

Exponential- und Logarithmusfunktionen

- Themen:
- Logarithmen (A)
 - Exponentialfunktionen (B)
 - Exponentialgleichungen (C)
 - Logarithmengleichungen (D)

A.1) Berechne

a) $\lg \pi$

b) $\log_7 14$

c) $\log_3 2$

d) $\log_2(-5)$

A.2) Bestimme die Lösung von

a) $4^x = 2$

b) $5^7 = 3^x$

c) $3^x = 4^{x-2}$

d) $5^{\frac{x}{x+2}} = 3$

A.3) Schreibe als ein Logarithmus

a) $\log_3 5 + \log_3 2$

b) $\log_4 7 - \log_4 3$

c) $\log_2 x - \log_2(x-3)$

$$d) 3 \lg 4 - 2 \lg 2$$

$$e) 2 \lg(x+1) - \lg(x-1)$$

A.4) Bestimme x

$$a) \log_5 x = 2$$

$$b) \log_3 (x-1) = 4$$

$$c) \log_7 (x-2) - \log_7 (x+3) = \frac{1}{2}$$

$$d) \lg x + \lg(x+3) = 1$$

A.5) Bestimme x

$$a) \log_x 343 = 3$$

$$b) \log_{x+1} 2187 = 7$$

$$c) \log_x 2 = \pi$$

$$d) \log_x (x+12) = 2$$

B.1) Gegeben ist die Exponentialfunktion $y = b \cdot a^x$.

a) Der Graph der ursprünglichen Funktion wird an der x -Achse gespiegelt. Wie lautet die Funktionsgleichung für den gespiegelten Graphen?

b) Der Graph der ursprünglichen Funktion wird an der y -Achse gespiegelt und danach um 2 Einheiten nach oben verschoben. Wie lautet die Funktionsgleichung für den trans-

formierten Graphen? Welche Funktionsgleichung hätte man erhalten, wenn die Reihenfolge von Spiegelung und Verschiebung vertauscht worden wäre?

- B.2) Für welchen Wert von a geht der Graph der Funktionsgleichung $y = 2 \cdot a^x$ durch den Punkt $A\left(\frac{2}{18}\right)$?
- B.3) Für welche Werte von a und b geht der Graph der Funktionsgleichung $y = b \cdot a^x$ durch die Punkte
- $A\left(\frac{0}{3}\right)$ und $B\left(\frac{2}{147}\right)$?
 - $A\left(\frac{1}{10}\right)$ und $B\left(\frac{4}{1250}\right)$?
- B.4) Bei welchem Wachstumsfaktor verdoppelt sich eine Population in sieben Zeiteinheiten?
- B.5) Die Einwohnerzahl der Stadt A ist jetzt doppelt so gross wie diejenige ihrer Agglomeration B. Die Einwohnerzahl von A schrumpft jährlich um 3% und die Einwohnerzahl von B wächst jährlich um 7%. Wie lange dauert es, bis die Agglomeration mehr Einwohner hat als die Stadt?
- B.6) Nach wie vielen Zinsperioden ist der Kontostand eines ruhenden Kontos mit Zinssatz 2.4% um 10% angewachsen (ausgehend vom Anfangskapital)?
- B.7) Nach wie vielen Abschreibungsperioden mit einem Abschreibungssatz von 20% ist der Buchwert einer Werkzeugmaschine auf 10% des Anschaffungswerts gesunken?

B.8) Zwei gleich grosse Anfangskapitalien befinden sich auf zwei Konten mit gleichem Zinssatz von 2.4%. Eines der beiden Konten wird jedoch mit zwölf Zinsperioden pro Jahr (monatlich) verzinst. Wie lange dauert es, bis eines der Konten einen um 1% höheren Kontostand hat als das andere. Welches der beiden Konten hat den höheren Kontostand?

C.1) Bestimme die Lösungsmenge von

$$a) 4^x = 100$$

$$b) 3^{2-x} = 5$$

$$c) 8^{\lg x} = 20$$

$$d) 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$e) 2 \cdot 5^x = 3 \cdot 4^x$$

$$f) 2^{2x} \cdot 3^{3x} = 100$$

$$g) \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = 3$$

D.1) Bestimme die Lösungsmenge von

$$a) \log_4 x = 2$$

$$b) \log_x 3 = 9$$

$$c) \lg \sqrt{x-2} = 1$$

$$d) \log_x 256 = \log_4 x$$

$$e) \lg(x+2) - \lg(x-2) = 1$$

$$f) \lg x + \lg(x-3) = 1$$

$$g) \log_5(2x) = 9 - \log_5 x + \log_5 2$$

Musterlösungen

$$A.1a) \lg \pi = \log_{10} \pi = \log_{10} 3.14159... = \underline{\underline{0.4971}}$$

$$b) \log_7 14 = \lg 14 / \lg 7 = \underline{\underline{1.356}}$$

$$c) \log_3 2 = \lg 2 / \lg 3 = \underline{\underline{0.6309}}$$

$$d) \log_2(-5) = \lg(-5) / \lg 2 \rightarrow \underline{\underline{\text{nicht definiert}}}$$

$$A.2a) 4^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_4 2 = \lg 2 / \lg 4 = \underline{\underline{1/2}}$$

$$b) 3^x = 5^7 \Leftrightarrow x = \log_3(5^7) = \lg(5^7) / \lg 3 \\ = \lg 78'125 / \lg 3 = \underline{\underline{10.255}}$$

$$c) 4^{x-2} = 3^x \rightarrow 4^x / 4^2 = 3^x \rightarrow 4^x / 16 = 3^x \\ \rightarrow 4^x / 3^x = 16 \rightarrow (4/3)^x = 16 \Leftrightarrow \\ x = \log_{4/3} 16 = \lg 16 / \lg(4/3) = \underline{\underline{9.638}}$$

$$d) 5^{\frac{x}{x+2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = \log_5 3 = \lg 3 / \lg 5 \\ = 0.6826 \rightarrow$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{0.6826 \cdot (x+2)}{x+2} \rightarrow x = 0.68x + 1.37 \\ \rightarrow 0.317x = 1.3652 \rightarrow x = \underline{\underline{4.3013}}$$

$$A.3a) \log_3 5 + \log_3 2 = \log_3(5 \cdot 2) = \underline{\underline{\log_3 10}}$$

$$b) \log_4 7 - \log_4 3 = \underline{\underline{\log_4(7/3)}}$$

$$c) \log_2 x - \log_2(x-3) = \underline{\underline{\log_2\left(\frac{x}{x-3}\right)}}$$

$$d) 3 \cdot \lg 4 = \lg 4^3, \quad 2 \cdot \lg 2 = \lg 2^2 = \lg 4$$

$$\lg 4^3 - \lg 4 = \lg(4^3/4) = \underline{\underline{\lg 16}}$$

$$e) 2 \lg(x+1) - \lg(x-1) = \lg(x+1)^2 - \lg(x-1) =$$

$$\underline{\underline{\lg\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}\right)}}$$

$$A.4a) \log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 5^2 = \underline{\underline{25}}$$

$$b) \log_3(x-1) = 4 \Leftrightarrow x-1 = 3^4 = 81 \xrightarrow{+1} \underline{\underline{x=82}}$$

$$c) \log_7(x-2) - \log_7(x+3) = \log_7 \frac{x-2}{x+3} = 1/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3} = 7^{1/2} = \frac{\sqrt{7}(x+3)}{x+3} \rightarrow$$

$$x = \frac{-2 - 3\sqrt{7}}{\sqrt{7} - 1} = -\frac{(5\sqrt{7} + 23)}{6} = -6.038$$

Keine Lösung, weil $x \notin \mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

$$d) \lg x + \lg(x+3) = \lg(x \cdot (x+3)) = \lg(x^2 + 3x)$$

$$= 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 10^1 = 10 \rightarrow$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$\begin{array}{l|l} a & 1 \\ b & 3 \\ c & -10 \end{array}$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$

$$= 49 > 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{Es gilt } \{-5\} \notin \mathbb{D} \rightarrow \underline{\underline{L = \{2\}}}$$

$$A.5a) \log_x 343 = \lg 343 / \lg x = 3 = 3 \lg x / \lg x$$

$$\lg 343 = 3 \lg x \rightarrow \lg x = (\lg 343) / 3 = 0.8451 \Leftrightarrow$$

$$x = 10^{0.8451} = \underline{\underline{7}}$$

$$b) \log_{x+1} 2187 = \lg 2187 / \lg(x+1) = 7 \cdot \lg(x+1) / \lg(x+1) \rightarrow 7 \lg(x+1) = \lg 2187 \rightarrow \lg(x+1) = \lg 2187 / 7 = 0.4771 \Leftrightarrow x+1 = 10^{0.4771} = 3 \xrightarrow{-1} \underline{\underline{x=2}}$$

$$c) \log_x 2 = \pi \Leftrightarrow 2 = x^\pi \rightarrow x = \sqrt[\pi]{2} = 2^{1/\pi} = \underline{\underline{1.247}}$$

$$d) \log_x(x+12) = \lg(x+12) / \lg x = 2 \cdot \lg x / \lg x$$

$$\lg(x+12) = 2 \cdot \lg x = \lg x^2 \rightarrow x^2 = x+12 \rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-12) = 49$$

a		1
b		-1
c		-12

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \rightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 4,$$

wobei $\{-3\} \in D \rightarrow \underline{\underline{L = \{4\}}}$

$$B.1a) \underline{\underline{y = -b \cdot a^x}}$$

$$b) \text{ An } y\text{-Achse gespiegelt: } y = b \cdot a^{-x} = \frac{b}{a^x}$$

$$\text{Nach oben verschoben: } \underline{\underline{y = \frac{b}{a^x} + 2}}$$

Umgekehrte Reihenfolge:

$$y = b \cdot a^x \xrightarrow{\text{Verschiebung}} y = b \cdot a^x + 2$$

$$\underline{\underline{y = \frac{b}{a^x} + 2}}$$

$$B.2) \overbrace{A \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix} \in k}^{\uparrow}: 18 = 2 \cdot a^2 \xrightarrow{:2} 9 = a^2 \rightarrow a = \pm 3$$

Es ist jedoch $a > 0 \rightarrow \underline{\underline{a = 3}}$

$$B.3a) A\left(\frac{0}{3}\right) \in k: 3 = b \cdot a^0 = b \rightarrow b = 3$$

$$B\left(\frac{2}{147}\right) \in k: 147 = 3 \cdot a^2 \xrightarrow{:3} a^2 = 49 \rightarrow a = \begin{matrix} \pm 7 \\ \uparrow a > 0 \end{matrix}$$

$$\underline{a = 7 \text{ und } b = 3}$$

$$b) A\left(\frac{1}{10}\right) \in k: 10 = b \cdot a \rightarrow b = 10/a$$

$$B\left(\frac{4}{1250}\right) \in k: 1250 = b \cdot a^4 = (10/a) \cdot a^4 = 10 \cdot a^3 \xrightarrow{:10}$$

$$a^3 = 125 \rightarrow a = \sqrt[3]{125} = 5 \rightarrow \underline{a = 5 \text{ und } b = 2}$$

$$B.4) 2N_0 = N_0 \cdot x^7 \xrightarrow{:N_0} 2 = x^7 \rightarrow x = \sqrt[7]{2} = \underline{1.104}$$

$$B.5) A: 2N_0 \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)^x$$

$$B: N_0 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^x \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}} \right\} =$$

$$\rightarrow 2(0.97)^x = 1.07^x \rightarrow 2 = \left(\frac{1.07}{0.97}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{1.07}{0.97}} 2 = \lg 2 / \lg(1.07/0.97) = \underline{7.06}$$

Antwort: Es dauert etwas mehr als 7 Jahre
(7.06 Jahre)

$$B.6) 2K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{2.4}{100}\right)^x \xrightarrow{:K_0} 2 = 1.024^x \Leftrightarrow$$

$$x = \log_{1.024} 2 = \lg 2 / \lg 1.024 = 29.2$$

Antwort: Nach ungef. 29 Jahren (29.2 Jahre)

$$B.7) 0.1 N_0 = N_0 \left(1 - \frac{20}{100}\right)^x \xrightarrow{:N_0} 0.1 = 0.8^x \Leftrightarrow$$

$$x = \lg 0.1 / \lg 0.8 = -1 / \lg 0.8 = 10.3$$

Antwort: Nach ungefähr 10 Jahren (10.3 Jahre)

B.8) Das Konto mit unterjährigem Zinstermin wächst schneller.

$$K_0 \left(1 + \frac{2.4}{12 \cdot 100}\right)^{12n} = 1.01 K_0 \left(1 + \frac{2.4}{100}\right)^n \quad | : K_0$$

$$1.002^{12n} = 1.01 \cdot 1.024^n \quad | : 1.024^n$$

$$\frac{1.002^{12n}}{1.024^n} = \frac{((1.002)^{12})^n}{1.024^n} = \left(\frac{1.002^{12}}{1.024}\right)^n = 1.01$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{\left(\frac{1.002^{12}}{1.024}\right)} 1.01 = \log_{1.00026} 1.01$$

$$= \lg 1.01 / \lg 1.00026 = 38.34$$

Es dauert rund 38 Jahre (38.3 Jahre)

C.1a) $4^x = 100 \Leftrightarrow x = \log_4 100 = \lg 100 / \lg 4$
 $= 2 / \lg 4 = \underline{\underline{3.32}}$

b) $3^{2-x} = 5 \Leftrightarrow 2-x = \log_3 5 = \lg 5 / \lg 3 = \underline{\underline{1.465}}$

c) $8^{\lg x} = 20 \Leftrightarrow \lg x = \log_8 20 = \lg 20 / \lg 8$
 $= 1.4406 \rightarrow x = 10^{1.4406} = \underline{\underline{27.58}}$

d) Substitution: $u = 3^x$. Dann ist $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$
 $= u^2$

$$3u^2 - 28u + 9 = 0$$

$$D = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 676 > 0$$

$$u = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{2 \cdot 3} = \frac{28 \pm 26}{6} = \frac{14 \pm 13}{3}$$

$$u_1 = 9 = 3^2 \rightarrow x_1 = 2$$

$$u_2 = 1/3 = 3^{-1} \rightarrow \underline{\underline{x_2 = -1}}$$

$$\begin{array}{r} a/3 \\ b/-28 \\ c/9 \end{array}$$

e) $2 \cdot 5^x = 3 \cdot 4^x \rightarrow 5^x / 4^x = 3/2 \rightarrow (5/4)^x$
 $= 3/2 \Leftrightarrow x = \log_{5/4} (3/2) = \lg (3/2) / \lg (5/4)$
 $= \underline{\underline{1.817}}$

