FACHHOCHSCHULE ZÜRICH

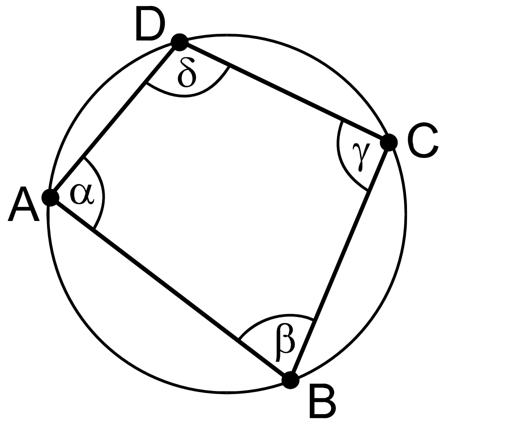
Musterprüfung *Geometrie** *Klasse ZS K2* **A**

18. März 2011

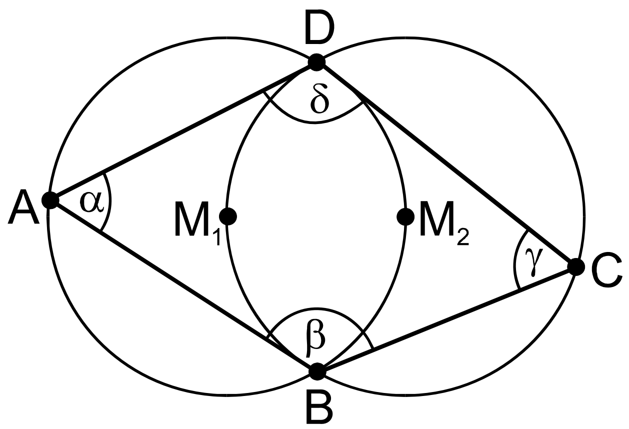
Name: ....

1. Teil: Winkelberechnungen

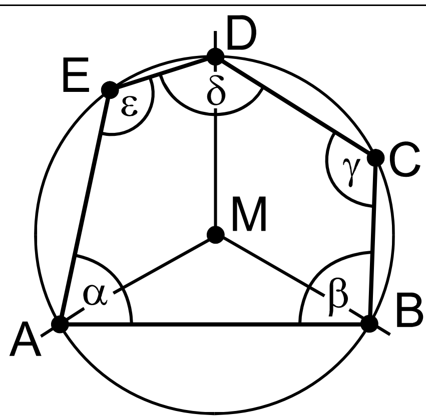
Aufgabe W-1: In nebenstehendem Sehnenviereck sei $\alpha = 80^o$ und $\beta = 70^o$. Wie gross sind dann die Winkel γ und δ?



Aufgabe W-2: In nebenstehender Figur schneiden sich zwei gleich grosse Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2 in den Punkten B und D. Von den Innenwinkeln im Viereck ABCD kennt man $\delta = 123^o$. Wie gross sind die andern Winkel α, β und γ?



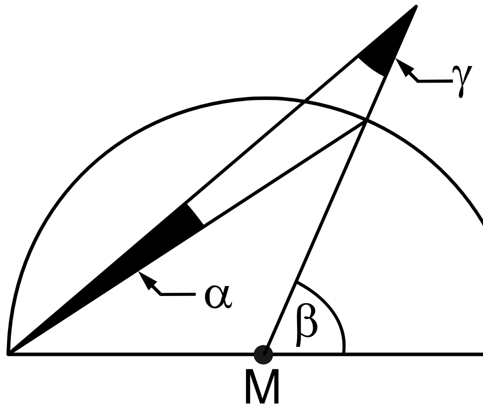
Aufgabe W-3: In nebenstehender Figur ist einem Kreis ein Fünfeck einbeschrieben. Die Punkte A, B und D bilden Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Wie gross sind die Innenwinkel γ, δ und ε, wenn $\alpha = 87^o$ und $\beta = 92^o$?



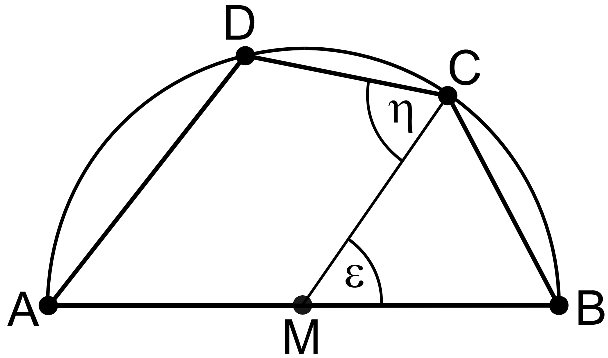
---

* Lösungen verschiedener Aufgaben sollen durch waagrechte Striche voneinander getrennt werden. Die Verwendung roter Farbe soll soweit möglich vermieden werden. Resultate werden doppelt unterstrichen oder eingerahmt. Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht bewertet.

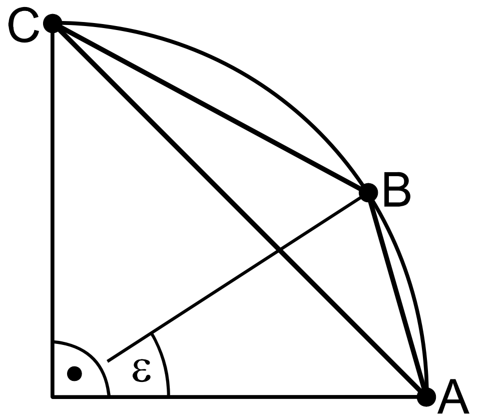
Aufgabe W-4: Nebenstehende Figur zeigt einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt M. Wie gross ist der Winkel γ, wenn $\alpha = 8^\circ$ und $\beta = 58^\circ$?



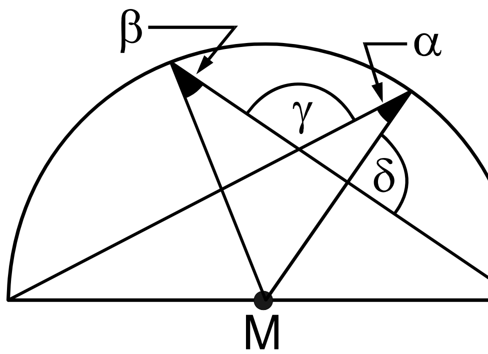
Aufgabe W-5: In untenstehender Figur ist einem Halbkreis mit dem Mittelpunkt M ein Viereck ABCD einbeschrieben. Wie gross sind die Innenwinkel α, β, γ und δ des Vierecks, wenn $\varepsilon = 56^\circ$ und $\eta = 58^\circ$?

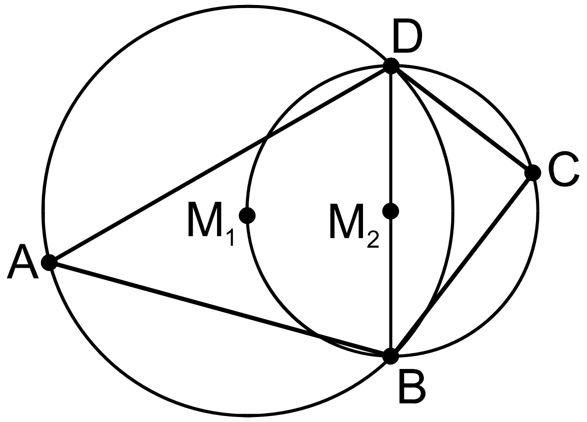


Aufgabe W-6: Einem Viertelkreis ist, wie in nebenstehender Figur gezeigt, ein Dreieck ABC einbeschrieben. Wie gross sind die Innenwinkel α, β und γ des Dreiecks, wenn $\varepsilon = 34^\circ$?



Aufgabe W-7: Nebenstehende Figur zeigt einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt M. Wie gross sind die Winkel α und β, wenn $\gamma = 120^\circ$ und $\delta = 88^\circ$?



Aufgabe W-8: Untenstehende Figur zeigt zwei Kreise mit Mittelpunkten M_1 und M_2. Der Mittelpunkt M_2 des kleineren Kreises liegt auf der Verbindungslinie $\overline{BD}$ der Schnittpunkte beider Kreise. Man kennt einen Innenwinkel des Vierecks ABCD wie folgt: $\delta = 130°$. Wie gross sind die andern Innenwinkel α, β und γ des Vierecks?	
Aufgabe W-9: Bei einem gleichschenkligen Dreieck, (mit a = b) schneidet die Winkelhalbierende w_α die Seite a mit einem Winkel von 75°. Wie gross sind die Basiswinkel α und β des Dreiecks?	

2. Teil: Sinussatz und Kosinussatz

SC1. In einem gleichseitigen Dreieck wird ein Winkel dreigeteilt in drei gleich grosse Winkel von je 20°. Durch die Schenkel wird die gegenüber liegende Seite ebenfalls dreigeteilt. In welchem Verhältnis wird die Dreieckseite dreigeteilt?

SC2. Berechne die fehlende Seite c in einem allgemeinen Dreieck für welches gilt $a = 20$, $b = 34$ und $\beta = 72°$.

SC3. Bestimme die fehlende Seite c in einem allgemeinen Dreieck, für welches gilt $a = 33$, $b = 52$ und $\alpha = 35°$. (Bestimme alle Lösungen!).

SC4. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel (a = b) doppelt so lang wie die Grundseite. Berechne die Winkel im Dreieck.

SC5. In einem Rhomboid schneiden sich die Diagonalen unter einem Winkel von 48°. Berechne die Seiten des Rhomboids, wenn für die Diagonalen gilt $e = 4$ und $f = 7$.

SC6. Für ein allgemeines Dreieck gilt $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$ und $a = b - 3$. Bestimme die Seiten a, b und c des Dreiecks.

SC7. Für ein allgemeines Dreieck gilt $c = 5$, $a + b = 10$ und $\gamma = 50°$. Bestimme die Seiten a und b.

3. Teil: Arcusfunktionen

C1. Bestimme Lösungen im Bereich von $0 \leq x \leq 360^\circ$ von

a) $\sin(3x - 45^\circ) = ½$
b) $\cos(2x + 15^\circ) = \sqrt{½}$
c) $\tan(2x - 40^\circ) = \sqrt{3}$
d) $\sin(2x + 20^\circ) = \cos 40^\circ$
e) $[\sin(2x - 40^\circ) - ½] \cdot \cos(2x - 30^\circ) = 0$

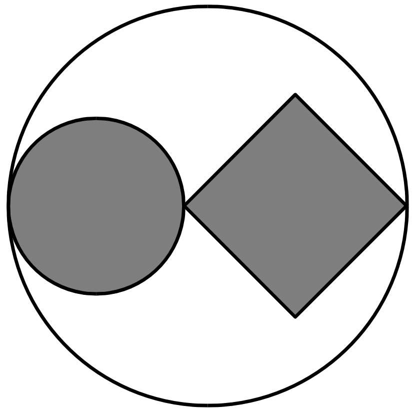
4. Teil: Figuren

F1. Berechne die Höhe h_c eines rechtwinkligen Dreiecks mit Umkreisradius $r_u = 3$ und $\alpha = 35^\circ$.

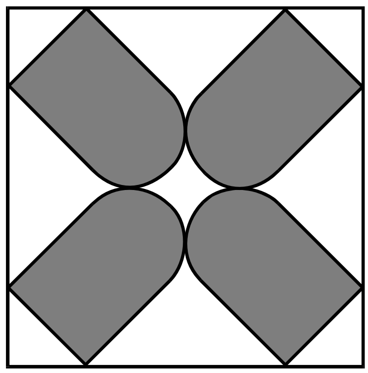
F2. Berechne die Seitenhalbierende s_b eines allgemeinen Dreiecks mit $b = 6$, $c = 5$ und $\beta = 40^\circ$.

F3. Berechne einen beliebigen der drei Innenwinkel in einem Dreieck für welches gilt $a : b : c = 4 : 5 : 6$.

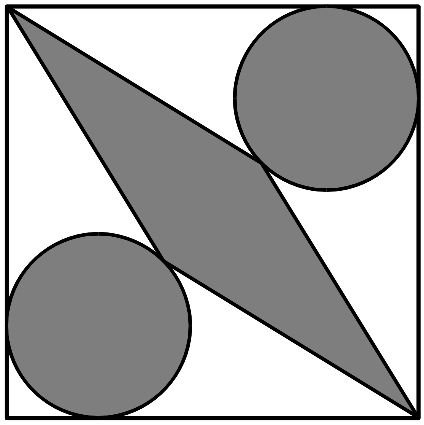
F4. In der nebenstehenden Figur sind ein Kreis und ein Quadrat einem Kreis mit Radius R einbeschrieben. Eine Diagonale des Quadrats und die beiden Kreismittelpunkte liegen auf einer Geraden. Wie gross ist der Radius r des kleinen Kreises, ausgedrückt in R, wenn seine Fläche gleich gross ist wie diejenige des Quadrats? [Wurzeln stehen lassen!].



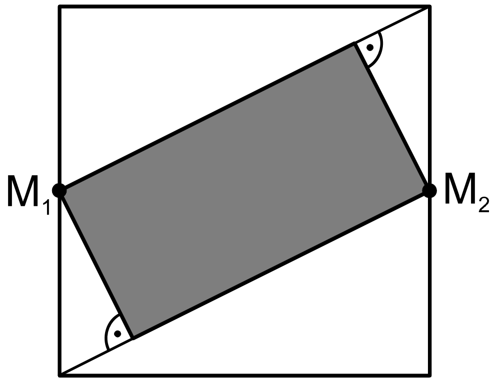
F5. Einem Quadrat mit Seitenlänge $s = 12$ sind vier gleich grosse „wappenförmige“ Flächenstücke einbeschrieben. Diese bestehen aus einem Rechteck und einem aufgesetzten Halbkreis. Die verlängerten Diagonalen des Quadrats sind Symmetrieachsen. Wie gross müssen die Durchmesser der Halbkreise sein, damit die „Wappen“ einen Viertel der Quadratfläche bedecken?



F6. Einem Quadrat mit Seitenlänge s sind, wie in nebenstehender Figur gezeigt, zwei gleich grosse Kreise und eine Raute (Rhombus) einbeschrieben. Wie viele Prozent der Quadratfläche werden von den beiden Kreisen und der Raute verdeckt, wenn der Flächeninhalt der Raute gleich gross ist wie derjenige von einem der beiden Kreise?



F7. Einem Quadrat mit Seitenlänge s ist, wie in nebenstehender Figur gezeigt, ein Rechteck einbeschrieben. Zwei Eckpunkte des Rechtecks liegen auf den Mittelpunkten von zwei gegenüberliegenden Quadratseiten. Wie viel Prozent der Quadratfläche werden vom Rechteck bedeckt?



5. Teil: Abstandsformel

A1. Bestimme die Länge der Seitenhalbierenden s_a im Dreieck mit den Eckpunkten $A\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-6\\7\\-1\end{pmatrix}$ und $C\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$.

A2. Bestimme den Parameter q im Ortsvektor des Punkts $P\begin{pmatrix}-q\\q-3\\q\end{pmatrix}$ so, dass sein Betrag gleich 9 wird, d.h. der Abstand des Punkts P vom Koordinatenursprung soll gleich 9 sein.

A3. Für welchen Punkt auf der z-Achse ist der Abstand vom Koordinatenursprung halb so gross wie vom Punkt $C\begin{pmatrix}8\\12\\10\end{pmatrix}$?

A4. Welchen Abstand hat der Mittelpunkt der Deckfläche eine Würfels mit Kantenlänge 6 von den Mittelpunkten der vertikalen Kanten des Würfels?

Lösungen:

W-1	$\gamma = 100^\circ$ und $\delta = 110^\circ$
W-2	$\alpha = \gamma = 60^\circ$, $\beta = 117^\circ$
W-3	$\gamma = \varepsilon = 120^\circ$, $\delta = 121^\circ$
W-4	$\gamma = 21^\circ$
W-5	$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 62^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\delta = 118^\circ$
W-6	$\alpha = 28^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 17^\circ$
W-7	$\alpha = 28^\circ$, $\beta = 32^\circ$
W-8	$\alpha = 45^\circ$, $\beta = 95^\circ$, $\gamma = 90^\circ$
W-9	Zwei Lösungen: $\alpha_1 = \beta_1 = 50^\circ$, $\gamma_1 = 80^\circ$; $\alpha_2 = \beta_2 = 70^\circ$, $\gamma_2 = 40^\circ$

SC1. $(\tan 30^\circ - \tan 10^\circ) : 2\tan 10^\circ : (\tan 30^\circ - \tan 10^\circ) = 0.4010 : 0.3527 : 0.4010 \approx 114 : 100 : 114$

SC2. $\alpha = \arcsin((a/b)\cdot\sin\beta) = 34.02^\circ$ (nur eine Lösung!) $\rightarrow$ $\gamma = 73.983^\circ$ $\rightarrow$ $c = \sqrt{20^2 + 34^2 - 1360\cdot\cos 73.983^\circ} = 34.36$

SC3. $\beta = \arcsin((b/a)\cdot\sin\alpha)$ $\rightarrow$ $\beta_1 = 64.66^\circ$ $\rightarrow$ $\gamma_1 = 80.336^\circ$ und $\beta_2 = 115.336^\circ$ $\rightarrow$ $\gamma_2 = 29.664^\circ$, $c = \sqrt{33^2 + 52^2 - 3432\cdot\cos\gamma}$ $\rightarrow$ $c_1 = 56.72$ und $c_2 = 28.48$

SC4. $a = b = \arccos((4c^2 + c^2 - 4c^2)/(2\cdot 2c\cdot c)) = \arccos(1/4) = 75.52^\circ$, $\gamma = 180^\circ - 2a = 28.96^\circ$

SC5. $a = \sqrt{2^2 + 3.5^2 - 14\cdot\cos 132^\circ} = 5.061$ und $b = \sqrt{2^2 + 3.5^2 - 14\cdot\cos 48^\circ} = 2.623$

SC6. $(b-3)/\sin\alpha = b/\sin\beta$ $\rightarrow$ $b = 3\sin\beta/(\sin\beta - \sin\alpha) = 11.6382$ und $a = b - 3 = 8.6382$, $\gamma = 80^\circ$ $\rightarrow$ $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos 80^\circ} = 13.2344$

SC7. $c^2 = a^2 + (10-a)^2 - 2a(10-a)\cos 50^\circ$ $\rightarrow$ $a^2 - 10a + [(100 - c^2)/(2\cdot(1 + \cos 50^\circ))] = a^2 - 10a + 22.827 = 0$ $\rightarrow$ $a = 5 \pm \sqrt{5^2 - 22.827}$ $\rightarrow$ $a_1 = 6.4741$, $b_1 = 3.5259$ und $a_2 = 3.5259$, $b_2 = 6.4741$

C1. a) $x \in \{25^\circ;65^\circ;145^\circ;185^\circ;265^\circ;305^\circ\}$. (b) $x \in \{15^\circ;150^\circ;195^\circ;330^\circ\}$.
(c) $x \in \{50^\circ;140^\circ;230^\circ;320\}$. (d) $x \in \{15^\circ;55^\circ;195^\circ;235^\circ\}$.
(e) $x \in \{35^\circ;60^\circ;95^\circ;150^\circ;215^\circ;240^\circ;275^\circ;350^\circ\}$

F1. $h_c = r_u\cdot\sin 2\alpha = 2.8191$

F2. $\gamma = \arcsin[(c/b)\cdot\sin\beta] = 32.388^\circ$ (147.61° ist keine „geometrisch sinnvolle" Lösung!) $s_b = \sqrt{c^2 + (b^2/4) - b\cdot c\cdot\cos\alpha} = 6.5633$

F3. $\alpha = \arccos((b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)) = 41.41^\circ$; $\beta = \arccos((a^2 + c^2 - b^2)/(2ac)) = 55.77^\circ$; $\gamma = \arccos((a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)) = 82.82^\circ$

F4. $\pi r^2 = ½ (2R - 2r)^2 \rightarrow r = 2R / \left(\sqrt{2\pi} + 2\right)$

F5. x = Radius: $2\pi x^2 + 8x[6\sqrt{2} - x(1 + \sqrt{2})] = 12^2/4 = 36 \rightarrow [4(1 + \sqrt{2}) - \pi]x^2 - 24\sqrt{2}\,x + 18 = 0 \rightarrow x = 0.5993$ (Eine zweite Lösung $x = 4.6102$ ist „geometrisch nicht sinnvoll"!) Durchmesser = 2x = 1.1985

F6. $2(1 + \sqrt{2})r + e = 10\sqrt{2}$ und $e \cdot 10\sqrt{2}/2 = \pi r^2 \rightarrow \pi r^2 + 10(2 + \sqrt{2})r - 100 = 0 \rightarrow r = 2.39925 \rightarrow (3\pi r^2/100) \cdot 100\% = 54.25\%$ (e ist eine Diagonale der Raute).

F7. $\alpha = \arctan ½ \rightarrow [(10^2 - 10 \cdot 5 - 5^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)/10^2] \cdot 100\% = 40\%$

A1. $M_a\begin{pmatrix}(-6+4)/2\\(7+1)/2\\(-1+3)/2\end{pmatrix} \rightarrow M_a\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} \rightarrow s_a = \overline{M_aA} = \sqrt{(3+1)^2 + (2-4)^2 + (5-1)^2} = 6$

A2. $q^2 + (q-3)^2 + q^2 = 9^2 \rightarrow q^2 - 2q - 24 = 0 \rightarrow q_1 = 6$ und $q_2 = -4$.

A3. $4z^2 = 8^2 + 12^2 + (10-z)^2 \rightarrow 3z^2 + 20z - 308 = 0 \rightarrow P_1\begin{pmatrix}0\\0\\22/3\end{pmatrix}$ und $P_2\begin{pmatrix}0\\0\\-14\end{pmatrix}$

A4. $\overline{M\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}} = \sqrt{(0-3)^2 + (0-3)^2 + (3-6)^2} = 3\sqrt{3} = 5.19615$