqrt{11.5 \cdot 17.5}} = \frac{14}{\sqrt{805/4}} = \sqrt{\frac{112}{115}} = \underline{\underline{0.987}}$$

$$F.1a) \quad \underline{\underline{\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}}}$$

$$b) \quad \underline{\underline{\frac{163}{700} = \frac{1}{5} + \frac{1}{35} + \frac{1}{350} + \frac{1}{700}}}$$

$$G.1a) \quad K_3 = K_0 \cdot (1.045)^3 = \text{€ } 80'000 \cdot 1.045^3 = \underline{\underline{\text{€ } 91'293}}$$

$$b) \quad K_{36} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{4.5/12}{100}\right)^{3 \cdot 12} = K_0 \cdot 1.00375^{36} = \\ \text{€ } 80'000 \cdot 1.00375^{36} = \underline{\underline{\text{€ } 91'539}}$$

$$c) \quad q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4.5/n}{100}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.045}{n}\right)^n = e^{0.045} \\ K_{36} = K_0 \cdot (e^{0.045})^3 = K_0 \cdot e^{0.135} = \text{€ } 80'000 \cdot \\ e^{0.135} = \underline{\underline{\text{€ } 91'563}}$$

$$H.1) \quad 200'000 \cdot q^{20} = \underbrace{R \cdot q^{19} + R \cdot q^{18} + \dots + R \cdot q + R}_{\text{geometr. Reihe}} \\ q = 1.04$$

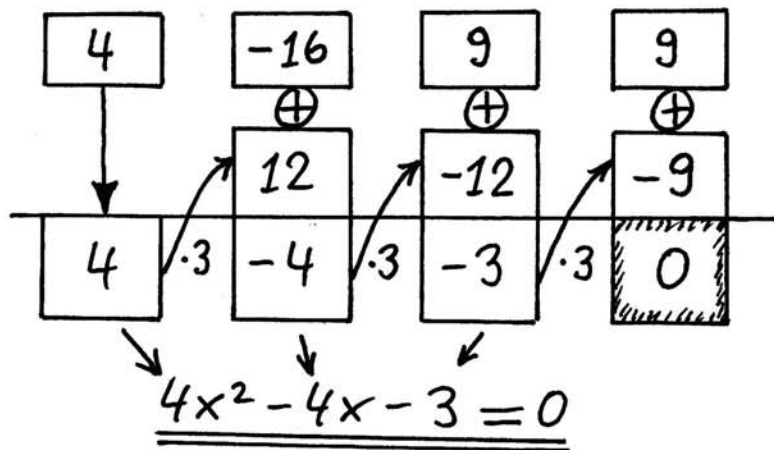
$$200'000 \cdot q^{20} = R \cdot \frac{1 - q^{20}}{1 - q} \rightarrow R = \frac{200'000 \cdot (1 - q) \cdot q^{20}}{1 - q^{20}}$$

$$R = \frac{200'000 \cdot (-0.04) \cdot 1.04^{20}}{1 - 1.04^{20}} = 14'716$$

Antwort: Die Rate beträgt CHF 14'716

I.1a) $4 \cdot 3^3 - 16 \cdot 3^2 + 3c + c = 4c - 36 = 0 \rightarrow \underline{\underline{c = 9}}$

b) $4x^3 - 16x^2 + 9x + 9 = 0$



J.1a) $532 \bmod 420 = 112$
 $420 \bmod 112 = 84$
 $112 \bmod 84 = 28$
 $84 \bmod 28 = \boxed{0} \rightarrow \text{ggT}(420, 532) = \underline{\underline{28}}$
 $\quad \quad \quad \hookrightarrow \text{ggT}$

b) $2625 \bmod 2310 = 315$
 $2310 \bmod 315 = 105$
 $315 \bmod 105 = \boxed{0} \rightarrow \text{ggT}(2310, 2625) = \underline{\underline{105}}$
 $\quad \quad \quad \hookrightarrow \text{ggT}$

K.1) $x_{n+1} \leftarrow x_n + \Delta t [0.4x_n - 14y_n]$
 $y_{n+1} \leftarrow y_n + \Delta t [0.02x_n - 0.2y_n]$

$$\Delta t = 0.5:$$

$$x_{n+1} \leftarrow x_n + 0.2x_n - 7y_n$$

$$y_{n+1} \leftarrow y_n + 0.01x_n - 0.1y_n$$

n	t _n	x _n	y _n	0.2x _n - 7y _n	0.01x _n - 0.1y _n
0	0	6000	200	-200	40
1	0.5s	5800	240	-520	34
2	1s	5280	274	-862	25.4
3	1.5s	4418	299.4	-1212	14.2
4	2s	3205.8	313.64		

$$K. 2a) a = [10 - 0.4(90/3.6)^2] m/s^2 = \underline{\underline{-240 m/s^2}}$$

$$b) a = \dot{v} = 0 = 10 - 0.4v^2 \rightarrow 0.4v^2 = 10 \rightarrow v^2 = 25 \rightarrow v = \underline{\underline{5 m/s}} = \underline{\underline{18 km/h}}$$

$$c) v_{n+1} \leftarrow v_n + \Delta t [10 - 0.4v_n^2]$$

$$\Delta t = 0.02s: v_{n+1} \leftarrow v_n + 0.2 - 0.008v_n^2$$

n	t _n	v _n	0.2 - 0.008 · v _n ²
0	0	25	-4.8
1	0.02s	20.2	-3.0643
2	0.04s	17.14	-2.1491
3	0.06s	14.99	-1.5968
4	0.08s	13.39	-1.2343
5	0.1s	12.16	

Musterlösungen

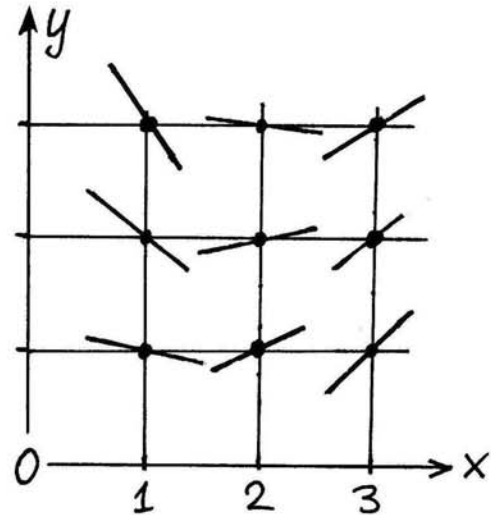
L.1) $y' = \frac{x(x+y^2)}{x+1}$

$A\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow y' = \frac{1 \cdot (1+3^2)}{1+1} = \underline{\underline{5}}$

$B\left(\frac{2}{-3}\right) \rightarrow y' = \frac{2 \cdot (2+(-3)^2)}{2+1} = \frac{22}{3} = \underline{\underline{7.333}}$

L.2) $y' = 0.4x - 0.6 \frac{y}{x}$

y	x		
	1	2	3
1	-0.2	0.5	1
2	-0.8	0.2	0.8
3	-1.4	-0.1	0.6



M.1)

j	x_j	y_j	$x_j - \bar{x}$	$y_j - \bar{y}$	$(x_j - \bar{x})^2$	$(y_j - \bar{y})^2$	$(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})$
1	3	7	-4	-4	16	16	16
2	6	10	-1	-1	1	1	1
3	8	11	1	0	1	0	0
4	11	16	4	5	16	25	20
Σ	28	44			34	42	37

$\downarrow : 4$ $\downarrow : 4$ $\downarrow : 3$ $\downarrow : 3$ $\downarrow : 3$
 $\bar{x} = 7$ $\bar{y} = 11$ $s_x^2 = \frac{34}{3}$ $s_y^2 = 14$ $s_{xy} = \frac{37}{3}$

$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{37/3}{\sqrt{\frac{34}{3} \cdot 14}} = \frac{37}{\sqrt{1428}} = \underline{\underline{0.9791}}$

$g: y = m(x - \bar{x}) + \bar{y}, m = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{37/3}{34/3} = \frac{37}{34}$

$$g: y = \frac{37}{34}(x-7) + 11 = \frac{37}{34}x + \frac{115}{34}$$

$$\underline{\underline{g: y = \frac{37}{34}x + \frac{115}{34} \rightarrow g: y = 1.088x + 3.382}}$$

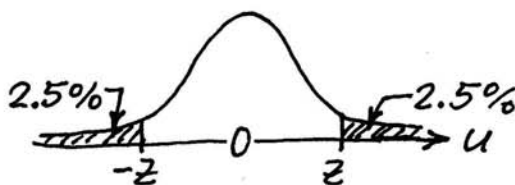
N.1) $n=37, p=21/37, q=1-p=16/37$

$$npq = 37 \cdot \frac{21}{37} \cdot \frac{16}{37} = \frac{336}{37} = 9.08 > 9 \text{ (S.122)}$$

Die Approximation der Binomialverteilung (BV) mit einer Normalverteilung (NV) ist zulässig.

$$\mu = np = 21, \sigma^2 = npq = 336/37, \sigma = 4\sqrt{21/37}$$

Konfidenzintervall der NV auf Signifikanzniveau 0.05:



$$z = 1.96$$

↑ aus Tabelle S.149
(Standardnormalverteilung)

Vertrauensintervall für x : $\mu - \sigma z \leq x \leq \mu + \sigma z$

$$\underbrace{21 - 1.96 \cdot 4\sqrt{\frac{21}{37}}}_{5.9064} \leq x \leq 21 + 1.96 \cdot 4\sqrt{\frac{21}{37}} \quad | :n$$

$$15.0936 \leq x \leq 26.9064$$

$$p = \frac{x}{n} = \frac{x}{37} \rightarrow \underline{\underline{0.4079 \leq p \leq 0.7272}}$$

N.2) $n=45, npq = n \cdot p \cdot (1-p) > 9 \text{ (S.122)}$

$$45 \cdot p \cdot (1-p) > 9 \xrightarrow{:45} p \cdot (1-p) > \frac{1}{5} \rightarrow p - p^2 > \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow p^2 - p + \frac{1}{5} < 0 \rightarrow p = \frac{1 \pm \sqrt{1/5}}{2} = \begin{cases} 0.7236 \leftarrow \oplus \\ 0.2764 \leftarrow \ominus \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{0.276 < p < 0.724}}$$

0.1a) $T = 1/f = (1/605)s = \underline{\underline{1.653ms}}$

b) Bei maximaler Auslenkung zur Zeit $t=0$ ist es von Vorteil die Cosinusfunktion zu verwenden anstatt die Sinusfunktion, dann kann man den Nullphasenwinkel $\varphi_0 = 0$ setzen.

$$y(t) = 2.4 \mu\text{m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \varphi_0 = 0$$

$$y(t) = 1 \mu\text{m} \rightarrow \cos(\omega t) = (1/2.4) = 5/12 \rightarrow$$

$$\omega t = \arccos(5/12) = 1.14102 \rightarrow$$

$$t = \frac{1.14102}{\omega} = \frac{1.14102}{2\pi f} = \frac{1.14102}{2\pi \cdot 605} \text{ s} \rightarrow \underline{t = 0.300 \text{ ms}}$$

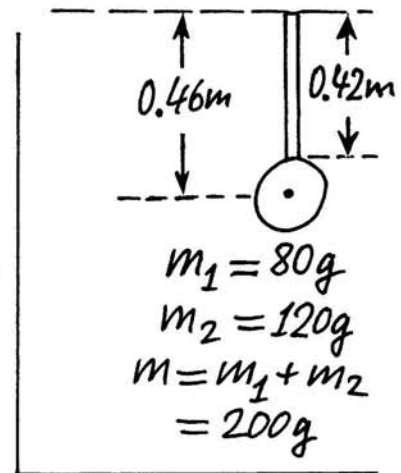
$$0.2) J = \frac{m_1}{12} l^2 + m_1 \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{1}{8} m_2 d^2$$

$$+ m_2 \left(l + \frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{m_2}{8} (8l^2$$

$$+ 8ld + 3d^2) = \left[\frac{1}{3} \cdot 0.08 \cdot 0.42^2 + \right.$$

$$\left. \frac{0.12}{8} (8 \cdot 0.42^2 + 8 \cdot 0.42 \cdot 0.08 + 3 \cdot 0.08^2) \right]$$

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0.030192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Physikal Pendel: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgs}{J}}$

Schwerpunkt: $s = \frac{m_1 \cdot (l/2) + m_2 \cdot (l + d/2)}{m_1 + m_2} = \frac{80 \cdot 0.21 + 120 \cdot 0.46}{80 + 120} \text{ m}$

$$s = 0.36 \text{ m}$$

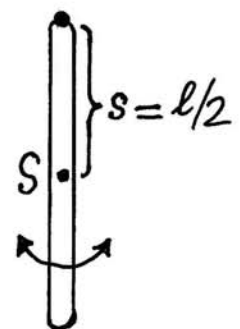
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0.2 \cdot 10 \cdot 0.36}{0.030192}} \text{ Hz} = \underline{0.78 \text{ Hz}}$$

$$0.3) J = \frac{ml^2}{12} + m \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} \rightarrow$$

$$\frac{l_{\text{red}}}{g} = \frac{J}{mgs} \rightarrow l_{\text{red}} = \frac{J}{ms}$$

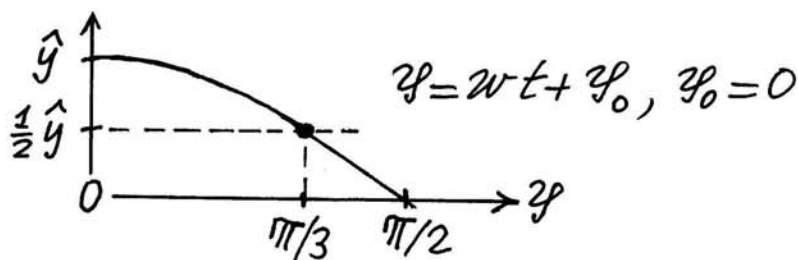
$$l_{\text{red}} = \frac{ml^2/3}{m \cdot l/2} = \frac{l^2/3}{l/2} = \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} \cdot 84 \text{ cm} = \underline{56 \text{ cm}}$$



0.4) Die Bewegungsgleichung einer mechanischen harmonischen Schwingung ist $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$. Beim Wasserpfeifenpendel gilt somit $\omega^2 = 2g/l$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{\ell}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{2\ell}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{9.8}{2 \cdot 0.92}} \text{ Hz} = \underline{\underline{0.73 \text{ Hz}}}$$

0.5)



Wir benutzen die Cosinusfunktion. Dann können wir schreiben $\varphi_0 = 0$, d.h. für den Phasenwinkel gilt $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \omega t$.

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega t) = \frac{\hat{y}}{2} \rightarrow \cos(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \arccos(1/2) = \pi/3 \rightarrow t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3 \cdot 2\pi f} = \frac{1}{6f}$$

$$= 0.0019 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{6 \cdot 0.0019 \text{ s}} = \underline{\underline{88 \text{ Hz}}}$$

$$0.6a) \quad v_{\text{rel}} = v_s + c = \frac{\lambda}{T}$$

$$v_{\text{rel}} = \frac{7.2 \text{ m}}{1.8 \text{ s}} = \underline{\underline{4.0 \text{ m/s}}}$$



$$b) \quad c = v_{\text{rel}} - v_s = (4 - 0.52) \text{ m/s} = \underline{\underline{3.48 \text{ m/s}}}$$

$$c) \quad \hat{y} = \frac{42 \text{ cm}}{2} = 21 \text{ cm}, \quad T = \frac{\lambda}{c} = \frac{7.2 \text{ m}}{3.48 \text{ m/s}} = 2.0690 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0690 \text{ s}} = 3.037 \text{ s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{7.2 \text{ m}} = 0.873 \text{ m}^{-1}$$

$$\underline{\underline{u(x, t) = 21 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{0.873}{\text{m}} \cdot x - \frac{3.037}{\text{s}} \cdot t\right)}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{P.1)} \quad pV &= nRT = \frac{m}{M} RT, \quad M = \text{Molmasse} \rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{RT} \\
 &= \frac{101'325 \cdot 0.018}{8.314 \cdot 373} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \underline{\underline{0.59 \text{ kg/m}^3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{P.2)} \quad \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} &= \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad \frac{T_1 = T_2}{V_2 = V_1/4} \rightarrow p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_1/4} = 4p_1 \\
 &\rightarrow \underline{\underline{p_2 = 4 \text{ bar}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 \cdot V_2^{\gamma} &= p_3 \cdot V_1^{\gamma} = p_3 \cdot (4V_2)^{\gamma} \rightarrow p_3 = p_2 \cdot V_2^{\gamma} / (4V_2)^{\gamma} \\
 \rightarrow p_3 &= p_2 (V_2 / (4V_2))^{\gamma} = p_2 / 4^{\gamma} = 4 \text{ bar} / 4^{1.4} \\
 &\rightarrow \underline{\underline{p_3 = 0.57 \text{ bar}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} &= T_3 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_3 \cdot (4V_2)^{\gamma-1} \rightarrow T_3 = \\
 T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} / (4V_2)^{\gamma-1} &= T_2 (V_2 / (4V_2))^{\gamma-1} = \\
 T_2 / 4^{\gamma-1} &= 293 \text{ K} / 4^{1.4-1} = 293 \text{ K} / 4^{0.4} \rightarrow \\
 \underline{\underline{T_3 = 168 \text{ K} \hat{=} -105^{\circ}\text{C}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{P.3)} \quad \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}kT \rightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \\
 &\sqrt{\frac{3 \cdot 1.3807 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{4.0026 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27}}} \text{ m/s} = \underline{\underline{1.37 \text{ km/s}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{zp} &= \frac{mv^2}{r} = \frac{3kT}{r} = \frac{3 \cdot 1.3807 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{0.07} \text{ N} \\
 &\rightarrow \underline{\underline{F_{zp} = 1.78 \cdot 10^{-19} \text{ N}}}
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{mv^2}{3k} = \frac{4.0026 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot 11'200^2}{3 \cdot 1.3807 \cdot 10^{-23}} \text{ K} = \underline{\underline{20 \cdot 10^3 \text{ K}}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{P.4)} \quad \Delta S_1 &= \frac{-\Delta Q}{T_1} = \frac{-0.023 \text{ J}}{300 \text{ K}} = -7.67 \cdot 10^{-5} \text{ J/K} \\
 \Delta S_2 &= \frac{+\Delta Q}{T_2} = \frac{0.023 \text{ J}}{373 \text{ K}} = \underline{\underline{+6.17 \cdot 10^{-5} \text{ J/K}}}
 \end{aligned}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = [-7.67 + 6.17] \cdot 10^{-5} \text{ J/K} = \overset{\sqrt{!!!}}{\underline{\underline{-1.50 \cdot 10^{-5} \text{ J/K}}}}$$

Die Entropie des (geschlossenen) Systems nimmt ab.
Das ist gemäss zweitem Hauptsatz der Wärmelehre nicht möglich. Die Wärmeübertragung vom kälteren auf den wärmeren Körper würde nicht spontan ablaufen.

$$\text{P.5) } \eta_{th} \leq \eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{295 - 281}{295} = \frac{14}{295} = 0.047$$

$\rightarrow$ höchstens 4.7%

$$\begin{aligned} \text{P.6) } \Delta S &= k \cdot \ln \frac{P_2}{P_1} = k \cdot \ln \frac{\binom{12}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}}{\binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8} \\ &= k \cdot \ln \left(\frac{1}{\frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot 2^8} \right) = -k \cdot \ln(126'720) = \\ &\quad -1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ (J/K)} \cdot \ln(126'720) \rightarrow \\ &\quad \underline{\underline{\Delta S = -1.62 \cdot 10^{-22} \text{ J/K}}} \end{aligned}$$

$$\text{P.7) Wiensches Verschiebungsgesetz: } T = b / \lambda_{\max} = 0.0028978 \text{ K} / (450 \cdot 10^{-9}) = \underline{\underline{6440 \text{ K}}}$$

$$\begin{aligned} \text{P.8) } E_0 \cdot s^2 &= \sigma T^4 \cdot 6s^2 \rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{E_0}{6\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1366}{6 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}} \text{ K} \\ &\rightarrow \underline{\underline{T = 252 \text{ K} \hat{=} -21^\circ \text{C}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Q.1) } hf &= \frac{hc}{\lambda} = W_A + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (\text{S.182, "Atomphysik"}) \\ v=0 &\rightarrow W_A = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{286 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = \underline{\underline{6.95 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{hc}{\lambda} - W_A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{\text{Grenz}}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{Grenz}}} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-9} \cdot 9.1094 \cdot 10^{-31}} \cdot \left[\frac{1}{240} - \frac{1}{286} \right]} = \underline{\underline{541 \text{ km/s}}}$$

$\uparrow$ nm

de Broglie: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{6.62607 \cdot 10^{-34}}{9.1094 \cdot 10^{-31} \cdot 540813} \text{ m}$

$\rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1.34 \text{ nm}}}$

Q.2a) $\Delta p > \frac{\hbar}{2\Delta x} \rightarrow E = \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{8m_e(\Delta x)^2} =$

$$\frac{(1.0546 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9.1094 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-10})^2} \text{ J} = 1.526 \cdot 10^{-19} \text{ J} \rightarrow$$

$$E = \frac{1.526 \cdot 10^{-19}}{1.6022 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = \underline{\underline{0.95 \text{ eV}}}$$

b) $E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{(\Delta p)^2}{2u} = \frac{\hbar^2}{8u(\Delta x)^2} = \frac{(1.0546 \cdot 10^{-34})^2 \text{ J}}{8 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot (5 \cdot 10^{-15})^2}$

$$= 3.349 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \frac{3.349 \cdot 10^{-14}}{1.6022 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = \underline{\underline{0.209 \text{ MeV}}}$$

c) $E_0 = mc^2 = uc^2 = 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ J} = 1.49 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

$$\frac{3.349 \cdot 10^{-14}}{1.49 \cdot 10^{-10}} \cdot 100\% = 0.022\% < 1\%$$

Die berechnete Energie ist kleiner als 1% der Ruheenergie (0.022%). Somit muss man nicht relativistisch rechnen.

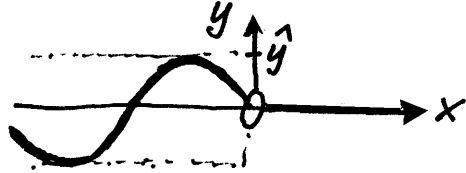
Q.3) $\lambda = 2\pi r = h/(m_e v) \rightarrow v = \frac{h}{m_e \lambda} = \frac{h}{2\pi m_e r}$

$$= \frac{6.62607 \cdot 10^{-34}}{2\pi \cdot 9.1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0.0529 \cdot 10^{-9}} \text{ m/s} = \underline{\underline{2.19 \cdot 10^3 \text{ km/s}}}$$

Musterprüfung

Themen: ▶ Wellenoptik
 ▶ Spezielle Relativitätstheorie

WL.1) Zur Zeit $t=0$ taucht im Koordinatenursprung eine harmonische Welle auf, die sich mit einer Geschwindigkeit von 3.5 m/s in Richtung der positiven x -Achse bewegt. Ihre Wellenlänge misst 2.8 m .



- a) Wie gross ist die Frequenz der Welle?
- b) Welche Frequenz nimmt ein Beobachter wahr, der sich mit einer Geschwindigkeit von 2.1 m/s in Gegenrichtung zur Welle bewegt?
- c) Formuliere eine mathematische Funktion, welche die skizzierte Welle darstellt für $\hat{y} = 24 \text{ cm}$.

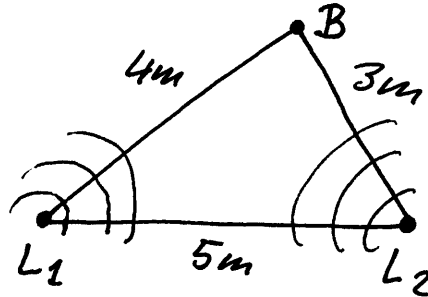
WL.2) Ein Elektronenstrahl trifft auf einen Doppelspalt. Die Spalten haben einen Abstand von $1.0 \mu\text{m}$. Die Elektronen haben eine Geschwindigkeit von 2.9 km/s .

- a) Wie gross ist der Beugungswinkel für das Intensitätsmaximum erster Ordnung?
- b) Wie viele Beugungsordnungen könnte man höchstens beobachten?

WL.3) In einem H-Atom umkreist ein Elektron ein Proton auf einer Kreisbahn mit einem Radius von 0.0529 nm (Bohrsches Atommodell). Wie gross ist dann die Bahngeschwindigkeit des Elektrons, wenn es auf der Kreisbahn eine stehende Welle bildet so, dass $\lambda_{\text{Elektron}} = \text{Kreisumfang} = 2\pi r$?

WL.4) Eine Lokomotive gibt vor der Einfahrt in einen Tunnel ein akustisches Signal der Frequenz 440 Hz ab. Der Berg reflektiert das Signal. Mit welcher Frequenz hört der Lokführer das Signal, wenn seine Lok mit 126 km/h fährt und der Schall sich mit 334 m/s ausbreitet?

WL.5) Zwei punktförmige Lautsprecher einer Lautsprecheranlage emittieren das gleiche kohärente (phasengleiche) akustische Signal mit einer Frequenz von 665 Hz . Ein Beobachter befindet sich im Abstand von 3 m und 4 m von den Schallquellen. Bestimme, ob sich die Schallwellen beim Beobachter verstärken (konstruktive Interferenz) oder abschwächen (destruktive Interferenz). Begründe die Antwort mit einer Berechnung! Die Schallgeschwindigkeit sei 334 m/s .



SRT.1) Ein $3.5 \cdot 10^{-25}\text{ kg}$ schwerer Körper wurde auf 99.9% der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt.

a) Wie gross ist dann seine Impulsmasse?

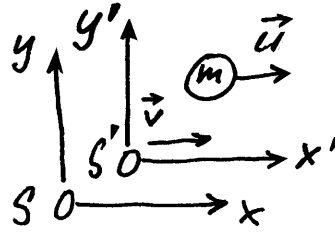
b) Welche Beschleunigungsarbeit musste am Körper verrichtet werden, um ihn auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen?

SRT.2) Um 1 kg Wasser zu verdampfen, wird 2257 kJ Wärme benötigt. Um wie viel ist die Masse des Dampfes grösser als die Masse des siedenden Wassers?

SRT.3) Durch Annihilation entstehen aus einem Elektron und einem Positron zwei Photonen (γ -Teilchen).

Berechne die Wellenlänge der Photonen.

- SRT.4) In einem Inertialsystem S' bewegt sich eine Kugel mit einer Geschwindigkeit u' von $0.8c$.



Wie schnell bewegt sich die Kugel im Inertialsystem S , wenn das Inertialsystem S' sich gegenüber S mit einer Geschwindigkeit v von $0.6c$ bewegt? Berechne auch die Geschwindigkeit der Kugel, wenn sie sich im Inertialsystem S' mit einer Geschwindigkeit u' von $0.8c$ in Gegenrichtung zu v bewegt.

- SRT.5) Eine Astronautin fliegt mit einer Geschwindigkeit von $0.8c$ zu einem Stern, der 6 Lichtjahre von der Erde entfernt ist.

- Wie lang ist der Weg aus der Sicht der Astronautin?
- Wie lange dauert die Reise aus der Sicht der Astronautin?
- Wie lange dauert die Reise aus der Sicht eines Erdbewohners?

- SRT.6) Die Strahlungsleistung der Sonne ist $3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Um wie viele Kilogramm wird die Sonne pro Sekunde leichter.

- SRT.7) Der nächste Fixstern (Proxima Centauri) ist 4.3 Lichtjahre von der Erde entfernt.

- Bei welcher Geschwindigkeit würde die Reise zu diesem Stern aus der Sicht des Astronauten 4.3 Jahre dauern?
- Wie lange dauert die Reise aus der Sicht der Erdbewohner?

Musterlösungen:

$$\text{WL. 1a)} f = c/\lambda = (3.5/2.8) \text{ Hz} = \underline{\underline{1.25 \text{ Hz}}}$$

$$b) f_E = f(c+v_E)/c = 1.25 \text{ Hz} (3.5 + 2.1)/3.5 = \underline{\underline{1.6 \text{ Hz}}}$$

$$\begin{aligned} c) y(x,t) &= \hat{y} \cdot \sin\left(\pm \frac{2\pi}{\lambda} x \pm 2\pi f t\right) \\ &= 24 \text{ cm} \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{2.8 \text{ m}} x + 2\pi \cdot 1.25 t/\text{s}\right) \\ &= \underline{\underline{24 \text{ cm} \cdot \sin\left(-\frac{2.24}{\text{m}} \cdot x + \frac{7.85}{\text{s}} \cdot t\right)}} \end{aligned}$$

$$\text{WL. 2a)} \lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 2900} \text{ m} = 250.83 \text{ nm}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arcsin(\lambda/d) = \arcsin(250.83 \text{ nm} / (1000 \text{ nm})) \\ &= \underline{\underline{14.5^\circ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \alpha_m &= \arcsin(m \cdot \lambda/d) \rightarrow m \cdot \lambda/d \leq 1 \rightarrow \\ m &\leq d/\lambda = 1000/250.83 = 3.99 \rightarrow \\ &\text{Höchstens } \underline{\underline{3. \text{ Ordnung}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{WL. 3)} v &= \frac{h}{m_e \lambda} = \frac{h}{2\pi m_e r} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ m/s}}{2\pi \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 0.0529 \cdot 10^{-9}} \\ v &= \underline{\underline{2.19 \cdot 10^3 \text{ km/s}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{WL. 4)} \quad & \begin{array}{c} f_0 \quad \rightarrow \quad f_E = f_0 \cdot \frac{c}{c-v} \rightarrow f_E' = f_E \cdot \frac{c+v}{c} \\ f_E' \leftarrow \end{array} \\ & \rightarrow f_E' = f_0 \cdot \frac{c}{c-v} \cdot \frac{c+v}{c} = f_0 \frac{c+v}{c-v} \\ & = 440 \text{ Hz} \frac{334+35}{334-35} = \underline{\underline{543 \text{ Hz}}} \end{aligned}$$

$$\text{WL. 5)} \lambda = c/f = (334/665) \text{ m} = 50.2 \text{ cm}$$

$$\overline{L_1 B} - \overline{L_2 B} = (4-3)m = 1m = \Delta s$$

$$\Delta s / \lambda = 100cm / (50.2cm) = 1.991 \approx 2$$

Antw.: Verstärkung, resp. konstruktive Interferenz.

Begründung: Der Wegunterschied ist nahezu ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge.

$$\text{SRT. 1a)} \beta = 0.999 \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.999^2}} = 22.366$$

$$m = \gamma m_0 = 22.366 \cdot 3.5 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

$$m = \underline{\underline{7.8 \cdot 10^{-24} \text{ kg}}}$$

$$\text{b)} E_{\text{kin}} = (m - m_0) c^2 = (7.828 \cdot 10^{-24} - 3.5 \cdot 10^{-25}) \cdot (2.998 \cdot 10^8)^2 \text{ J} = \underline{\underline{0.67 \mu\text{J}}}$$

$$\text{SRT. 2)} \Delta m = \Delta E / c^2 = (2257 \cdot 10^3 / (2.998 \cdot 10^8)^2) \text{ kg}$$

$$\Delta m = 2.51 \cdot 10^{-11} \text{ kg} = 25.1 \text{ ng} = \underline{\underline{0.0251 \mu\text{g}}}$$

$$\text{SRT. 3)} 2m_e c^2 = hc / \lambda \rightarrow \lambda = hc / (2m_e c^2) =$$

$$[6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8 / (2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot$$

$$(2.998 \cdot 10^8)^2)] \text{ m} = 1.21 \cdot 10^{-12} \text{ m} = \underline{\underline{1.21 \text{ pm}}}$$

$$\text{SRT. 4)} u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{0.8c + 0.6c}{1 + 0.8 \cdot 0.6} = \frac{1.4c}{1.48} = \underline{\underline{0.946c}}$$

$$u_- = \frac{-0.8c + 0.6c}{1 + \frac{(-0.8) \cdot 0.6}{1}} = \frac{-0.2c}{1 - 0.48} = \frac{-0.2c}{0.52} = \underline{\underline{-0.385c}}$$

$$\text{SRT. 5a)} x' = \frac{x}{\gamma} = \frac{6 \text{ ly}}{1/\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{6 \text{ ly}}{1/0.6} = \underline{\underline{3.6 \text{ ly}}}$$

$$b) t' = x'/v = 3.6 \text{ ly} / (0.8c) = \underline{\underline{4.5a}}$$

$$c) t = x/v = 6 \text{ ly} / (0.8c) = \underline{\underline{7.5a}}$$

$$\begin{aligned} \text{SRT.6) } P &= \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot c^2 \rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{c^2} \\ &= \frac{3.8 \cdot 10^{26}}{(2.998 \cdot 10^8)^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}} = \underline{\underline{4.2 \cdot 10^9 \text{ kg/s}}} = 4.2 \text{ Mio. t/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SRT.7a) } x' &= v \cdot t' = x/\gamma = 4.3 \text{ ly} / \gamma \\ v \cdot 4.3a &= 4.3 \text{ ly} / \gamma \rightarrow v = \frac{4.3 \text{ ly}}{4.3a} \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{c}{\gamma} \\ \rightarrow \frac{v}{c} &= \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \xrightarrow{\text{quadr.}} \frac{v^2}{c^2} &= 1 - \frac{v^2}{c^2} \rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{0.707c}} \end{aligned}$$

$$b) t = \frac{4.3 \text{ ly}}{v} = \frac{4.3 \text{ ly}}{0.707c} = \frac{4.3a}{0.707} = \underline{\underline{6.1a}}$$