Zinseszins

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n$$

q: Zinsfaktor $\left(q = 1 + \frac{p}{100}\right)$, $p/100$: Zinssatz
K_0: Anfangskapital, K_n: Endkapital
n: Laufzeit (Jahre)

A. Endkapital od. Anfangskapital gesucht

A.1.) Ein Anfangskapital von € 11'000 wird während 3 Jahren mit einem Zinssatz von $3\frac{1}{4}$ % und danach während 2 Jahren mit einem Zinssatz von $3\frac{1}{2}$ % verzinst. Wie hoch ist das Kapital am Ende der Laufzeit von 5 Jahren?

A.2.) Auf ein Bankkonto mit einem Zinssatz von $3\frac{1}{2}$ % wird am Jahresanfang ein Betrag von € 5500 einbezahlt. Welcher Betrag muss ein Jahr später einbezahlt werden, damit der Kontostand nach einer Laufzeit von insgesamt 4 Zinsperioden bei € 10'000 liegt?

B. Zinssatz gesucht

B.1.) Ein Derivatehändler hat eine anfängliche Investition von € 80'000 im Verlauf von rund vier Jahren auf einen Betrag von rund € 195'000 vermehrt. Welchem Zinssatz entspricht die Kapitalvermehrung?

B.2.) Ein Vater eröffnet bei der Geburt seiner Tochter ein Jugendsparkonto. Wie gross müsste der Zinssatz des Kontos sein, dass der Kontostand bei Volljährigkeit in 18 Jahren dem Doppelten der Einzahlung bei der Kontoeröffnung entspricht?

C. Laufzeit gesucht

C.1.) Ein Anfangskapital von €5 wird auf einem Konto mit einem Zinssatz von 2% verzinst. Wie lange würde es dauern, bis der Kontostand auf €1 Mio. angewachsen ist?

C.2.) Ein Kapital von €28'000 wird mit einem Zinssatz von $3\frac{1}{4}$ % verzinst und ein um €2115 grösseres Kapital wird mit einem Zinssatz von $2\frac{3}{4}$ % verzinst. Nach wie vielen Zinsperioden ist der Kontostand bei beiden Kapitalen gleich gross?

Musterlösungen

A.1.) $K_5 = K_0 \cdot q_1^3 \cdot q_2^2 = €11'000 \cdot 1.0325^3 \cdot 1.035^2$

$\underline{\underline{K_5 = €12'970.10}}$

A.2.) $€10'000 = \underbrace{1.035^4 \cdot €5500}_{€6311.38} + 1.035^3 \cdot x$

$x = € \dfrac{10'000 - 6311.38}{1.035^3} = \underline{\underline{€3326.95}}$

B.1.) $€80'000 \cdot q^4 = €195'000 \rightarrow q = \sqrt[4]{\dfrac{195'000}{80'000}}$

$= 1.2495 = 1 + p/100 \rightarrow p = 100 \cdot (q-1) =$

$100 \cdot (1.2495 - 1) = 24.95$

Antw.: Der mittlere Zinssatz wäre ungef 24.95%, ungef. $\underline{\underline{25\%}}$

B.2.) $K_{18} = 2K_0 = K_0 \cdot q^{18} \xrightarrow{:K_0} q^{18} = 2 \rightarrow$

$q = \sqrt[18]{2} = 1.03926 \rightarrow p = 100 \cdot (q-1) =$

$100 \cdot (1.03926 - 1) = 3.93 \approx 4 \rightarrow$ ungef. $\underline{\underline{4\%}}$

C.1.) $1'000'000 = 5 \cdot 1.02^n \xrightarrow{:5} 1.02^n = 200'000 \xrightarrow{lg\ldots}$

$n \cdot lg\, 1.02 = lg\, 200'000 \rightarrow n = lg\, 200'000 / lg\, 1.02$

$= 616.4$

Antw.: Es dauert ungefähr $\underline{\underline{\text{617 Jahre}}}$

C.2.) $28'000 \cdot 1.0325^n = (28'000 + 2115) \cdot 1.0275^n$

$\rightarrow \left(\dfrac{1.0325}{1.0275}\right)^n = 1 + \dfrac{2115}{28'000} = 1.0755 \rightarrow$

$1.004866^n = 1.0755 \xrightarrow[lg\ldots]{} n = lg 1.0755 / lg\, 1.00487$

$= 15.00 \rightarrow$ Antw.: Nach $\underline{\underline{\text{15 Zinsperioden}}}$

Rentenrechnung

A. Gesucht Endwert und Barwert

A.1.) (Unabhängige Aufgaben)
Bestimme den Bar- und Endwert von

	(a)	(b)	(c)
Art Rente	nachschüssig	nachschüssig	vorschüssig
Betrag Rente	€ 870	€ 1050	€ 780
Zinssatz	3.5%	3.75%	3.25%
Laufzeit (Jahre)	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre

B. Gesucht Rente

B.1.) Welche
a) nachschüssige
b) vorschüssige
Rente ergibt eine Rente mit einem Barwert von €250'000 bei einem Zinssatz von 4.25% und einer Laufzeit von 18 Jahren?

B.2.) Der Endwert einer nachschüssigen Rente mit einem Zinssatz von 3.75% und einer Laufzeit von 15 Jahren sei € 400'000. Wie gross ist dann die Rente?

C. Gesucht Laufzeit

C.1.) Eine Rente hat einen Barwert von € 125'000. Wie lange könnte eine jährliche Rente in der Höhe von € 7500 ausbezahlt werden, wenn man mit einem Zinssatz von 3.75% rechnet? Die Rente sei nachschüssig.

C.2.) Eine Rente kann bei einem Zinssatz von 3.25% während 12 Jahren entrichtet werden. Wie lange könnte eine Rente in gleicher Grösse und mit gleichem Barwert entrichtet werden, wenn man mit einem Zinssatz von 4.25% rechnet? Die Renten seien nachschüssig.

C.3.) Wie lange kann eine nachschüssige monatliche Rente mit einem Barwert von € 300'000 ausbezahlt werden, wenn die Rente € 1800 betragen soll und der Zinssatz bei 4.5% liegt?

C.4.) Herr Zbinden macht auf ein Bankkonto mit einem Zinssatz von 2.75% jährliche nachschüssige Einzahlungen von € 1500. Nach 5 Jahren erhöht er die Einzahlungen auf € 2000. Wie lange dauert es, bis der Kontostand auf € 20'000 angestiegen ist?

Musterlösungen

A.1) Nachschüssig: $R_n = r\cdot(q^n-1)/(q-1)$, $R_0 = R_n/q^n$

Vorschüssig: $\bar{R}_n = \bar{r}\cdot q\cdot(q^n-1)/(q-1)$, $\bar{R}_0 = \bar{R}_n/q^n$

a) $R_{15} = €\,870\cdot(1.035^{15}-1)/0.035 = \underline{\underline{€\,16'787.25}}$

$R_0 = R_{15}/1.035^{15} = \underline{\underline{€\,10'020.15}}$

b) $R_{20} = €\,1050\cdot(1.0375^{20}-1)/0.0375 = \underline{\underline{€\,30'468.25}}$

$R_0 = R_{20}/1.0375^{20} = \underline{\underline{€\,14'591.00}}$

c) $\bar{R}_{25} = €\,780\cdot 1.0325\cdot(1.0325^{25}-1)/0.0325$

$= \underline{\underline{€\,30'345.55}}$

$\bar{R}_0 = \bar{R}_{25}/1.0325^{25} = \underline{\underline{€\,13'640.90}}$

B.1a) $r = R_0\cdot q^n\cdot(q-1)/(q^n-1) =$

$€\,250'000\cdot 1.0425^{18}\cdot 0.0425/(1.0425^{18}-1)$

$r = \underline{\underline{€\,20'151.70}}$

b) $\bar{r} = \bar{R}_0 q^{n-1}\cdot(q-1)/(q^n-1) =$

$€\,250'000\cdot 1.0425^{17}\cdot 0.0425/(1.0425^{18}-1)$

$\bar{r} = \underline{\underline{€\,19'330.17}}$

B.2.) $r = R_n\cdot(q-1)/(q^n-1) = €\,400'000\cdot 0.0375/$
$(1.0375^{15}-1) = \underline{\underline{€\,20'350.40}}$

C.1.) $R_0\cdot(q-1)q^n = r(q^n-1) \rightarrow q^n[r-R_0\cdot(q-1)] = r$

$\rightarrow q^n = r/[r-R_0\cdot(q-1)] = 7500/[7500-0.0375\cdot$
$125'000] = 8/3 \rightarrow q^n = 1.0375^n = 8/3 \xrightarrow{lg\ldots}$

$n\cdot lg\,1.0375 = lg(8/3) \rightarrow n = lg(8/3)/lg\,1.0375$

$n = 26.6 \rightarrow$ ungef. $\underline{\underline{\text{26 Jahre}}}$

C.2.) $\frac{r}{R_0} = \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$

$q = 1.0325 \rightarrow n = 12: \frac{r}{R_0} = \frac{1.0325^{12} \cdot 0.0325}{1.0325^{12} - 1}$

$= 0.101967 = \frac{1.0425^x \cdot 0.0425}{1.0425^x - 1}$

$1.0425^x \cdot \underbrace{(0.101967 - 0.0425)}_{0.059467} = 0.101967$

$1.0425^x = 1.71468 \rightarrow x \cdot \lg 1.0425 = \lg 1.71468$

$\rightarrow x = \lg 1.71468 / \lg 1.0425 = 12.955 \rightarrow$

ungef. 13 Jahre

C.3.) $q_u = 1 + \frac{4.5}{12 \cdot 100} = 1.00375$

$R_0 \cdot q_u^{n \cdot m} = r \cdot \frac{q_u^{n \cdot m} - 1}{q_u - 1}, \quad n \cdot m = x$

$300'000 \cdot 1.00375^x = \frac{1800}{0.00375} \cdot (1.00375^x - 1)$

$0.625 \cdot 1.00375^x = 1.00375^x - 1 \rightarrow$

$0.375 \cdot 1.00375^x = 1 \rightarrow 1.00375^x = 8/3 \xrightarrow{\lg \ldots}$

$x \cdot \lg 1.00375 = \lg(8/3) \rightarrow x = \lg(8/3) / \lg 1.00375$

$= 262.04 = n \cdot 12 \rightarrow n = \underbrace{262.04}_{\text{Monate}} / 12 = 21.84$

21 Jahre und 10 Monate

C.4.) $20'000 = \left(1500 \frac{1.0275^5 - 1}{0.0275}\right) \cdot 1.0275^n + 2000 \cdot \frac{1.0275^n - 1}{0.0275}$

$20'000 = 7924.0006 \cdot 1.0275^n + 72'727.27 \cdot 1.0275^n -$
$72'727.27 \rightarrow 80'651.27 \cdot 1.0275^n = 92'727.27 \rightarrow$
$1.0275^n = 1.14973 \rightarrow n = \lg 1.14973 / \lg 1.0275 = 5.14$

Antw.: Ab Beginn der Laufzeit dauert es rund 11 Jahre