Zinseszins und Rentenrechnung

A. Zinseszins
B. Unterjähriger Zinseszins
C. Rentenrechnung

A. Zinseszins

A.1) Ein ruhendes Kapital von €78'000 wird mit einem Zinssatz von 3.7% p.a. kumulativ verzinst. Wie lange dauert es, bis ein Kontostand von € 100'000 erreicht ist?

A.2) Ein Börsenhändler spekuliert mit Währungen. Mit Hochfrequenzhandel will er ein Portfolio in 20 Monaten im Wert verdoppeln. Welches monatliche prozentuale Wachstum ist hierfür erforderlich?

A.3) Ein Kapital von €120'000 wird auf zwei Konten verteilt, die mit 3% und 4% kumulativ verzinst werden. Wie wurde das Kapital aufgeteilt wenn nach neun Jahren der Gesamtwert des Guthabens €160'722 betrug?

A.4) Ein Guthaben von €18'000 wird kumulativ mit einem Zinssatz von 3.25% verzinst. Ein zweites Guthaben von €20'000 wird kumulativ mit einem Zinssatz von 2.75% verzinst. Wie lange dauert es bis die beiden Guthaben den gleichen Kontostand haben?

B. Unterjähriger Zinseszins

B.1) Ein Kapital von €55'000 soll mit einem nominalen Jahreszinssatz von 6% kumulativ

a) verzinst werden.

b) unterjährig mit Zinsperioden von 1 Monat verzinst werden.

c) stetig verzinst werden.

Wie hoch ist der Kontostand nach vier Jahren?

B.2) Bei welchem nominalen Jahreszinssatz resultiert bei monatlicher kumulativer Verzinsung ein effektiver Jahreszinssatz von 6.5%?

B.3) Wie gross ist der effektive Zinssatz bei stetiger Verzinsung mit nominalem Jahreszinssatz von 5%?

C. Rentenrechnung

C.1) Wie gross ist der jährliche Rentenbetrag einer Rente mit einem Barwert von €230'000 bei einem Zinssatz von 4% und einer Rentendauer von 12 Jahren wenn die Rente nachschüssig ausbezahlt wird?

C.2) Wie gross muss der Barwert einer nachschüssigen Rente in der Höhe von €24'000 sein, damit bei einem Zinssatz von 3.25% eine Rentendauer von 15 Jahren resultiert?

C.3) Ewige Rente: Wie gross ist der jährliche Rentenbetrag einer ewigen Rente mit einem Barwert von €340'000 bei einem Zinssatz von 4.2% wenn die Rente

a) nachschüssig ausbezahlt wird?
b) vorschüssig ausbezahlt wird?

C.4) Bei welcher Rentendauer kann von einer Rente mit einem Barwert von €286'000 eine jährliche nachschüssige Rente von € 24'000 bezogen werden, wenn der Zinssatz 3.7% beträgt?

Formeln

A. Zinseszins:

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Zinsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$

$$q = \sqrt[n]{K_n / K_0}$$

$$p = 100 \cdot (q - 1) = 100\left[\sqrt[n]{K_n / K_0} - 1\right]$$

$$n = \log(K_n / K_0) / \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

B. Unterjähriger Zinseszins:

m = Anzahl Zinsperioden pro Jahr
n = Anzahl Jahre
$n \cdot m$ = Anzahl Zinsperioden

Zinssätze: p = nominaler Jahreszinssatz
$p_u = p/m$ = unterjähriger Zinssatz
p_{eff} = effektiver Jahreszinssatz

$$K_n = K_0 \cdot q_u^{m \cdot n} = K_0 \cdot q_{eff}^n \rightarrow q_{eff} = q_u^m$$

$$1+\frac{p_{eff}}{100}=\left(1+\frac{p_u}{100}\right)^m=\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m$$

$$\rightarrow p_{eff}=100\left[\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m-1\right]$$

Stetige Verzinsung, d.h. $m\rightarrow\infty$

Es gilt $K_n=K_0\cdot q_{eff}^n$

wobei $q_{eff}=\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m=\left(1+\frac{p/100}{m}\right)^m$

und es gilt

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p/100}{m}\right)^m=e^{p/100}$$ ← S. 52 Formelsammlung *

Man erhält $K_n=K_0\cdot e^{np/100}$

Es gilt $1+p_{eff}/100=e^{p/100}\rightarrow p_{eff}=100\left(e^{p/100}-1\right)$

C. Rentenrechnung:

K_0 = Barwert
K_n = Endwert
p = Zinssatz
r = Rentenbetrag
n = Rentendauer

Aequivalenzprinzip der Rentenrechnung: (nachschüssig)

Konto A: K_0 (Barwert) $\xrightarrow{n\text{ Zinsperioden}}$ $K_n=K_0\cdot q^n$ (Endwert)

Konto B:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{1. Rate} \xrightarrow{n-1\text{ Zinsperioden}} & r\cdot q^{n-1}\\
\text{2. "} \xrightarrow{n-2\text{ Zinsperioden}} & r\cdot q^{n-2}\\
\vdots & \\
\text{n. Rate} \longrightarrow & r
\end{array}\right\} r\left[1+q+\cdots\cdots+q^2+q^{n-1}\right]$$

---

* Formeln, Tabellen, Begriffe, DMK/DPK/DCK, orell Füssli,
ISBN 978-3-280-04116-1

Aequivalenzprinzip (nachschüssig):

$$K_n = K_0 \cdot q^n = r\left[1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}\right]$$

Geometrische Reihe ← Formelsammlung S.40*

$$1+q+\cdots\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$K_n = K_0 q^n = r\,\frac{1-q^n}{1-q} \leftarrow \text{nachschüssig}$$

Für vorschüssige Renten (eine zusätzliche Zinsperiode der Raten)

$$K_n = K_0 q^n = q r\,\frac{1-q^n}{1-q} \leftarrow \text{vorschüssig}$$

---

* Formeln, Tabellen, Begriffe, DMK/DPK/DCK, orell Füssli,
ISBN 978-3-280-04116-1

Lösungen:

A.1) $K_n = €100'000 = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot 1.037^n \rightarrow$

$1.037^n = K_n / K_0 = €100'000 / (€78'000) = \frac{50}{39}$

$n \cdot \log 1.037 = \log(50/39) \rightarrow n = \frac{\log(50/39)}{\log 1.037}$

$\underline{\underline{n = 6.84 \text{ Jahre}}}$

A.2) $K_{20} = 2K_0 = K_0 \cdot q^{20} \xrightarrow{:K_0} q^{20} = 2 \rightarrow$

$q = \sqrt[20]{2} = 1.0353 = 1 + p/100 \rightarrow$

$p = 100 \cdot (1.0353 - 1) = 3.53$

Antw.: Prozentuales Wachstum von $\underline{\underline{3.53\%}}$

A.3) $x \rightarrow 3\%$, $€120'000 - x \rightarrow 4\%$

$x \cdot 1.03^9 + (120'000 - x) \cdot 1.04^9 = 160'722$

$120'000 \cdot 1.04^9 - 160'722 = x \cdot (1.04^9 - 1.03)^9$

$\rightarrow 10'075.42 = 0.11854x \rightarrow x = 84'997$

$120'000 - x = 35'003$

Antw.: Konto mit Zinssatz 3%: €85'000

" " " 4%: €35'000

A.4) $K_{01} \cdot q_1^n = K_{02} \cdot q_2^n \rightarrow (q_1/q_2)^n = K_{02}/K_{01}$

$n \cdot \log(q_1/q_2) = \log(K_{02}/K_{01}) \rightarrow$

$n = \log(20'000/18'000) / \log(1.0325/1.0275)$

$= 21.7 \rightarrow$ Es dauert $\underline{\underline{21.7 \text{ Jahre}}}$

B.1a) $K_4 = K_0 \cdot q^4 = € 55'000 \cdot 1.06^4$

$\underline{\underline{K_4 = € 69'436}}$

b) $K_4 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{4m} = € 55'000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100 \cdot 12}\right)^{4 \cdot 12} = € 55'000 \cdot 1.005^{48}$

$= \underline{\underline{€ 69'876}}$

c) $K_4 = K_0 e^{np/100} = € 55'000 \cdot e^{4 \cdot 6/100}$

$= € 55'000 \cdot e^{0.24} = \underline{\underline{€ 69'919}}$

B.2) $q_{eff} = q_u^{12} = \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^m, \; m = 12$

$1 + \frac{6.5}{100} = 1.065 = \left(1 + \frac{p}{1200}\right)^{12} \rightarrow$

$1 + \frac{p}{1200} = \sqrt[12]{1.065} = 1.005262 \xrightarrow{-1}$

$p/1200 = 0.005262 \rightarrow p = 1200 \cdot 0.005...$

$p = 6.314$

Antw.: Nominal-Jahreszinssatz von $\underline{\underline{6.314\%}}$

B.3) $q_{eff} = e^{p/100} = 1 + \frac{p_{eff}}{100} \rightarrow$

$p_{eff} = 100 \cdot (e^{p/100} - 1) = 100(e^{5/100} - 1)$

$= 5.127 \rightarrow$ Antw.: $\underline{\underline{5.127\%}}$

C.1) $r = \frac{K_0 \cdot q^n}{1-q^n} \cdot (1-q) = \frac{230'000 \cdot 1.04^{12}}{1-1.04^{12}}(1-1.04)$

$= 24'507$

Antw.: Rentenbetrag ist €24'507

C.2) $K_0 q^n = r\frac{1-q^n}{1-q} \longrightarrow K_0 = \frac{r(1-q^n)}{q^n(1-q)}$

$= \frac{24'000(1-1.0325^{15})}{1.0325^{15}(1-1.0325)} = 281'398$

Antw.: $K_0 = €281'398$

C.3a) Nachschüssig: $K_0 \cdot q^n = r\frac{1-q^n}{1-q} \quad | :q^n$

$K_0 = r\frac{(1/q^n)-1}{1-q}$

Für $n \to \infty$ wird $1/q^n$ null

Dann wird

$K_0 = r\frac{1}{q-1} = \frac{r}{q-1}$

$r = K_0 (q-1) = €340'000 \cdot (1.042-1)$

$= 14'280$

Antw.: Rentenbetrag = €14'280

b) Vorschüssig: $K_0 \cdot q^n = q\,r\frac{1-q^n}{1-q} \quad | :q^n$

$K_0 = q\,r\frac{(1/q^n)-1}{1-q}$

Für $n \to \infty$ wird $1/q^n$ gleich null

Dann gilt $r = K_0(q-1)/q$

$$= \frac{340'000 \cdot (1.042 - 1)}{1.042} = 13'704$$

Antw.: Rentenbetrag ist $\underline{\underline{€\ 13'704}}$

C.4) $K_0 \cdot q^n = r \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow K_0 q^n (1-q) =$

$r(1-q^n) \rightarrow [(1-q)K_0 + r]q^n = r \rightarrow$

$$q^n = \frac{r}{(1-q)K_0 + r} \rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{r}{(1-q)K_0 + r}\right)}{\log q}$$

$$= \frac{\log \frac{24'000}{(1-1.037) \cdot 286'000 + 24'000}}{\log 1.037} = 16.00$$

Antw.: Rentendauer ist $\underline{\underline{16.0\ \text{Jahre}}}$